Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	28 augusti 2020
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

En regering funderar över bidrag som ska förhindra att många företag går i konkurs vid en pandemi. Man överväger fyra olika bidrag:
Bidrag 1: Möjlighet att skjuta upp betalning av skatt och avgifter.
Bidrag 2: Slopat krav på läkarintyg under de första 14 sjukdagarna.
Bidrag 3: Stöd vid minskad omsättning.
Bidrag 4: Slopad karens.
Summan av kostnaderna för bidragen får inte överskrida 100 mkr.

Man sätter upp en linjär optimeringsmodell för att bestämma hur mycket som ska användas till varje typ av bidrag, där x_j är det belopp som ska användas till bidragstyp j. Målfunktionen är baserad på uppskattningar av hur verksamma de olika bidragen är, och man vill maximera den total effekten.

Bivillkor (1) anger maximal totalsumma. Bivillkor (2) och (3) står för begränsningar som gjorts av politiska skäl, eftersom regeringen inte har majoritet i riksdagen, utan måste komma överens med andra partier.

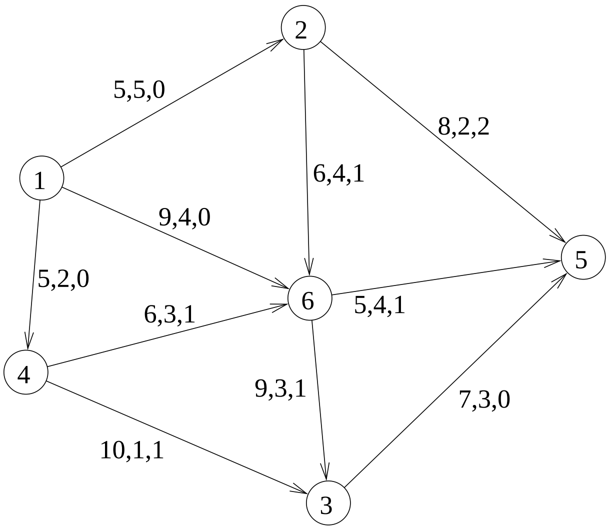
$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 100 & (1) \\
& & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & \leq & 20 & (2) \\
& & & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 30 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva? Ange skuggpriserna och vad de betyder. (3p)

b) Ett mindre parti föreslår en ny typ av bidrag, ersättning för miljöfrämjande åtgärder. Den bidragstypen skulle ha målfunktionskoefficient 2 och bivillkorskoefficienter 1, 1 och -1 i de tre bivillkoren. Utgå från optimallösningen i uppgift a. Blir det optimalt att avdela några pengar till denna bidragstyp? (1p)

Uppgift 2

Under första fasen i en pandemi drabbades främst storstäder, men under en andra fas uppträder smittspridning på andra platser i landet. Det betyder att behovet av respiratorer för intensivvård förändras geografiskt. Antalet tillgängliga respiratorer är begränsat, så man måste transportera apparaterna mellan sjukhus. I följande nätverk motsvarar noderna olika sjukhus och bågarna möjliga transportvägar. Det finns inte möjlighet till direkttransporter i samtliga fall, så ibland kan man behöva lasta om apparaterna, men detta kan bara ske vid sjukhus. I den situation man står inför kommer det att finnas överskott av respiratorer i vissa noder, nämligen 2 i nod 1, 3 i nod 2 och 2 i nod 4. Underskottet, dvs. behovet utöver de som redan finns på plats, kommer att uppgå till 2 i nod 3 och 3 i nod 5. Man vill minimera kostnaderna för transporterna, och kostnaden per respirator är angiven på varje båge. På bågarna anges också hur många som maximalt kan skickas den vägen, samt en föreslagen lösning, framtagen av administratörer på ett större sjukhus i huvudstaden.



