Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	25 oktober 2023
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Rogert ska ha fest. Han planerar en trerättersmiddag, och det ska vara mycket smak. Tyvärr visar det sig att han har begränsade mängder med kryddor hemma, och han hinner inte åka och handla mer. Han vägrar göra smaklös mat, så mängden kryddor per enhet mat är given. Det betyder att det enda han kan variera är hur mycket av varje maträtt han kan göra.

Nedanstående matris visar hur mycket av varje krydda (av de han har begränsat mängd av) som ska ingå i en enhetsportion av varje rätt, och hur mycket det finns av kryddan, allt uttryckt i lämplig sort.

Krydda	Förrätt	Huvudrätt	Dessert	Tillgänglig mängd
Vitlök	2	4	0	20
Koriander	3	4	1	15
Habanero	0	5	0	17

Salt, socker och andra kryddor har han mer än tillräckligt av. Hur många enhetsportioner av de olika rätterna ska han göra? Som målfunktionskoefficienter använder han ettor, dvs. alla rätterna är värda lika mycket. Han får följande linjära optimeringsmodell.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 20 & \quad (1) \\
 & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 15 & \quad (2) \\
 & & & & 5x_2 & & & \leq & 17 & \quad (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning (även i ord) och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva, och vad betyder det? (3p)

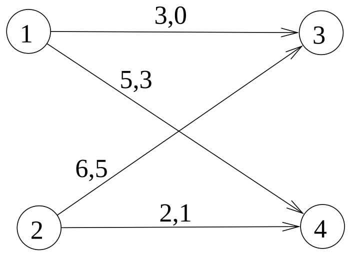
b) Rogert inser att han hade tänkt helt fel när han formulerade sin modell. Middagen blev inte alls som han hade tänkt. (Varför?) Ändra målfunktionskoefficienten för förrätten så att optimallösningen i uppgift a blir icke-unik, och gör en simplexiteration utifrån optimaltablån så att lösningen innehåller förrätt. Blir lösningen nu som Rogert vill? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Rogert kunde skaffa lite mer av någon krydda, vilket skulle han tjäna mest på? Motivera. (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Skulle en annan sorts huvudrätt som inte innehåller koriander förbättra lösningen? Motivera. (1p)

Uppgift 2

Firma Hilberts rum och möbler ska transportera stolar från två av sina affärer, nod 1 och 2 i nedanstående graf, till två kunder, nod 3 och 4. Man ska ta 3 stolar från nod 1 och 6 stolar från nod 2, och ska leverera 5 stolar till nod 3 och 4 stolar till nod 4. På bågarna i grafen anges kostnad per stol, samt föreslaget flöde. Alla bågarna har övre gräns 100.



a) Kontrollera om lösningen som anges i nätverket är optimal. Om inte, finn en optimal lösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med angivet flöde. Ange optimal totalkostnad. (2p)

b) I uppgift a skickades totalt 9 stolar från affärerna till kunderna. Nu visar det sig att kunden i nod 4 behöver en stol till, och affären i nod 1 ska skicka en till. Eftersom nu 10 stolar ska skickas räknar man med att totalkostnaden kommer att öka. (Alla kostnader är ju positiva.) Finn den nya optimallösningen. Starta från optimalbasen i uppgift a. (Dvs. ändra flödet i basbågarna, men inte i ickebasbågarna, för att få en tillåten startlösning med den extra stolen.) Ange den optimala totalkostnaden. Hur mycket ökade kostnaden på grund av den extra stolen? (2p)

Uppgift 3

Rogert ska göra glass. Han ska smaksätta den med smultron och lime. Det krävs en delikat balansgång mellan sötma och surhet för att det ska bli gott, och han känner behov av optimering. Genom idogt användande av sitt smaksinne kommer han fram till att smaken blir bäst av att minimera den olinjära funktionen $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_1 - 20x_2$, där x_1 står för mängden smultron och x_2 mängden lime. Bivillkoren blir $0 \leq x_1 \leq 3$ och $0 \leq x_2 \leq 2$ samt $x_1 + x_2 \leq 4$.

a) Extrempunkterna till det tillåtna området är (0, 0), (0, 2), (2, 2), (3, 1) och (3, 0). Rogert kräver dock att det ska vara både smultron och lime i glassen. Kontrollera om de relevanta punkterna är optimala med hjälp av KKT-villkoren. Kontrollera även om någon punkt där inga bivillkor är aktiva är en KKT-punkt. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$, 1 och 2. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 4

Elberta är på filmfestival. Det visas filmer i flera lokaler samtidigt. Hon vill planera vilka filmer hon ska se. Nedan ges en lista på filmer som hon skulle vilja se, med start- och sluttid. Om två filmer överlappar i tid kan hon inte se båda, eftersom hon bara kan befinna sig på en plats i taget, och hon vill bara se hela filmer. Målet är att se så många filmer som möjligt.

