Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	22 mars 2023
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Vilhelminia ska starta företag och sälja påsar med sorterade muttrar. Hon har kommit på att man aldrig vet vilken storlek man plötsligt kan behöva. Därför är det bättre att ha flera olika storlekar i samma påse, i alla fall för personer som inte använder så många.

Hon har muttrar av storlekarna M4, M6, M8 och M10, och planerar för fyra olika påsar. I följande tabell ges hur många av varje sort som påsarna ska innehålla, samt förväntad vinst per påse. Längst ner ges totalt antal tillgängliga muttrar.

Påse	M4	M6	M8	M10	Vinst
1	3	3	2	0	5
2	0	3	2	2	7
3	2	2	2	2	8
4	1	1	3	1	6
Tot	70	60	40	20	-

Hon vill veta hur många påsar av varje sort hon ska göra, så att total vinst maximeras.

Optimeringsmodellen för detta blir följande, med variablerna x_j för hur många påsar av sort j man gör, och bivillkoren för de olika mutterstorlekarna.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 70 & (1) \\
 & & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 60 & (2) \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 40 & (3) \\
 & & & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 20 & (4) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (4p)

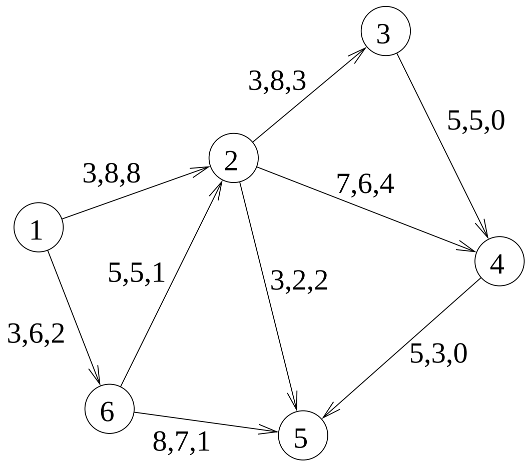
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om man kunde öka tillgängligt antal av en mutterstorlek, vilken skulle man tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Vilhelminia tittar på de överblivna muttrarna. En påse med fyra var av de minsta sorterna, M4 och M6, verkar lovande. Hur många sådana kan hon göra, utan att minska antalet av några andra påsar, och vad skulle vinsten behöva vara för att det ska ge ökad vinst? (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Vilhelminias bror föreslår en påse med fyra M4 och fyra M10. Vad skulle vinsten minst behöva vara för att man skulle tjäna på sådana? (1p)

Uppgift 2

Vilhelminia lyckas få ett kontrakt med några närliggande affärer som kan sälja hennes påsar. Hon kan få hjälp med transporterna av sin kompis Valdemar, som har en lådcykel. Hon packar påsarna i kartonger, och har nu 10 kartonger i sitt hem i nod 1. Beställningarna är 3 till nod 3, 4 till nod 4 och 3 till nod 5. Nätverket visar möjliga vägar, och Valdemar vill låta Vilhelminia välja vilka vägar han ska köra. Han tar linjärt betalt för körd mängd, med enhetskostnaderna angivna som koefficienter i nätverket. Dessutom finns en övre gräns på varje båge för hur många som kan skickas den vägen. Till sist anges flöde i en av Valdemar föreslagen lösning.



a) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal, dvs. den billigaste möjliga. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. (2p)

b) Vilhelminia misstänker att Valdemar har satt en för hög kostnad på båge (3,4) för att han inte vill köra den vägen. (Det finns en ilsken hund i en trädgård där.) När hon konfronterar honom med detta, erkänner han direkt. Kostnaden ska vara 3. Beräkna nytt optimal flöde. Hur mycket sänks den totala kostnaden? (Dvs. vad tjänar Vilhelminia på att tvinga Valdemar cykla förbi den skällande hunden?) Starta från optimallösningen i uppgift a. (2p)

c) I framtiden planerar Vilhelminia att utöka samarbetet med stormarknaden i nod 5. Hur mycket skulle man maximalt kunna transportera från nod 1 till nod 5? Vilka bågar begränsar maxflödet? Använd standardmetod och starta med flöde noll i alla bågar. Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 3

Vilhelminia köper en 3D-skrivare för att själv producera ("skriva ut") muttrar. Frågan är dock vilket material hon ska använda. Hon hitter ett material som kallas Kolfiber, men som är en blandning av PLA (Polyactic Acid) och ABS

(Acrylonitrile Butadiene Styrene). Genom att variera proportionerna av dessa material kan muttrarnas egenskaper ändras. En lämplig blandning för muttrar fås av att minimera följande funktion, $f(x) = 8x_1^2 + 4x_2^2 - 32x_1 - 16x_2$, där x_1 är andelen PLA och x_2 andelen ABS. Som bivillkor har man $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ samt $x_1 + x_2 \leq 1$.