a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är större än total sänkstyrka. Alla respiratorer i nod 1, 2 och 4 kommer inte att flyttas. I den föreslagna lösningen lämnas de två i nod 1 kvar, men det är inte säkert att det är optimalt. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, så att överskottet fördelas på ett optimalt sätt. Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

b) Man har vid framtagande av indata missat en transportmöjlighet, nämligen från nod 1 till nod 5, där högst en respirator kan skickas, med kostnad 10. Utgå från lösningen i uppgift a och beräkna en ny optimallösning. Hur mycket minskas totalkostnaden av ändringarna? (2p)

c) Man har gått igenom många framtidsscenarier, och i en av dem uppstår ett mycket stort behov i nod 5. Frågan är då hur mycket man maximalt kan skicka från nod 1 till nod 5. Båge (6, 3) är temporär och kommer då inte att finnas kvar. Lös problemet med standardmetod. Starta med flöde noll. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt och förklara vad det betyder. (3p)

Uppgift 3

Man uppmärksammar en liten by i glesbygd, långt från närmaste sjukhus. De flesta invånare är äldre och man befarar ett lokalt utbrott av en pandemi. Därför planerar man att inrätta en temporär sjukstuga, utrustad med ambulans, skyddsutrustning samt testfaciliteter för att upptäcka det aktuella viruset. Frågan är bara var den ska ligga, så att man snabbt ska kunna ta sig till gårdarna i byn.

Låt (x, y) vara koordinaterna där sjukstugan ska placeras. Geografiska begränsningar baserade på den aktuella naturen ger att platsen måste uppfylla bivillkoren $x \in X$, där $X = \{(x, y) : 2x + y \leq 5, x + y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Gårdarna i byn ligger på följande koordinater: (1, 1), (3, 2), (1, 4), (3, 4). Man anser att en bra målfunktion är att minimera summan av avstånden från varje går till sjukstugan.

a) Rita upp det tillåtna området, samt bivillkoren. Skissa ett område som är mindre än det tillåtna området, där optimal placering skulle kunna inträffa och motivera varför. Ledning: Fundera på konvext hölje. (1p)

b) Använd Euklidiskt avstånd (2-norm), och gör en matematisk optimeringsmodell för problemet. Tips: Avståndet kan lika gärna mätas med kvadraten av det Euklidiska avståndet. (1p)

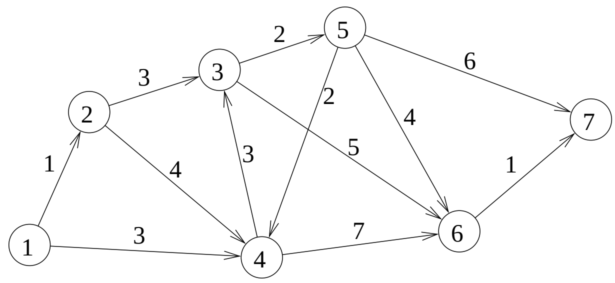
c) Sätt upp KKT-villkoren för modellen i uppgift b. Kontrollera huruvida någon av punkterna (0, 0), (1, 2), (3, 1) eller (1.3, 2.4) är KKT-punkt/optimal? (3p)

d) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera de två bivillkor som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$. (Ledning: (Observera att subproblemet är separabelt.) Öka multiplikatorn u med 2 för det eller de relaxerade bivillkor som ej är uppfyllda av lösningen, och lös om subproblemet. Upprepa detta en gång till, om lösningen inte blir tillåten. Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

e) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (2,0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

Uppgift 4

En person ska förflytta sig genom ett område där det finns möjliga smittokällor, från nod 1 till nod 7 i nedanstående graf. På varje båge står risken att bli smittad om man går där. Personen vill finna den väg som ger minimal summa av dessa risker.



a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden. Ange bästa väg och total smittorisk. (2p)

b) Det visar sig att det är smittorisk även i noderna, p.g.a. trängsel. Smittorisken är 2 i noderna 1, 2, 3 och 4, och 3 i noderna 5, 6 och 7. Modifiera nätverket och finn ny bästa väg. (1p)

Uppgift 5

Ett universitet ställs inför utmaningen att planera för undervisningen under ett smittohot, där det krävs mer utrymme än vanligt för varje student. Lokalerna kommer inte att räcka till, så några kurser får ges på distans. Universitetet tror att det är negativt att köra kurser på distans, och vill gärna undvika det.

