Matematiska institutionen
Optimeringslära

# TENTAMEN

**TAOP88/TEN 1**
**OPTIMERING FÖR INGENJÖRER**

| | |
|---|---|
| **Datum:** | 26 augusti 2022 |
| **Tid:** | 14.00-19.00 |
| **Hjälpmedel:** | Miniräknare |
| | Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* |
| | Anteckningar i boken får förekomma. |
| **Antal uppgifter:** | 7 |
| **Antal sidor:** | 6 |
| | Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. |
| | Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng. |
| **Examinator:** | Kaj Holmberg |
| **Jourhavande lärare:** | Kaj Holmberg, tel 013-282867 |

**Resultat meddelas per e-post**

## Tentamensinstruktioner

### När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.*
*Motivera alla påståenden du gör.*
*Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*
*Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

### Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.*
*Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.*
*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

## Uppgift 1

Helmer har en koloniträdgård, och där odlar han många olika ätbara växter. Han brukar sälja jordgubbar, hallon, krusbär och björnbär på en närbelägen marknad, och har nu kommit på en ny ide, nämligen blandpåsar. Det betyder att han i en påse kan lägga några jordgubbar, några hallon, några krusbär och/eller några björnbär. Han tänker sig att göra tre olika påsar med olika blandningar, för att se vilka som säljer bäst.

Han har skördat 100 jordgubbar, 30 hallon, 20 krusbär och 120 björnbär. De tre blandningarna han tänker sig är:
1. 10 jordgubbar, 10 hallon och 10 björnbär.
2. 10 jordgubbar, 5 krusbär och 15 björnbär.
3. 8 jordgubbar, 5 hallon, 3 krusbär och 7 björnbär.

Frågan är hur många påsar av varje blandning han kan göra. Han har egentligen ingen målfunktion, utan vill göra så många påsar som möjligt, så han sätter alla målfunktionskoefficienter till 1, och vill maximera målfunktionsvärdet. Han formulerar följande linjära optimeringsmodell, där $x_j$ anger antal påsar med blandning $j$.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrr}
\max & z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{då} & & 10x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & \leq & 100 & (1) \\
 & & 10x_1 & & & + & 5x_3 & \leq & 30 & (2) \\
 & & & & 5x_2 & + & 3x_3 & \leq & 20 & (3) \\
 & & 10x_1 & + & 15x_2 & + & 7x_3 & \leq & 120 & (4) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

**a**) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

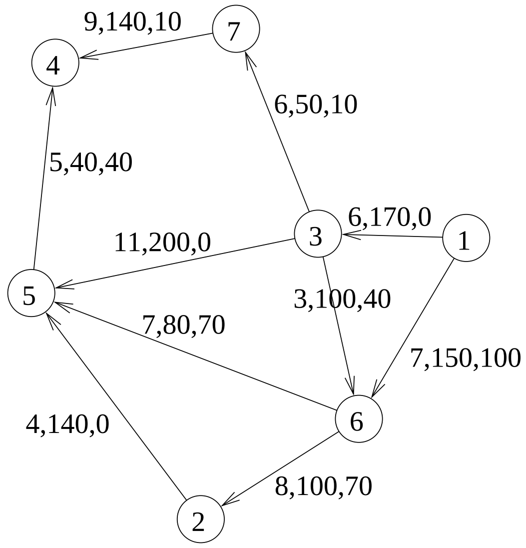
**b**) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Helmer kunde plocka lite mer av någon bärsort, vilket skulle han tjäna mest på? Motivera. (1p)

**c**) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Genom att studera lösningen på problemet, hittar Helmer på en ny blandning, för att utnyttja de plockade bären ännu bättre. Blandning 4 ska innehålla 10 jordgubbar och 10 björnbär. Skulle han få flera påsar med hjälp av denna blandning? (1p)

## Uppgift 2

Det har plötsligt och oväntat blivit brist på vissa livsmedel, och det gör att man måste planera transporter på ett effektivare sätt. Just nu finns mycket vete på vissa ställen och det måste transporteras till andra ställen där det behövs. Av olika anledningar är många normala transportvägar omöjliga att använda.

