Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	23 mars 2022
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget JAHL säljer monteringsfärdiga bokhyllor. För att skilja sig från en betydligt större konkurrent från Agunnaryd är alla hyllorna röda. Jante Andergrön, grundare och enda anställd, ska nu i sitt hem i Hjulsbro, Linköping, göra i ordning de små påsarna med skruvar och dylikt som ska medfölja varje hylla.

Det finns tre olika sorters hyllor, och påsarna ska innehålla skruvar, brickor och muttrar. En hylla av sort 1 kräver fem skruvar, fyra brickor och fyra muttrar. En hylla av sort 2 kräver fem skruvar, två brickor och fyra muttrar. En hylla av sort 3 kräver fem skruvar, två brickor och två muttrar.

Lagret innehåller just nu 100 skruvar, 70 brickor och 50 muttrar. Allt annat material finns i överflöd. En hylla av sort 1 ger nettovinsten 10, en hylla av sort 2 ger nettovinsten 8, en hylla av sort 3 ger nettovinsten 7, och Jante vill maximera vinsten.

Jante formulerar följande linjära optimeringsmodell, där x_j anger antal hyllor av sort j.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrr}
\max & z = & 10x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & & & \\
\text{då} & & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & \leq & 100 & (1) \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 70 & (2) \\
 & & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 50 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i text) och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om man kunde öka tillgången av en råvara (skruvar, brickor eller muttrar) lite, vilket skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

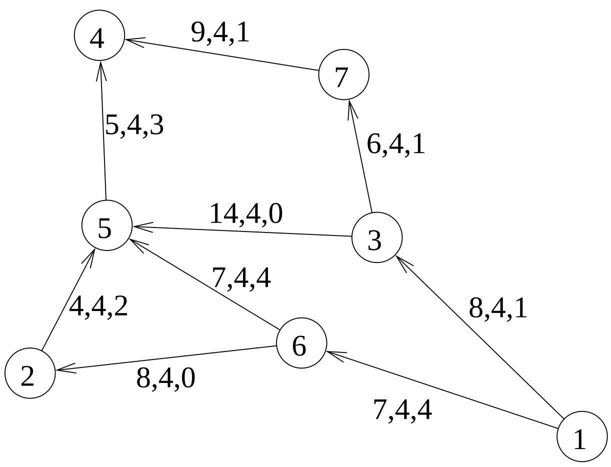
c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Det finns en lite mer komplicerad variant av hylla, som kräver 10 skruvar, 10 brickor och 10 muttrar. Jante räknade först inte med den, eftersom den skulle bli för krånglig för folk att montera. Han inser dock att hans större konkurrent inte tänker så, så han överväger att ta med den sortens hylla också. Hur stor vinst per hylla skulle krävas för att den hyllan skulle bli lönsam att ta med? (1p)

Uppgift 2

I följande graf motsvarar nod 1 JAHLs huvudkontor (som också är lager). Nod 4 är en affär i Ryd, som har beställt 4 hyllor av en viss sort, och nod 5 är ett källarförråd i Vallastaden, där en student med entreprenörsanda tror sig kunna sälja 3 hyllor av samma sort. JAHL har för tillfället bara 5 hyllor i lager av den sorten, men ett företag i Lambohov, i nod 2, har bestämt sig för att sluta sälja JAHLs produkter, och har två hyllor över, som JAHL kan köpa tillbaka.

Man anlitar nu firma Speedofix för att transportera hyllorna. Speedofix drivs av en annan student, Sören, med entreprenörsanda, och förfogar över en flakmoped, som tyvärr bara kan ta en hylla i taget.

Nu vill Speedofix planera hur man ska göra transporterna. Man räknar bara med kostnader för de lastade transporterna, eftersom man kan göra annat när mopeden är tom. Följande graf anger möjliga transportvägar, och de linjära enhetskostnaderna. Sören, som själv kör mopeden, vägrar att köra samma väg mer än fyra gånger, vilket gör att alla bågarna i grafen får övre gräns 4. Man räknar ut det optimala flödet till det resulterande minkostnadsflödesproblemet, vilket anges sist på varje båge i grafen.