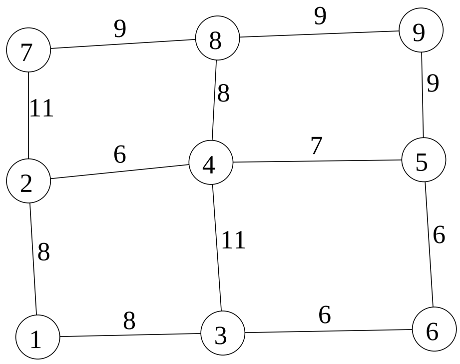
Man kan formulera en matematisk modell för optimeringsproblemet att bestämma vilka kurser som ska ge på normalt sätt på campus, och vilka som ska ges på distans. Indata är c_j: värdet av att ge kurs j på campus, dvs. inte på distans, a_{ij}: antalet rum av storlek i som krävs för att köra kurs j på campus, samt b_i: antalet rum av storlek i som finns tillgängliga på campus.

a) Betrakta specialfallet med $c = (2, 3, 4, 2)$, $b = (5, 3)$ och $a = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Skriv upp modellen med siffror. Lös problemet med Balas metod. Examinatorn för kurs 1 har stor makt på universitetet, så starta med att konstatera att $x = (1, 0, 0, 0)$ är en tillåten lösning (och därmed ger en undre gräns). Förgrena över variablerna i indexordning, och gå ner i 1-grenen först. (3p)

b) Universitetsledningen gissar på att det finns tillräckligt med rum av storlek 1, och tar bort det bivillkoret. Man kan genom viss omflyttning skapa ett rum till av storlek 2, så att högerledet blir 4. Lös detta problem med Land-Doig-Dakins metod. Ledning: Gå ner i $\geq$-grenen först. (3p)

Uppgift 6

Följande graf föreställer korridorerna i en skola. Man planerar att börja ge kurserna på vanligt sätt, med krav på personlig närvaro, efter att under en tid ha bedrivit undervisningen på distans. För att kunna göra det, kräver skyddsombudet att alla korridorer och skolsalar saneras från eventuell smitta av en maskin varje kväll. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har sanerat alla korridorer. På varje båge i grafen står tiden det tar att sanera korridoren samt alla salar i den korridoren. Man vill bestämma hur maskinen ska köra för att saneringen ska vara färdig så fort som möjligt. Maskinen kör fyra gånger så fort när den inte sanerar som när den gör det.

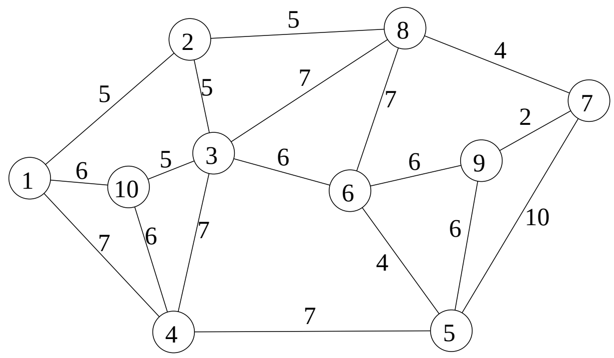


Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur, total tid samt hur många gånger varje korsning passeras. Vilka korridorer kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 7

Man ska kontrollera att alla restauranger på en ort följer kraven på pandemianpassad verksamhet, dvs. att borden flyttats isär, och att ingen trängsel sker någonstans i lokalen. Man skickar ut en kontrollant, som har befogenheten att omedelbart stänga en restaurang som inte uppfyller kraven.

Kontrollanten vill finna en rundtur som tar så lite tid som möjligt i följande graf, där noderna motsvarar restauranger, och varje båge är märkt med transporttid. Tiden för kontroll av en restaurang påverkas inte av vilken rundtur som används, så det är bara transporttiden som ska minimeras.



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (2p)

b) Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen i uppgift a, men inte skär bort någon tillåten rundtur. (1p)

Uppgift 8

Fem tillfälligt permitterade personer ska hjälpa till på ett sjukhus. Personerna har dock olika kompetens och ska få olika tjänster. Varje person kommer att kräva en viss upplärningstid innan arbetet kan påbörjas, beroende på kompetens och tjänst. Man har därför gjort en matris över nödvändig upplärningstid för varje person och varje arbetsplats, där rader står för personer och kolumner står för tjänster. Man vill finna den tilldelning av personer till tjänster som minimerar total upplärningstid.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)