Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	4 januari 2022
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Luddköping ska anordna sin traditionella julmarknad, med försäljning av diverse pryttlar i stånd på torget, och andra roliga arrangemang. I år blir det dock lite annorlunda, eftersom man befinner sig i efterdyningarna av en pandemi, vilket innebär vissa inskränkningar. Antingen ser man till att högst 20 personer är på torget samtidigt, eller också måste man kräva intyg på vaccination eller nyligt tillfrisknande från aktuell åkomma för att släppa in personer. I båda fallen krävs ett ovälkommet staket runt torget, för att hindra obehöriga att komma dit.

Det första frågan är dock om man överhuvudtaget ska ha en julmarknad. Ett alternativ är helt enkelt att ställa in allt. Man har också flera kringarragemang som antingen ska genomföras eller ställas in.

Ett är Tomteruset, ett löplopp där alla deltagare måste vara utklädda till tomtar, med lösskägg och tomteluva som obligatoriska delar. Deltagarna får vara i olika åldrar, och ska springa så många varv som möjligt på en timme på en utstakad bana. Alla deltagare får en medalj.

Ett annat är Tomtetåget, som är en röd traktor, körd av en lokal bonde med tomteluva, med ett par vagnar som folk kan åka med i. Tomtetåget går från den stora bilparkeringen till torget, och tillbaka.

Man sätter upp ett optimeringsproblem med följande variabeldefinitioner:
$x_1 = 1$ om julmarknaden genomförs, 0 om inte.
$x_2 = 1$ om Tomteruset genomförs, 0 om inte.
$x_3 = 1$ om Tomtetåget körs, 0 om inte.
$x_4 = 1$ om ett staket runt torget ställs upp, 0 om inte.
$x_5 = 1$ om alla gäster ska visa intyg, 0 om inte.
$x_6 = 1$ om en begräsning på 20 besökare införs, 0 om inte.
$x_7 = 1$ om en (tidigare) känd artist anlitas som konferencier, 0 om inte.
$x_8 = 1$ om den lokala dansklassen ska uppträda på en scen på torget, 0 om inte.
$x_9 = 1$ om en scen inrättas på torget, 0 om inte.

Variablerna påverkar varandra via bivillkor. Om julmarknaden inte genomförs, ska inget annat genomföras. Om julmarknaden genomförs, krävs staket samt antingen intyg eller begräsning av antalet besökare. Man kräver att Tomteruset och/eller dansen genomförs, om det ska vara någon julmarknad. Om dansklassen ska uppträda, krävs det en scen. Om dansklassen ska uppträda eller Tomteruset genomförs, behövs en konferencier, annars inte. Om man begränsar antalet besökare till 20, vill man inte ha en konferencier. Man vill inte köra tomtetåget om man inte har fler än 20 besökare. Eftersom deltagarna i Tomteruset räknas som besökare, kan man inte genomföra det, om man begränsar antalet besökare till 20. Scenen på torget skulle ta upp plats som behövs för målgången av Tomteruset, så högst en av dessa aktiviteter kan genomföras.

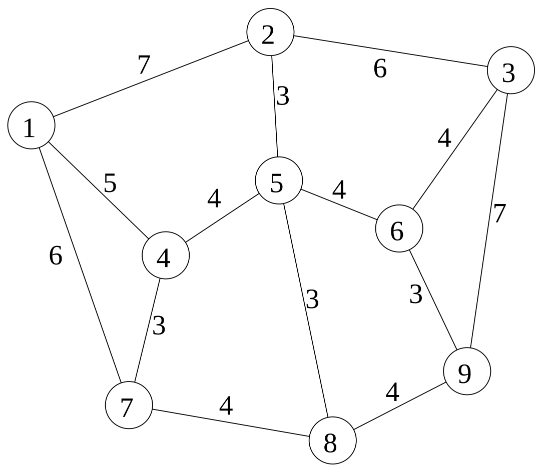
Varje aktivitet innebär kostnader, vilka listas nedan (med samma index som aktiviteten). Vinst anges som negativ kostnad.
$c_1 = -10$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$, $c_4 = 2$, $c_5 = 1$, $c_6 = 1$, $c_7 = 3$, $c_8 = 0$, $c_9 = 1$.

a) Sätt upp en linjär optimeringsmodell med binära variabler för att finna den plan som minimerar kostnaden. (2p)

b) Lös problemet med Balas metod. Förgrena över den första ofixerade variabeln. Ange optimallösning i ord. Ledning: Origo är en tillåten lösning. (3p)

