Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	27 oktober 2021
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

De styrande i Lillköping planerar en helt ny stadsdel, "Balla staden". Man tänker sig att pröva nya grepp och metoder, och inte vara så bunden av traditioner. Det ska bli kul, helt enkelt. ("Ballt" som ett äldre kommunalråd hävdade att det kallades när han var ung, och hans position gjorde att ingen vågar säga emot honom. En skidåkningsintresserad kollega föreslog "Vallastaden", men det förslaget röstades ner.)

Den första uppgiften är att bestämma hur stort området ska vara för den nya bebyggelsen. Man tänker sig ett rektangulärt område, och ett av hörnen är fixerat vid en redan existerande vägkorsning. Man låter x_1 och x_2 beteckna längden på sidorna av rektangeln, lämpligt skalade. Som bivillkor har man bara $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 5$ och $x_1 + 2x_2 \leq 10$, p.g.a. hinder i naturen.

Målfunktionen visar sig vara besvärlig. Först tänkte man sig att bara maximera ytan av rektangeln, för att maximera intäkterna, men sedan visade det sig att kostnaderna varierade mer. I området slingrar sig en liten å fram, och den medför extra kostnader. Dessutom finns det andra platser där man måste spränga bort sten. Efter mycket funderande kom man fram till att man vill minimera följande funktion. $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 8x_2$

a) Sätt upp KKT-villkoren för problemet. Kontrollera huruvida någon av hörnpunkterna (0, 5), (3, 0) eller (3, 3.5) (men inte origo av naturliga skäl) är KKT-punkt/optimal? (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (1, 1). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera det enda bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 2$ och 3. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (2p)

Uppgift 2

Nästa steg i planeringsprocessen är att bestämma fördelningen av storlekar på bostäderna. Låt x_1 ange antalet ettor i området, x_2 antalet tvåor, x_3 antalet treor och x_4 antalet bostäder med fyra rum eller fler. Man formulerar följande linjära modell för att finna den bästa lösningen.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 200 & (1) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & & & & & \leq & 80 & (2) \\
 & & & & & & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 100 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Målfunktionen avser att maximera vinsten. Bivillkoren bygger på begränsningar i utrymme och material, men också på önskemål från kommunen hur man skulle vilja ha fördelningen. Man vill gärna ha ett blandat boende, med olika typer människor. Inte bara studenter i små ettor, eller bara barnfamiljer i stora villor

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? Tycker du att man lyckas med målsättningen att få ett blandat boende? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om man kunde öka ett högerled för någon av bivillkoren lite, vilket skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Man vill specialplanera för för lyxiga taklägenheter, och inför därför en egen variabel för denna bostadstyp. Bivillkorskoefficienter blir 6 i första bivillkoret, 0 i andra och 2 i det sista bivillkoren. Vad skulle målfunktionskoefficienten behöva vara för att lösningen skulle förbättras genom att bygga några sådana? (1p)

Uppgift 3

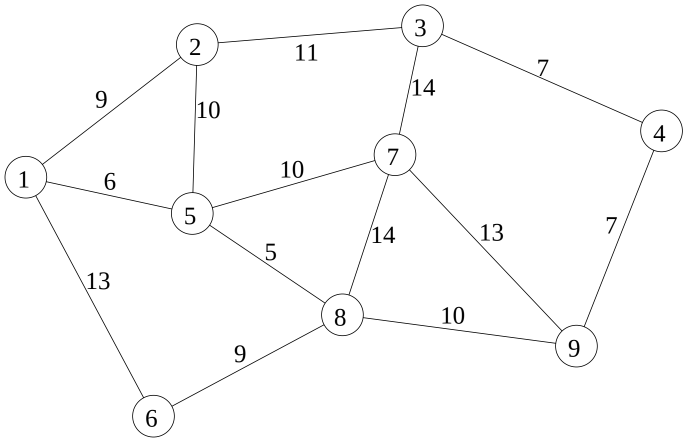
Man funderar också över blandningen av hustyper. Man vill till exempel inte bara ha många stora likadana höghus, eftersom sådant tenderar till att ge otrygga boendemiljöer med tiden. Man vill heller inte ha rena villaområden, för sådana har man tillräckligt av redan. Man delar upp hustyperna i två kategorier, och låter x_1 beteckna antalet "små" hus, med högst fyra lägenheter och högst två våningar, och x_2 antalet större hus (alla andra). Man får följande linjära heltalsproblem.

