Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	24 oktober 2022
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Palrik har bestämt sig för att sälja sin samling av gamla serietidningar. Vissa sorter, som Stålmannen, Fantomen och Kalle Anka, har han samlat många av. Alla andra kallar han Övrigt. Han plockar undan ett fåtal enstaka nummer, som han tror är värda mycket, för eventuell senare försäljning. Resten tänker han sälja i buntar om 10 stycken med olika sammansättning.

Han tänker sig buntar med följande blandningar:
1. 10 st Stålmannen.
2. 10 st Fantomen.
3. 10 st Kalle Anka.
4. 10 st Övrigt.
5. 2 st Stålmannen, 3 st Fantomen och 5 st Kalle Anka.
6. 5 st Fantomen och 5 st Övrigt.

Priserna (dvs. hans inkomster) sätter han till 20 kr per bunt 1, 15 per bunt 2, 30 per bunt 3, 10 per bunt 4, 25 per bunt 5 och 20 per bunt 6. Samlingen består av 120 Stålmannen, 170 Fantomen, 200 Kalle Anka samt 150 Övrigt.

Frågan är hur många buntar av varje blandning han ska göra. Därför formulerar han följande linjära optimeringsmodell för att maximera sina inkomster, där x_j anger antal buntar med blandning j. Han förutsätter att han kan sälja alla buntar han gör. (Han struntar i att variablerna egentligen bör anta hetaliga värden.)

$$
\begin{array}{llcccccccccccccl}
\max & z = & 20x_1 & + & 15x_2 & + & 30x_3 & + & 10x_4 & + & 25x_5 & + & 20x_6 & & & \\
\text{då} & & 10x_1 & & & & & & & + & 2x_5 & & & = & 120 & (1) \\
 & & & & 10x_2 & & & & & + & 3x_5 & + & 5x_6 & = & 170 & (2) \\
 & & & & & & 10x_3 & & & + & 5x_5 & & & = & 200 & (3) \\
 & & & & & & & + & 10x_4 & & & + & 5x_6 & = & 150 & (4) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Palrik tänkte först ta med slackvariabler, som ju brukar ha två uppgifter, nämligen fylla upp gapet mellan höger- och vänsterled, samt ge en tillåten startlösning. Men sedan inser han att variablerna x_1, x_2, x_3 och x_4 fungerar bra i dessa två aspekter. Man kan alltid få likhet i varje bivillkor genom att använda lagom mycket av dessa fyra variabler, och en tillåten lösning fås ju uppenbart genom att sätta x_5 och x_6 till noll, och fylla på lämpligt mycket av de andra.

Rent tekniskt får man ju en korrekt simplextablå att starta från genom att dividera varje ekvation med 10, och sedan eliminera varablerna x_1, x_2, x_3 och x_4 från målfunktionen.

Ledning: Det sista steget ger målfunktionsraden $z - 1.5x_5 - 7.5x_6 = 1245$ i första simplextablån.

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Starta med x_1, x_2, x_3 och x_4

som basvariabler. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. Ledning: På grund av problemets struktur fås duallösningen som $y_j = (c_j - \hat{c}_j)/10$ för $j = 1, 2, 3, 4$. Observera att det är $-\hat{c}_j$ som står i tablån. (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Palrik kunde sno en tidning av sin lillebror, vilken sort skulle han tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Palrik funderar på att göra en tjockare bunt, med 5 st Stålmannen, 5 st Fantomen, 5 st Kalle Anka och 5 st Övrigt. Den skulle få priset 45 kr. Skulle han tjäna på att göra sådana buntar? (1p)

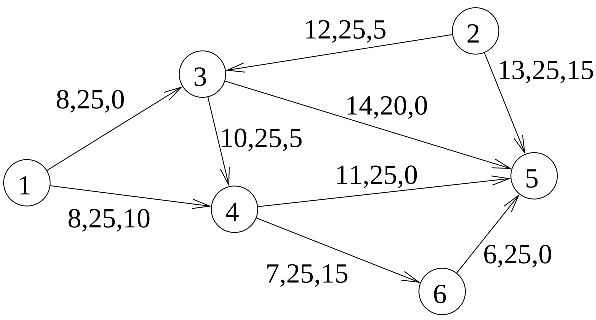
d) Ange exakt hur målfunktionsraden som gavs som ledning beräknades. (1p)

Uppgift 2

Palrik börjar gilla att handla med serietidningar, och startar upp ett företag på nätet som hjälper till att sälja och köpa begagnade serietidningar.