a) Visa att lösningen som anges i nätverket är optimal. (2p)

b) Man hade glömt det ständiga vägarbetet på Kaserngatan, båge (6,5). En mer realistisk bågkostnad vore 20. Utgå från lösningen i uppgift a och finn en optimal lösning med denna kostnad. (2p)

c) I framtiden kan JAHL producera mer, och affären i Ryd sälja mer. Hur mycket skulle man som mest kunna skicka från nod 1 till nod 4? Ändra först övre gräns på Kaserngatan, båge (6,5), till 2. Man är också intresserad av vilka bågar som begränsar maxflödet. Lös problemet med standardmetod. (Starta med flöde noll i alla bågar.) Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 3

Jante funderar på att designa en egen bokhylla. Han tänker sig att den ska vara x_1 dm bred och x_2 dm hög. (Djupet är standardiserat.) Men det är lite klurigt. Blir den för hög och smal, kan den bli ostadig. Blir den för låg och bred, kanske den inte får plats i folks hem. Vad är bäst? Han bestämmer sig för att samla alla möjliga nackdelar i en målfunktion, och sedan minimera den. Han inser att målfunktionen blir olinjär, med det kan inte hjälpas. Den totala "kostnaden" ges av funktionen $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 60x_2$.

Som bivillkor har han $x_1 + 2x_2 \leq 30$ (baserat på åtgången av material) och $x_2 \leq 2x_1$ (för att den inte ska bli för hög och smal) samt $0 \leq x_1 \leq 10$ och $0 \leq x_2 \leq 18$.

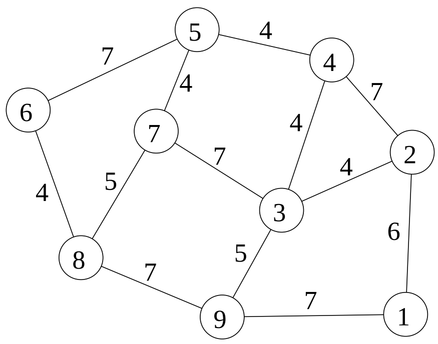
a) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 0), (10, 0), (10, 10) och (6, 12). Förklara varför vissa av dessa hörnpunkter är ointressanta, och kontrollera optimalitet för de återstående med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoren som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = (0, 0)$, (6,0) och (3,3). (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 4

Jante inser att han behöver marknadsföra sig bättre, och bestämmer sig för att dela ut reklamlappar till vissa potentiella återförsäljare. I följande graf motsvarar nod 1 JAHLs lokalisering, medan de andra noderna är de platser han vill besöka och lämna en reklamlapp.

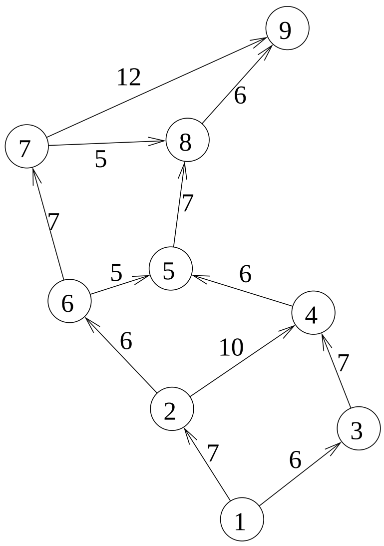


Han vill besöka alla platser under en och samma rundtur, och vill att den rundturen ska vara så snabb som möjligt. På bågarna i grafen anges tiden det tar om han använder en elsparkcykel.

Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 5

a) Speedofix får en beställning av en transport från Landeryd till Tallboda. Sören har inte varit på någon av dessa platser tidigare, och vill nu hitta bästa vägen att köra med mopeden. Han litar inte på de webbaserade bästavägprogrammen som finns tillgängliga, utan vill räkna själv. Dessutom vill han använda egna kostnader, lite subjektiva. Vissa gator gillar han inte att åka på, andra är roligare. Så han konstruerar följande riktade graf med möjliga vägar. Bågarna är märkta med Sörens egenuppskattade kostnader. Landeryd är nod 1 och Tallboda nod 9. Finn bästa (billigaste) väg från nod 1 till nod 9 i grafen. (2p)



b) Skulle han förbättra lösningen om han tillät sig att köra från nod 4 till nod 8 på tiden 8 genom att gena lite över flygplatsområdet? (Det är absolut förbjudet, men Sören tänker att om han bara kör väldigt fort så går det nog.) (Lös inte om problemet.) (Och gör inte som Sören.) (1p)