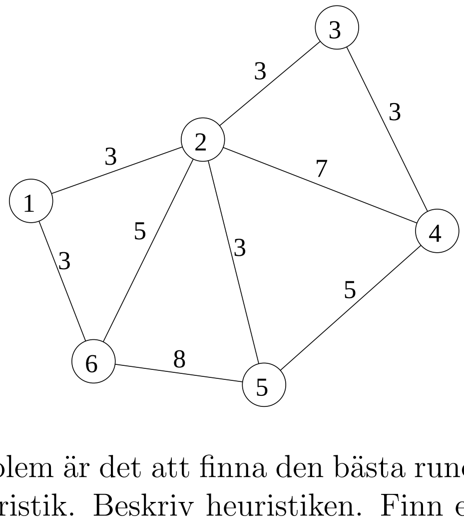
a) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 0), (1, 0) och (0, 1). Kontrollera optimalitet för dessa punkter med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a.) (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 8 och 16. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (3p)

Uppgift 4

a) Valdemar tröttnar på att cykla fram och tillbaka med en halvfull lådcykel. Istället vill han köra en rundtur som passerar alla som ska få leveranser. I följande nätverk är nod 1 lagret där han hämtar varorna och de andra noderna kunder som ska få leverans denna dag. Han vill alltså köra i en rundtur som startar och slutar i nod 1. Koefficienterna på bågarna anger tiden det tar att köra, och han vill helt enkelt finna den snabbast rundturen.

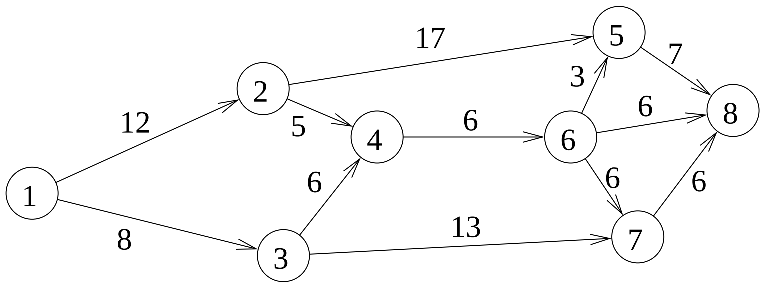


Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Beskriv heuristiken. Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

b) Vilhelminia påstår att kostnaderna i uppgift a är fel. Hon hävdar att Valdemar har mätt fel. För att bevisa att han har rätt, bestämmer han sig för att cykla längs alla vägarna i grafen och mäta tiden (igen). Men hur ska han köra? Vilket optimeringsproblem är det att finn en snabbaste rundtur för Valdemar? Finn en optimallösning. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (3p)

Uppgift 5

a) Vilhelminia har också köpt en cykel, och hävdar att hon kan leverera varor snabbare än Valdemar. Han kan ta sig från nod 1 till nod 8 i följande graf på 27 minuter. Hon cyklar inte fortare, men kanske kan göra ett smartare vägval. På varje båge anges körtid i minuter. Finn, med lämplig metod, den bästa vägen, och svaret på frågan om hon kan komma fram snabbare än Valdemar. (2p)



b) Om det är mycket trafik och trängsel kan det gå långsammare att ta sig fram. Ange mellantider för noderna längs vägen så att hon kan hålla koll på eventuella förseningar. (1p)

Uppgift 6

a) Vilhelminia expanderar sin verksamhet, och funderar på att köpa maskiner som hjälper henne att packa påsarna. Det finns två sorters packningsmaskiner som är tänkbara, och frågan är hur många av varje sort hon ska köpa. I nedanstående modell är x_j antal maskiner av sort j. Målfunktionen speglar förväntad nytta av dem. Bivillkoren bygger på begränsat utrymme, samt begränsad budget. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 5x_1 + 8x_2 \\
\text{då} & & 5x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
\text{då} & & 4x_1 + 7x_2 \leq 22 \\
 & & x_1 \geq 0, \text{heltal} \\
 & & x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

b) Vilka bivillkor är aktiva i optimum? (1p)

Uppgift 7

Vilhelminia vill visa upp sina kolfibermuttrar och blandpåsar på passande tekniska mässor på olika platser i Sverige. Tyvärr sammanfaller de i tiden. Vid ett tillfälle vill hon finnas representerad på fem olika platser samtidigt. Hon ber Valdemar och tre andra kompisar, Veronika, Vilgot och Viola, att hjälpa till, och ta hand om var sin mässa. Frågan är bara vem som ska åka vart. Personerna har olika egenskaper, och mässorna är på olika platser. En vinnande personlighet på mässan i Stockholm är kanske inte lika bra på mässan i Örkelljunga eller Jukkasjärvi.

Vilhelminia tänker till och tar fram en kostnadskoefficient för varje person på varje ställe, och vill minimera den totala kostnaden. Raderna står för personer, Vilheminia, Valdemar Veronika, Vilgot och Viola, och kolumnerna står för de olika platserna, Stockholm, Skänninge, Nykil, Örkelljunga och Jukkasjärvi. (Som synes vill Vilhelminia inte åka till Jukkasjärvi.)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 9 & 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Är den primala optimallösningen unik? Är den duala optimallösningen unik? Motivera. (1p)