Hans första uppgift gäller tidningen Tarzan. I nod 1 i följande nätverk finns 10 exemplar till salu, och i nod 2 finns 20. I nod 5 och 6 finns köpare som båda vill ha 15 st. Palriks uppgift blir att ordna transporterna av dessa tidningar.

Nätverket anger möjliga transportvägar, och man räknar med linjära kostnader. Koefficienterna i nätverket anger kostnad per tidning. Dessutom finns en övre gräns på varje båge för hur mycket som kan skickas den vägen. Till sist anges flöde i en enkelt beräknad lösning.



a) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. (2p)

b) Palrik upptäcker att han har matat in båge (6,5) i fel riktning. Den ska gå från nod 5 till nod 6, men för övrigt ha samma data. Beräkna nytt optimal flöde. Hur mycket sänks den totala kostnaden? Starta från optimallösningen i uppgift a. (2p)

c) Personen i nod 1 har ett väldigt stort lager av tidningar, och skulle möjligtvis kunna tänka sig att sälja mer. Personen i nod 6 skulle då kunna tänka sig att köpa mer. Hur många tidningar skulle man maximalt kunna transportera från nod 1 till nod 6? Lös problemet för både nätverket i uppgift a och det korrigerade i uppgift b. Vilka bågar begränsar maxflödet? Använd standardmetod och starta med flöde noll i alla bågar. Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 3

Palrik börjar handla mycket med begagnade serietidningar, och behöver lagerutrymme. Han vill hyra in sig i källaren i hans föräldrars hus. Om han hyr en golvarea med längd x_1 meter och bredd x_2 meter, blir hans kostnader minus intäkter $f(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - 20x_1 - 24x_2$. (De olinjära delarna beror mest på att han kommer att förvara tidningarna i en stor hög, som riskerar att rasa om den blir för hög.) Som bivillkor har han $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 4$ och $x_2 \leq 3$, samt $x_1 + x_2 \leq 5$ (föräldrarna har också saker som ska få plats).

a) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 0), (4, 0), (4, 1), (2, 3) och (0, 3). Förklara varför vissa av dessa hörnpunkter är ointressanta, och kontrollera optimalitet för de återstående med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

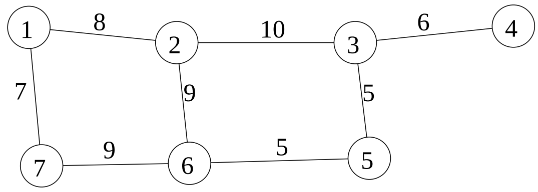
b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a.) (3p)

c) Förhandling med föräldrarna ger att den övre gränsen för x_2 kan höjas från 3 till 4. Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 2 och 4. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (3p)

Uppgift 4

a) Palriks verksamhet växer. Han har lånat en stor lägenhet med många rum och långa korridorer av sin morbror (som befinner sig i Spanien efter pension). Han lägger högar av tidningar i varje rum, tyvärr osorterat. Det betyder att när han får en beställning, måste han springa runt i de olika rummen och leta för att hitta just det exemplaret. Det tar lång tid, så han bestämmer sig för att en gång för alla bestämma den snabbaste rundturen, för att minimera tid vid kommande beställningar. (Att han ibland hittar exemplaret innan han kommer til sista rummet bedömer han som slumpmässigt, och tar därför inte hänsyn till det.)

I följande graf anger noderna rum. Koefficienterna på bågarna anger tiden det tar att gå mellan rummet. Han vill helt enkelt finna den snabbast rundturen som besöker alla rum.



Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. Ledning: Behandla nod 4 på ett särskilt sätt. (3p)

b) I uppgift a beaktas inte tiden det tar att undersöka ett rum, vilken kan vara avsevärd. Motivera varför detta inte påverkar vilken lösning man får. (1p)

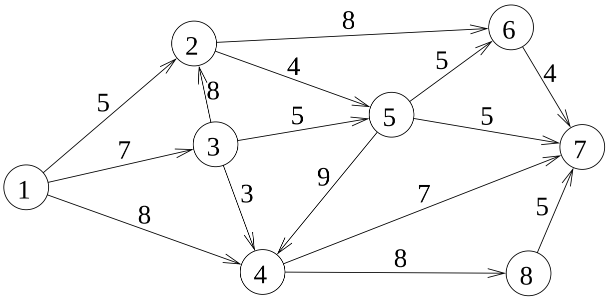
c) Morbrodern meddelar oväntat att han ska komma hem, och förväntar sig att lägenheten ska vara välstädad. Palrik inser att han måste göra en snabbstädning, vilket bland annat inbegriper att släpa runt på morbroderns tunga dammsugare. Alla korridorer måste dammsugas, och frågan är hur Palrik ska gå runt och göra det. Han vill absolut inte släpa dammsugaren mer än nödvändigt. Den står i städskåpet i rum 1, och den ska tillbaka dit när allt är färdigt.

Grafen i uppgift a kan användas, om man skalar upp alla kostnaderna genom att multipliera dem med 20. (Behöver man göra det?) Han ska alltså gå i en rundtur som täcker samtliga bågar i nätverket, och han vill göra det så snabbt som möjligt.

Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. Vilka korridorer kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 5

a) Palrik ska cykla till samlaren Elvita med en extra värdefull tidning. Han är nervös för att det ska bli skador på tidningen, som skulle kunna sänka värdet på den, så han vill ta den kortaste vägen. I följande graf visas möjliga vägar, med avstånd på bågarna, och han ska cykla från nod 1 till nod 7. Finn, med lämplig metod, den kortaste vägen. (2p)



b) Elvita skulle kunna tänka sig att ta emot tidningen i nod 6 eller 8. Skulle något av dessa alternativ ge kortare väg för Palrik? Hur mycket kortare? (1p)

Uppgift 6

a) Palrik funderar på att köpa in lådor att förvara sina serietidningar i. Det finns två olika storlekar, och han undrar hur många han ska välja av varje sort. Han sätter upp följande optimeringsproblem för att finna bästa lösning. x_1 är antal stora lådor och x_2 är antal små. Målfunktionen speglar förväntad nytta av dem, baserat på hur mycket som får plats i dem. Bivillkoren bygger på begränsat utrymme, samt begränsad budget. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{då} & & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\
\text{då} & & 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 & & 0 \leq x_1 \leq 5, \text{heltal} \\
 & & 0 \leq x_2 \leq 5, \text{heltal}
\end{array}
$$

b) Vilka bivillkor är aktiva i optimum? (1p)

Uppgift 7

Palrik ska deltaga i en serietidningsmässa i Österås. Öppettiderna är 10 timmar, och man måste lova att ha sitt stånd bemannat hela tiden. Det orkar inte Palrik själv, och måste därför ta hjälp av sina kompisar, Bitta och Olvar. De delar upp tiden i tvåtimmarspass, av vilka Palrik och Bitta ska ta två var, medan Olvar tar ett. De sätter tillsammans upp en matris med upplevda kostnader för de olika personerna att ta de olika passen. Bemanningen ska minimera de totala kostnaderna. Raderna står för personer, de två första är Palrik, de två följande är Bitta, och den sista är Olvar. Kolumnerna står för de olika tvåtimmarspassen.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Olvar känner att han gärna skulle vilja stå två pass. Därför sänker han alla sina kostnader med 2. Hjälper det? Hur påverkas primal och dual optimallösning av detta? Hur ändras det optimala målfunktionsvärdet? (Lös inte om problemet.) (1p)