	Film	Starttid	Sluttid
1	Aja baja Alfons Åberg	17:00	17:36
2	Barbie	18:00	19:54
3	De ostyriga	20:00	22:15
4	Meg 2: The Trench	21:00	22:56
5	Mord i Venedig	19:30	21:13
6	Oppenheimer	17:30	20:30

a) Formulera problemet att hitta den bästa tillåtna kombinationen av filmer som ett linjärt optimeringsproblem med binära variabler. (2p)

b) Konstruera en oriktad graf med en nod för varje film, och en båge mellan två noder som representerar två filmer som inte båda kan ses. Vilken grafstruktur motsvarar en tillåten lösning? Finn en bra lösning genom att applicera en enkel heuristik som utnyttjar denna grafstruktur. (2p)

Uppgift 5

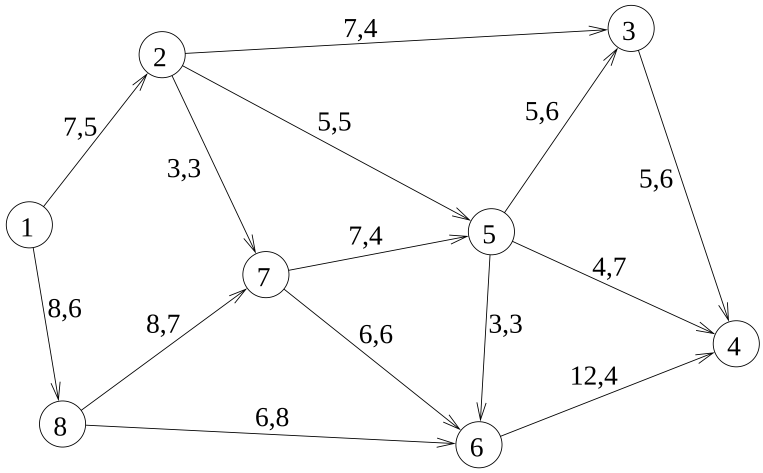
Hilberts funderar på att öppna nya affärer för försäljning av möbler. Man tänker sig två olika storlekar, antingen en större fullständig affär med fullt sortiment, eller en enklare utställningslokal med möjlighet att göra beställningar. Det förstnämnda är givetvis mycket dyrare, men ger troligen betydligt bättre försäljning. Man sätter upp följande optimeringsproblem för att finna vilken satsning som vore bäst. x_1 är antal fullskalebutiker och x_2 är antal utställningslokaler. Målfunktionen speglar förväntad vinst, baserat på skillnad mellan intäkter och kostnader. Bivillkoren bygger på begränsad budget, tillgängliga platser samt andra förutsättningar. Den gamle direktören, Hilbert senior, som snart ska gå i pension, påpekar att pengarna räcker med lite marginal till att öppna två fullstora affärer, och att man borde göra så. Hans son, Hilbert junior, vill dock undersöka om det finns någon bättre lösning.

Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Utnyttja den gamles förslag för att begränsa sökträdet. (3p)

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 10x_1 + 4x_2 \\ \text{då} & & 8x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ & & 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & & 5x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

Uppgift 6

Roine sitter och tittar på en karta över en stad långt bort och drömmer sig bort. Han konstruerar följande graf där bågarna är märkta med kostnad och kapacitet.



a) Finn billigaste väg från nod 1, hamnen, till nod 4, järnvägsstationen. Vilken kostnad får båge (6,4) ha om en billigaste väg ska gå via nod 6, parken? Motivera. (2p)

b) Antag att kapaciteterna avser hur tungt fordon man kan köra på bågen. Hur mycket väger det tyngsta fordon man kan köra från nod 1 till nod 4, och hur ska det köra? Beskriv metoden som används. (2p)

c) Antag att kapaciteterna avser en övre gräns för flödet på bågen. Finn maximalt flöde som kan skickas från nod 1 till nod 4 med standardmetod. Vilka bågar begränsar maxflödet? (Starta med flöde noll i alla bågar.) Visa varje steg i metoden tydligt. Resultatet i uppgift b får användas. (3p)

d) Antag att bågarna är oriktade och man vill finna en billigaste rundtur som passerar alla noder. Vilket optimeringsproblem är det att finna den bästa rundturen? Finn en tillåten lösning (med valfri heuristik). Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (2p)

e) Antag att bågarna är oriktade och man vill finna en billigaste rundtur som passerar alla bågar, utom båge (3,4), minst en gång. Vilket optimeringsproblem är detta? Beskriv stegen i metoden. Ange rundtur och total kostnad. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (2p)

Uppgift 7

Hilberts har öppnat fem nya försäljningsfilialer. Nu behöver man fem chefer för dessa. En urvalsprocess har resulterat i fem starka kandidater. Nu är bara frågan vem som ska jobba var. Man vill ta hänsyn till kandidaternas önskemål, samt deras lokalkännedom, och sammanställer detta till en matris med kostnader för varje person och varje filial. Därefter vill man finna den utplacering som ger den minsta kostnaden. Varje filial ska få en chef, och varje chef ska jobba på en filial. Raderna står för olika personer och kolumnerna står för olika filialer.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 4 & 8 & 7 \\ 11 & 10 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med lämplig metod. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)