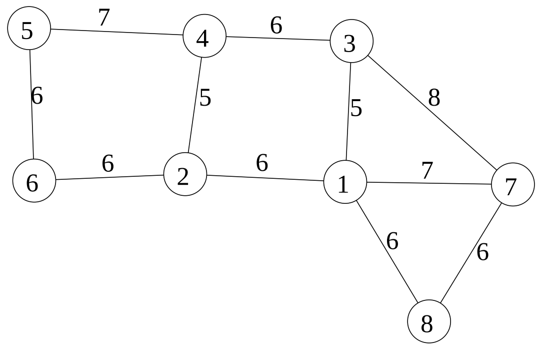
Uppgift 6

a) Sören funderar på att utöka verksamheten i Speedofix. Det finns flera i familjen som kan köra flakmoped. Närmare bestämt fem stycken. (Han räknar bort farmor, för hon hör så dåligt.) Så han skulle kunna köpa in högst fem flakmopeder till. Problemet är att det finns två modeller. En är lite större, och dyrare. Det finns också andra små skillnader som gör att Sören gärna vill ha en blandad fordonsflotta. Han sätter upp följande optimeringsproblem för att finna vilka inköp som vore bäst. Målfunktionen är en total uppskattning av vad varje modell skulle tillföra i värde för verksamheten. Det första bivillkoret bygger på antalet tillgängliga förare, det andra på tillgänglig budget, och de två sista på hur många mopeder han kan få tag på just nu. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{då} & & x_1 + x_2 \leq 5 \\ \text{då} & & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 3, \text{heltal} \\ & & 0 \leq x_2 \leq 3, \text{heltal} \end{array}$$

Uppgift 7

Sören kan faktiskt montera på en gaturengöringsborste på flakmopeden. Med hjälp av den kan han sopa bort gruset från gatorna, när våren kommer och risken för ishalka är borta. Kommunen gillar inte det, för han sopar bara ner gruset i diket, och tar inte hand om det, som kommunen gör. Men Sören blir irriterad när han tycker att gruset aldrig tas bort, så han planerar att göra lite fulsopning på natten i sitt närområde. Nedanstående graf visar gatorna han vill sopa, och anger vilken tid det tar på varje gata. Han vill göra en rundtur som går så fort som möjligt.



Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka gator kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 8

Jante sitter med tio trasiga hyllor framför sig, och funderar på om man kan plocka ihop två trasiga så att det blir en hel. Det finns nämligen två olika sorters skador, antingen på nederdelen eller på överdelen. Så man kan byta ut en trasig nederdel mot en hel nederdel från en hylla som har trasig överdel. Så det borde vara möjligt att få ihop fem hela hyllor av de tio trasiga. Men det kommer att krävas olika mycket arbete. Så han sätter upp en matris med uppskattade "kostnader" för arbetet att kombinera ihop varje par, och vill hitta en lösning som minimerar den totala kostnaden. Hyllorna med trasig överdel motsvarar raderna, och de med trasig underdel motsvarar kolumnerna, och han vill få ihop fem hela, dvs. para ihop varje rad med en kolumn.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 7 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

Uppgift 9

JAHL vill utöka sortimentet. Men man har allvarliga utrymmesproblem. Det finns fem nya produkter man skulle kunna tänka sig att satsa på. Men man kan inte göra allt samtidigt, så Jante måste välja vilka produkter han verkligen ska börja med. Produkt 1 och 2 tar båda stor plats, så man kan ha högst en av dem. Produkt 3, 4 och 5 har specifika utrymmeskrav, så högst två av dem får plats. Å andra sidan blir hanteringen av produkt 3 mycket lättare om också produkt 1 finns med, så Jante vill inte ha produkt 3 om inte produkt 1 är med. Av liknande skäl bestämmer Jante att produkt 2 inte ska vara med om inte produkt 4 är med. Slutligen inser Jante att han vill göra på samma sätt med produkt 4 och 5, dvs. antingen är båda med eller ingen av dem.

Förväntad vinst av produkt 1 är 7, för produkt 2 är den 6, för produkt 3 är den 4, medan produkt 4 och 5 båda har förväntad vinst 3.

a) Sätt upp en linjär optimeringsmodell med binära variabler för att finna den plan som maximerar förväntad vinst. (1p)

b) Lös problemet med Balas metod. Förgrena över den första ofixerade variabeln. Ledning: Gå ner i 1-grenen först. (3p)