Uppgift 2

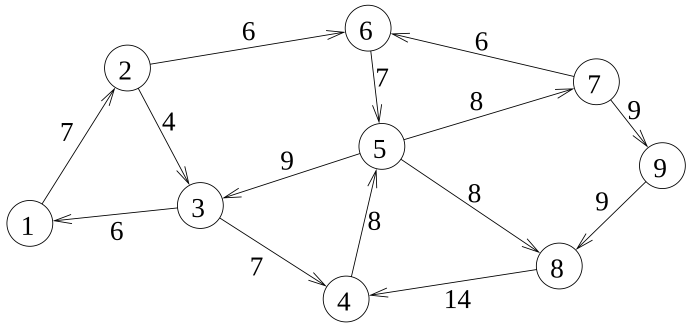
Om Tomteruset ska anordnas, krävs en lämplig bana. Det ska vara en rundtur som startar och slutar på torget. Stadens affärsinnehavare vill alla att banan ska gå förbi deras affär, så att de kan få lite reklam. I grafen nedan är nod 1 torget, och de andra noderna är affärer som ska passeras, dvs. alla noder ska ingå en gång i rundturen. För att få med så många deltagare som möjligt, vill man göra rundturen så kort som möjligt, så även otränade Luddköpingsbor ska känna sig välkomna. På bågarna i grafen anges avståndet.



Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa bansträckningen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 3

Ett vägarbete gör att Tomtetåget inte kan köra sin vanliga väg melllan torget, nod 1, och parkeringen, nod 9, i följande graf med avstånd på bågarna. Stadens trafikpolis, P. Isman, påpekar att alla de berörda gatorna är enkelriktade, vilket anges i följande graf. Finn kortaste väg från nod 1 till 9, samt kortaste väg från nod 9 till nod 1. (3p)



Uppgift 4

Tanken väcks att inte använda hela torget till julmarknaden, utan bara en del av det. Det skulle innebär att man kan spara in lite på staketkostnaden, men också att intäkterna minskar. Om man använder en rektangel med sidorna x_1 och x_2, så bedömer man att kostnaden minus vinsten kommer att ges av funktionen $f(x) = 2(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 2x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 8x_2 + 34$, och ska minimeras.

Som bivillkor har man att $0 \leq x_1 \leq 3$ och $0 \leq x_2 \leq 4$ (torgets storlek) samt $2x_1 + 2x_2 \leq 10$ (staketets totala längd).

a) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 4), (1, 4), (3, 2), (3, 0) samt (0, 0). Förklara med praktiska argument varför vissa av dessa hörnpunkter är ointressanta, och kontrollera optimalitet för de återstående med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera det enda bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 1 och 2. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (3p)

d) Man funderar på att införa en begränsning på ytan som upplåtes till julmarknaden, vilket kan formuleras som bivillkoret $x_1 x_2 \leq 6$. Antag att man inför detta bivillkor och löser om problemet enligt uppgift a, b och c. Hur påverkas metoderna samt de slutsatser man kan dra av lösningarna? (Lös inget, utan svara principiellt.) (1p)

Uppgift 5

Luddköping tillhandahåller och monterar upp stånden där knallarna ska sälja sina varor. Det finns två olika format på stånden, ett större och ett mindre. Man funderar nu på hur många man ska använda av varje sort. De större stånden ger mer intäkt, men tar mer plats. Det tillgängliga antalet av de båda sorterna är också begränsat. Optimeringsproblemet att finna den tillåtna lösning som ger mest intäkt kan formuleras som följer. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} & & 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 4, \text{heltal} \end{array}$$

Uppgift 6

Att hålla en julmarknad med krav på intyg eller begränsning på antal besökare kräver att en person avdelas till att kontrollera detta. Fem äldre herrar i klubben Tigers ställer upp på ett entimmespass var, vilket täcker de fem timmarna marknaden håller på. De har dock olika önskemål om vilka tider som är bäst. Följande matris anger "kostnaden" för varje person att ta varje pass. Man vill alltså fördela personerna så att varje pass har en kontrollant, och så att alla blir så nöjda som möjligt, dvs. så att totalkostnaden minimeras. Rader motsvarar personer och kolumner olika pass.