I följande nätverk ligger 100 ton vete i nod 1 och 50 ton i nod 3, och man har behov av 50 ton i nod 4, 70 ton i nod 2 och 30 ton i nod 5. Nätverket anger möjliga transportvägar, och man räknar med linjära kostnader. Koefficienterna i nätverket anger kostnad per ton. Dessutom finns en övre gräns på varje båge för hur mycket som kan skickas den vägen. Till sist anges flöde i en enkelt beräknad preliminärlösning.




**a**) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. (2p)

**b**) Ett avtal mellan flera parter möjliggör att kostnaden på båge (3,5) sänks från 11 till 9. Beräkna nytt optimal flöde. Hur mycket sänks den totala kostnaden? Starta helst från optimallösningen i uppgift a. (2p)

**c**) Det finns möjligheter att skörda mycket mer vete i nod 1. Hur mycket skulle man maximalt kunna transportera från nod 1 till nod 5? Vilka bågar begränsar maxflödet? Lös problemet med standardmetod. (Starta med flöde noll i alla bågar.) Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

## Uppgift 3

Helmers koloniträdgård har ett långsmalt land, och han ska odla potatis på en del, och sallad på en annan. Han vill planera odlingen på ett optimalt sätt, och låter $x_1$ vara antal meter han planterar potatis på, och $x_2$ antalet meter han planterar sallad på. Landet är 5 meter långt, så han får bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 5$, samt de sjävklara $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$. Han lägger också till $x_1 \leq 4$ och $x_2 \leq 3$, för han vill inte ha för mycket av någon sort.

Målfunktionen baseras på vad han tror sig kunna ta hand om när det blir dags för skörd, och blir att minimera $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 14x_2$.

**a**) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 0), (4, 0), (4, 1), (2, 3) och (0, 3). Förklara varför vissa av dessa hörnpunkter är ointressanta om han vill ha både potatis och sallad, och kontrollera optimalitet för de återstående med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

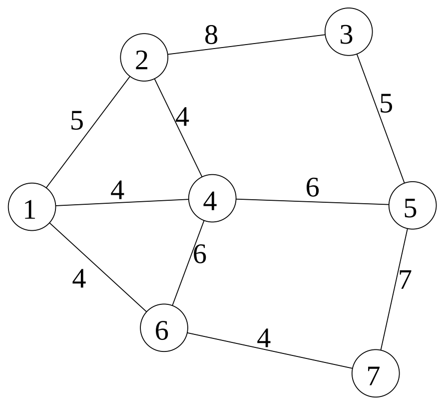
**b**) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

**c**) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 1 och 2. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för $u$ ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

## Uppgift 4

Följande nätverk avbildar vägar i ett område med krig. Varje natt finns det risk att fientliga soldater smyger in och minerar vissa av vägarna, man vet aldrig vilka. Därför måste man varje morgon, innan man börjar använda vägarna, kontrollera att det inte finns några minor. Det görs med en stor maskin som går ganska långsamt.

Man ska alltså köra maskinen i en rundtur som täcker samtliga bågar i nätverket, och man vill göra det så snabbt som möjligt. På bågarna anges hur lång tid det tar att genomsöka dem.