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{då} & & 5x_1 + 4x_2 \leq 100 \\
 & & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\
 & & -2x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 4

Nu är det dags att planera gatorna i Balla staden. Nedanstående nätverk anger gator som kan byggas. (Alla vägar kan användas i båda riktningarna.) På varje väglänk står kostnaden för att bygga den (i miljoner).



a) Vid en första planering vill man bara bygga vägar så att området blir sammanhängande, dvs. så att man på något sätt kan ta sig från vilken nod som helst till vilken annan nod som helst. Man vill givetvis minimera kostnaden. Vilket optimeringsproblem är detta? Lös det (med välvald metod). (2p)

b) Det blir lite långt att gå mellan vissa punkter i lösningen i uppgift a. Det vore trevligare, tycker man, om det fanns en rundtur som passerade varje nod, så att man kan komma till valfri nod genom att bara köra runt. Vilket optimeringsproblem är det att finna vilka vägar som ska byggas för att få en billigaste sådan rundtur? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

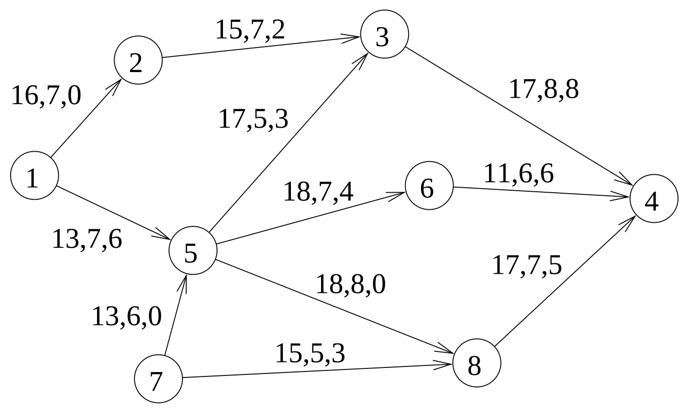
c) På vintern måste man ploga bort snön från gatorna. Vilket optimeringsproblem är det att finna en billigaste rundtur som passerar varje gata minst en gång? Detta problem kan vara lättare för vissa typer av grafer och svårare för andra. Det finns tre möjliga grafer man kan behöva lösa problemet i:
1. Grafen som fås av lösningen i uppgift a.
2. Grafen som fås av lösningen i uppgift b.
3. Grafen som fås om alla möjliga gator byggs.

Lös problemet i graf 3. Tiden det tar att köra en länk är proportionell mot kostnaden i grafen. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka gator kommer att passeras mer än en gång? Diskutera om det blir lättare eller svårare att lösa problemet i graf 1 och 2. (4p)

Uppgift 5

Man funderar över avloppssystemet i Balla staden. Det ska vara ett system av rör under marken som förbinder avloppen i husen med det allmänna avloppssystemet. Det är bökigt att ändra detta i efterhand, så man vill gärna konstruera det på ett bra sätt från början. För att inte råka ut för otrevliga överraskningar inne i de nya husen, är rören utrustade med backventiler, som ska förhindra att avloppsvatten går åt fel håll. Därför måste rören ses som riktade.

Man börjar med att räkna antal enheter av avloppsvatten som varje hus ger upphov till, och som ska skickas vidare. Man sätter därefter upp ett potentiellt nätverk med avloppsledningar, där kostnaderna motsvarar byggnad och installation av varje länk. Den kapacitet som anges i nätverket är den maximala som kan installeras. När man har räknat ut den bästa lösningen, kommer man bara att installera den kapacitet som behövs. Därför är kostnaderna linjära i flödet, som motsvarar installerad kapacitet.



