Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	9 juni 2023
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Berra är bra på att göra godis, speciellt brun chokladkola, svart lakritskola och ljus gräddkola. Nu ska han sälja dem på en lokal marknad. Han tänker göra i ordning påsar med följande blandningar: påse 1: fem choklad och fem lakrits, påse 2: tre choklad, tre lakrits och tre grädd, påse 3: två choklad, tre lakrits och fem grädd, påse 4: tio choklad, påse 5: tio lakrits, påse 6: tio grädd. Han har totalt 70 choklad, 100 lakrits och 60 grädd. Målet är att tjäna så mycket pengar som möjligt, och han utgår från att allt kommer att säljas. Han har beräknat vinsten per påse till 8 kr för påse 1, 9 kr för påse 2, och 8 kr för påse 3. För påsarna 4, 5 och 6 räknar han med noll vinst.

Han vill veta hur många påsar av varje sort det är bäst att göra, så att total vinst maximeras. Optimeringsmodellen för detta blir följande, med variablerna x_j för hur många påsar av sort j man ska göra, och bivillkoren för de olika sorternas kolor.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrcrl}
\max & z = & 8x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & & & & & & & & & \\
\text{då} & & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 10x_4 & & & & & = & 70 & (1) \\
& & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & & + & 10x_5 & & & = & 100 & (2) \\
& & & & 3x_2 & + & 5x_3 & & & & & + & 10x_6 & = & 60 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ledning: Man kan använda x_4, x_5 och x_6 som startbasvariabler. Dividera först bivillkoren med 10. (Det är inte nödvändigt att använda denna ledning, men då ska man sätta $\leq$ i bivillkoren.)

Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. (Om man har dividerat bivillkoren med 10, är siffrorna i tablån där man brukar läsa av duallösningen 10 gånger för stora.) Är optimallösningen unik? (4p)

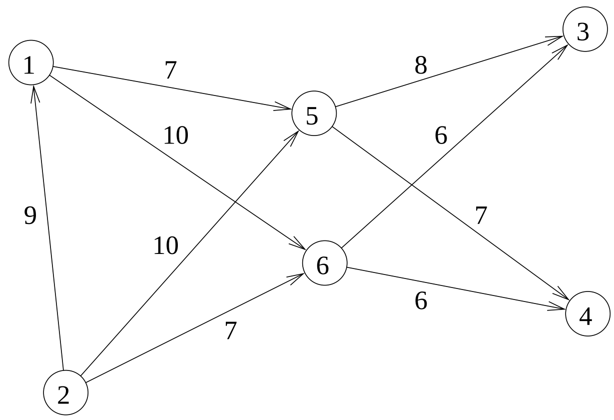
b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Berra skulle göra mer av en kolasort, vilken skulle han tjäna mest på? Motivera. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. En påse med fem lakrits och fem grädd vore visuellt attraktiv. Vad skulle vinsten minst behöva vara för att man skulle tjäna på sådana påsar? (1p)

d) Formulera LP-dualen till det ursprungliga LP-problemet ovan. Spelar det någon roll om man har = eller $\leq$ i de primala bivillkoren? Visa att den duala lösningen i uppgift b är tillåten samt att starka dualsatsen är uppfylld. Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Stoppa in den duala lösningen och visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (3p)

Uppgift 2

Berras storebror Gurra arbetar på ett företag som fått kontrakt på att bygga vindkraftverk till havs. Det är nu dags att leverera de stora vingarna till byggplatsen. I nedanstående graf finns 3 vingar i fabriken i nod 1 och 5 i fabriken i nod 2. Det behövs 4 vid byggplatsen i nod 3 och 4 vid byggplatsen i nod 4. Nod 5 och 6 är omlastningsplatser från lastbil till båt. Kostnaderna per vinge ges i grafen nedan. Alla övre gränser på bågarna är större än 10.



Den enklaste lösningen är att skicka tre enheter vägen 1 - 5 - 3, fyra enheter vägen 2 - 6 - 4, samt en enhet vägen 2 - 6 - 3.

a) Kontrollera om den enklaste lösningen är optimal, dvs. den billigaste möjliga. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Genom ett speciellt avtal skulle man kunna transportera saker gratis från fabriken i nod 2 till fabriken i nod 1. Man skulle också kunna transportera saker gratis från nod 6 till nod 5. Att skriva avtalet skulle betinga en fast kostnad på 1. Vore detta lönsamt? (2p)

Uppgift 3

Berra och Laura börjar experimentera i köket. De vill göra en ny kolasort med örtsmak. De tänker sig basilika och mynta, eftersom det är det som de har i sin trädgård. Men det krävs att proportionerna är perfekta för att det ska smaka bra, och bli en bra konsistens. Låt x_1 vara mängden basilika och x_2 mängden mynta. Bivillkoren blir då $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 3$ samt $x_1 \leq 2$ (för mycket basilika blir inte gott). Målfunktionen är dock oklar. Berra tror att den bästa blandningen fås av att minimera följande funktion, $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1 - 16x_2$, och Laura går med på att göra ett testkok. Men först måste man ju hitta den optimala lösningen.

a) Hörnpunkterna i det tillåtna området är (0, 0), (2, 0), (2, 1) och (0, 3). Kontrollera optimalitet för dessa punkter med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