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 13 & 18 & 15 \\ 11 & 14 & 12 & 12 & 10 \\ 10 & 19 & 10 & 20 & 18 \\ 9 & 16 & 14 & 17 & 20 \\ 12 & 17 & 15 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

Uppgift 7

Faster Bellatrix ska baka kakor och sälja på julmarknaden. Hon kan göra bruna pepparkakor, gula saffranskatter och röda kolakakor (med röd karamellfärg). Frågan är bara hur många hon ska göra av varje sort. Det finns begränsningar i hur mycket hon kan sälja, och begränsade mängder av vissa nödvändiga råvaror. Därför formulerar hon följande linjära optimeringsmodell, där x_1 anger antal pepparkakor, x_2 antal saffranskatter och x_3 antal kolakakor.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & & & \\
\text{då} & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 100 & (1) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 20 & (2) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 22 & (3) \\
& & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 23 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Målfunktionen avser att maximera vinsten. Bivillkor 1 kommer från en uppskattning av efterfrågan, medan de andra bivillkoren står för tre råvaror, nämligen mjöl, socker och smör.

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Bellatrix funderar på att ta med gröna marsipangrisar (med grön karamellfärg). Därför inför hon en ny variabel för detta. Bivillkorskoefficienter blir 3 i första bivillkoret, 1 i andra och 2 i det tredje och 0 i det fjärde bivillkoret. Vad skulle målfunktionskoefficienten behöva vara för att lösningen skulle förbättras genom att tillverka några sådana? (1p)

Uppgift 8

Dagarna före julmarknaden kommer ett ordentligt snöfall, men sedan blir det plusgrader, så gatorna blir fulla av snöblask. Man vill snabbt ploga bort allt snöblask från vissa gator, så att besökarna inte blir blöta om fötterna.

Grafen i uppgift 2 visar de gator som ska plogas, men gata (2,3) och (7,8) behöver inte plogas. På bågarna står den tid det tar att ploga länken. Finn den kortaste rundtur för en snöplog som rengör alla gator. Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka gator kommer att passeras mer än en gång? (3p)

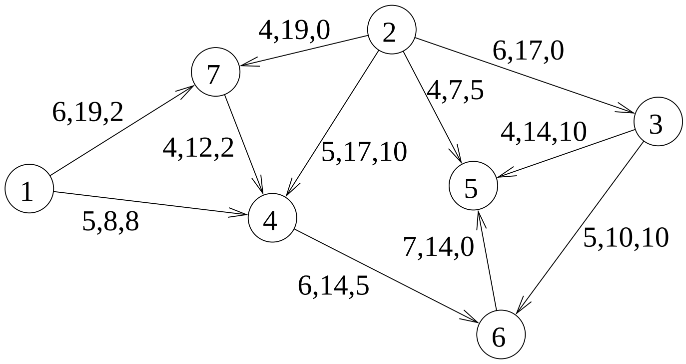
Uppgift 9

Firma Toppijul ska sälja chokladtoppar på julmarknaden. Det är dock vissa problem med produktionen, eftersom det är ont om vissa råvaror. Man vet inte om det beror på den avklingande pandemin, eller på en väldigt stor båt som fastnat i en smal kanal, eller nåt annat. Men faktum kvarstår, lagren av chokladtoppar är mindre än de hade varit. Det krävs planering.

Toppijul har tre marknader man vill sälja toppar på, och tre lager med toppar. I nedanstående nätverk är nod 1, 2 och 3 lagren med 10, 15 och 20 kartonger av toppar, och nod 4, 5 och 6 är platserna där man ska sälja toppar på marknader. Man tror att man kan sälja 15 kartonger på varje marknad.

Även möjligheterna till transporter är sämre än vanligt. I grafen anger bågarna möjliga transportvägar, märkta med enhetkostnad och övre gräns för antal kartonger.

VD Bertil på Toppijul har gjort en transportplan som han tror är optimal. Praktikant Jesper tror dock att det går att hitta en bättre lösning. Om han lyckas, blir han befordrad. Annars får han sparken.



a) Jesper upptäcker att Bertil har gjort ett slarvfel. Båge (3,6) ska kosta 12, inte 5, som Bertil har räknat med. Utgå från Bertils lösning, och hjälp Jesper att finna en bättre och optimal lösning. Motivera noggrant. Hur går det med karriären för Jesper? (3p)

b) Det finns en viss chans att produktionen i nod 2 kan komma igång ordentligt. Hur mycket skulle man som mest kunna skicka från nod 2 till nod 6? (Starta med flöde noll i alla bågar.) Man är också intresserad av vilka bågar som begränsar maxflödet. Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)