**a**) Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (3p)

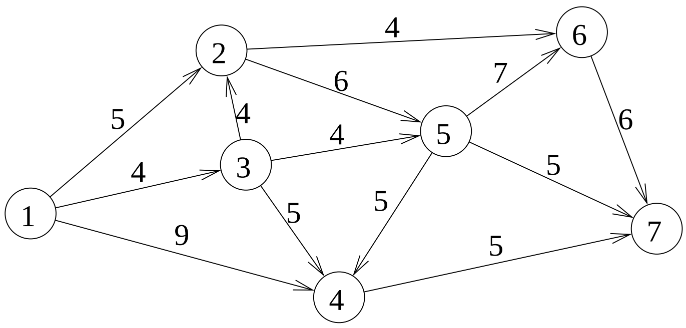
**b**) Fienden byter taktik. Man placerar istället ut minor i korsningarna, för att spara minor, eftersom de börjar ta slut. Det betyder att minröjarna bara behöver besöka varje nod i grafen. Koefficienterna på bågarna anger fortfarande tiden det tar att köra där, och man vill fortfarande göra det på minimal tid.

Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

**c**) I uppgift b beaktas inte tiden det tar att undersöka en nod, vilken kan vara avsevärd. Motivera varför detta inte påverkar vilken lösning man får. (1p)

## Uppgift 5

**a**) Helmer ska cykla till Agda med en bukett blommor. Det är lite knepigt att cykla med blommor, och han vill inte att de ska bli fula, så han vill ta den snabbaste vägen. I följande graf visas möjliga vägar, med tider på bågarna, och han ska cykla från nod 1 till nod 7. Finn, med lämplig metod, den snabbaste vägen. (2p)



**b**) Helmer har hört att det finns fina blommor i diket vid nod 6. Hur mycket längre tid tar det om han åker via nod 6 och tar med sig några av dem? Plocktiden är försumbar. (1p)

## Uppgift 6

**a**) Helmer funderar på att plantera äppelträd och/eller plommonträd i sin koloniträdgård. Hur många ska han välja av varje sort? Han sätter upp följande optimeringsproblem för att finna vilken blandning som vore bäst. $x_1$ är antal äppelträd och $x_2$ är antal plommonträd. Målfunktionen speglar förväntad skörd, viktad med hur goda han tycker att frukterna är. Bivillkoren bygger på begränsat utrymme, samt de olika förutsättningarna för god tillväxt. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 5x_1 + 4x_2 \\
\text{då} & & 3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\
\text{då} & & 4x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& & 0 \leq x_1 \leq 3, \text{heltal} \\
& & 0 \leq x_2 \leq 3, \text{heltal}
\end{array}
$$

**b**) Vilka bivillkor är aktiva i optimum? (1p)

**c**) Helmer läser att plommonträd inte trivs ensamma, så man bör ha minst två sådana, om man ska ha några överhuvudtaget. Utvidga den matematiska modellen så att det blir så. (Lös ej modellen.) (1p)

### Uppgift 7

Det finns skator vid koloniträdgården, och de äter gärna upp Helmers körsbär, när de börjar mogna. Helmer samlar sina vänner för att de ska hjälpas åt för att agera fågelskrämmor. Han vill att en person vaktar trädet och skrämmer bort skatorna under all den tid på dygnet som skator kan tänka sig äta. Helmer vill göra en dygnsplanering. De olika vännerna har olika preferenser om att vara vaken olika delar av dygnet, så Helmer sätter upp en matris med kostnader för de olika personerna att ta de olika passen. Planeringen ska givetvis minimera de totala kostnaderna. Raderna står för olika tidspass, klockslagen anges till vänster, och kolumnerna står för olika personer.

$$C = \begin{pmatrix} \text{kl 4-7:} & 14 & 14 & 13 & 13 & 14 \\ \text{kl 7-11:} & 5 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ \text{kl 11-15:} & 4 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ \text{kl 15-19:} & 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ \text{kl 19-22:} & 11 & 12 & 15 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

**a**) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

**b**) När lösningen är framtagen, inser Helmer att alla tycker väldigt illa om att tillbringa tidig morgon eller sen kväll vid ett körsbärsträd. Därför ökar han kostnaderna i första raden med 4, och i sista raden med 3. Hur påverkas primal och dual optimallösning av detta? Hur ändras det optimala målfunktionsvärdet? (Lös inte om problemet.) (1p)