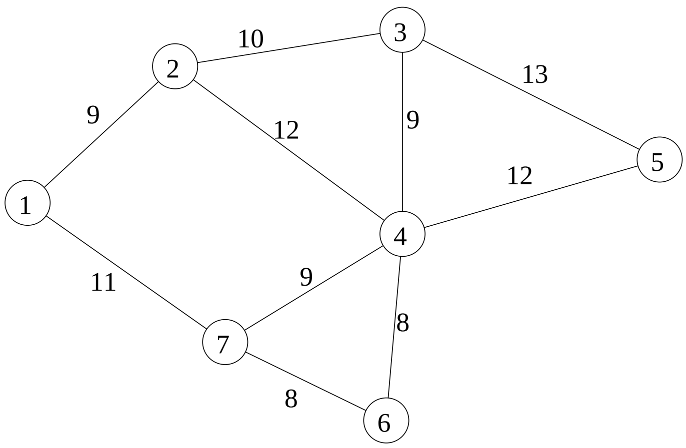
b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a.) (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$ samt 4 och 6. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningarna i uppgift a eller b.) (3p)

d) Betrakta uppgift c. Beräkna vilket värde på u som skulle ge likhet i det relaxerade bivillkoret, och vilka värden på x detta skulle ge. (1p)

Uppgift 4

a) Laura tycker att Berra borde skala upp produktionen. Hon har kontakter i några små affärer i trakten, och har fått dem att på prov sälja Berras godis. Berra kräver att godiset skall vara färskt, och planerar därför att leverera det varannan dag. Han får låna Lauras bil en kort tid varje kväll, och vill planera hur han ska göra leveranserna på snabbaste sätt i en enda rundtur. I följande nätverk är nod 1 Berras hem (dvs. produktionslokal) och de andra noderna kunder som ska få leverans. Han vill alltså köra i en rundtur som startar och slutar i nod 1. Koefficienterna på bågarna anger tiden det tar att köra, och han vill helt enkelt finna den snabbast rundturen.

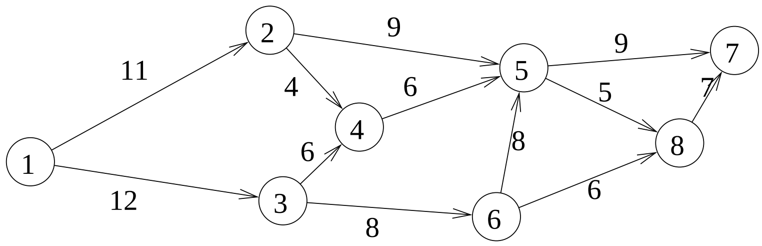


Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Beskriv heuristiken. Finn en optimistisk uppskattning av tiden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen, men ingen tillåten rundtur. (3p)

b) Laura tror att kostnaderna i uppgift a (som kommer från Google) är fel. Hon bestämmer sig för att kolla detta, genom att köra längs alla bågarna i grafen och mäta tiden. Men hur ska hon köra? Vilket optimeringsproblem är det att finn en snabbaste rundtur? Finn en optimallösning. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (3p)

Uppgift 5

a) Berra ska leverera att antal påsar godis till en kund som ska ha barnkalas. Det måste ske omedelbart, men tyvärr får Berra inte låna bilen. Och hans cykel har punktering, så han får gå. Nedanstående graf visar de möjliga vägarna. Han ska gå från nod 1 till nod 7, och vill gå den kortaste vägen. På varje båge anges vägens längd. Hur ska han gå? Finn, med lämplig metod, den bästa vägen. (2p)



b) Det finns en skogsstig från nod 6 till nod 7. Hur lång får den vara om det ska göra vägen kortare? Vilken blir då bästa vägen? (Ledning: Använd nodpriser.) (1p)

Uppgift 6

Berra behöver fler kastruller för att koka sin kola. Då kan han göra flera sorter samtidigt. Hans gamla har fått bucklig botten (den blev för varm en gång), så den har han slängt. Hans spis har fyra plattor, så han ska inte köpa fler än fyra kastruller. Det finns två möjliga storlekar. Låt x_1 ange hur många små kastruller han ska köpa, och x_2 hur många stora. Målfunktionen speglar förväntad nytta av dem. Det först bivillkoret bygger på begränsad budget. Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 5x_1 + 8x_2 \\
\text{då} & & 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\
\text{då} & & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & & x_1 \geq 0, \text{heltal} \\
 & & x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

Uppgift 7

Berra och Laura får en jättestor beställning. De måste ta hjälp av sina vänner för att göra allt godis. De har olika erfarenheter, så det är viktigt vem som får vilket uppdrag. Det ska göras de tre sorters kolor som nämns i uppgift 1, samt basilika-mynta varianten i uppgift 3 och ny polkagrisvariant. Berra och Laura ska göra var sin sort, och vännerna Pelle, Palle och Paul ska göra de tre andra.

Berra tar fram en kostnadskoefficient för varje person och varje godissort, baserat på hur mycket sämre det kan bli om den personen gör det godiset. Han vill minimera den totala kostnaden. Raderna står för personer och kolumnerna står för olika godissorter. (Berra har höga tankar om sig själv.)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Hade optimallösningen förändrats om Berra hade varit lite mer blygsam och satt alla element till 10 i första raden? (1p)