Mängden avloppsvatten som genereras är 6 i nod 1, 2 i nod 2, 3 i nod 3, 1 i nod 5, 2 i nod 6, 3 i nod 7 och 2 i nod 8. Nod 4 är anslutningen till det allmänna avloppssystemet, och blir därför en sänka av styrka 19.

a) Man har genom manuell planering kommit fram till att det flöde som anges i nätverket ovan är det optimala. Verifiera eller motbevisa optimalitet av denna lösning. (2p)

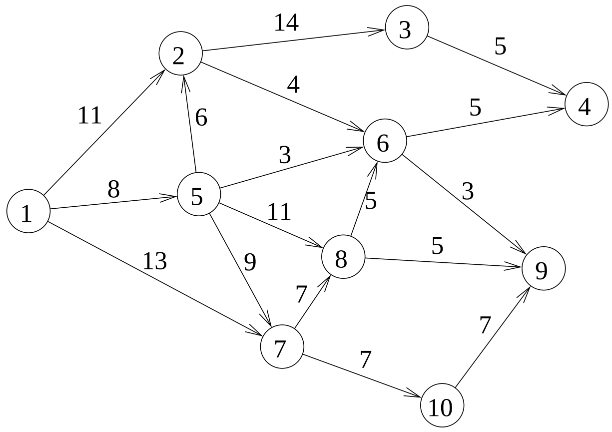
b) Utgå från lösningen i uppgift a. Det visar sig att det redan finns förberett för ett rör från nod 5 till nod 7, så man kan installera detta rör till den låga kostnaden av 1 per enhet. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. Jämför kostnadsförändringen mellan optimallösningarna med den information som ges av reducerad kostnad och flödesförändring. (2p)

c) Man inser att det ibland regnar väldigt mycket, mer än normalt, och vill därför veta hur mycket som maximalt kan transporteras bort från husen till avloppssystemet. Lutningen på marken gör att det främst kommer att dyka upp regnvatten i noderna 1, 2 och 7. Inför därför en superkälla med bågar till noderna 1, 2 och 7, med kapacitet 100. (Ta inte med nya bågen från uppgift b.) Ta bort allt flöde. Finn därefter maximalt flöde från superkällan till nod 4. Man är också intresserad av vilka bågar som begränsar maxflödet. Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 6

Man vill inte ha så många bilar inne i Balla staden, utan planerar ett stort garage i utkanten. För att det ska fungera, dvs. för att folk verkligen ska använd garaget, krävs det att promenadvägen från garaget till bostäderna inte är för lång. Därför sätter man upp följande graf där nod 1 är planerad plats för garaget, och alla andra noder är ingångar till bostadshus. Bågarna är möjliga gångvägar.

Man tittar på en situation, nämligen när folk ska gå från garaget till sin bostad. (När folk ska åka iväg, blir det ju likadant, fast tvärtom.) Därför kan man arbeta med riktade bågar, eftersom man vet åt vilket håll folk går. Bågkostnaderna motsvarar gångtid i minuter.



a) Först vill man veta hur lång tid det tar för varje person att komma hem, dvs. att gå från garaget till sin hemnod. Man förutsätter att varje person går kortaste vägen. Finn denna information med standardmetod. Vad blir den längsta promenadtiden för någon boende? (3p)

b) Skulle man förbättra läget för någon boende om man införde möjlighet att gå från nod 7 till nod 9 på tiden 1 (tvärs över en gräsmatta)? Skulle den maximala tiden minskas? (Lös inte om problemet.) (1p)

Uppgift 7

Man har skrivit kontrakt med fem olika byggfirmor, men inte specificerat vilken del av Balla staden varje firma ska bygga. Man har delat upp den blivande staden i fem delar, som ska ha olika typer av bebyggelse, och man inser att byggfirmorna är olika bra på olika saker, och därför tar olika betalt. Varje firma ska få ett område som sitt ansvar. (Och varje område ska bebyggas av en firma.) Man har gjort en kostnadsmatris för vad det skulle kosta att låta varje firma bebygga varje område. Rader motsvarar firmor och kolumner olika delar av området. Som vanligt vill man ha den lösning som minimerar kostnaden.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 5 & 18 & 15 \\ 8 & 28 & 7 & 18 & 14 \\ 10 & 29 & 8 & 20 & 18 \\ 9 & 26 & 4 & 17 & 15 \\ 7 & 27 & 5 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Det är mycket vanligt i byggbranschen att saker blir dyrare än planerat. Antag att alla kostnader för firma 1 ökas med 2, alla kostnader för firma 2 ökas med 3, alla kostnader för firma 3 ökas med 2, alla kostnader för firma 4 är oförändrade och alla kostnader för firma 5 ökas med 1.

Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? I så fall hur? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? I så fall hur? (Lös inte om.) (1p)