Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	7 juni 2024
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

En äldre professor, här kallad PK, ska göra sin sista tenta innan pension. Hans tentor brukar börja med en simplexuppgift, och han ser ingen anledning till att ändra detta nu. Men han orkar inte göra den intressanta och ibland småroliga texten till uppgifterna. I en äldre tenta hittar han följde LP-problem, vilket han kallar P1.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrr}
\max & z = & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 200 & (1) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 180 & (2) \\
& & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 150 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

För att variera sig lite, funderar han på att ersätta "max" i problemet med "min". Låt P2 vara P1 men med minimering.

a) Lös P1 och P2 med simplexmetoden. Ange optimala primallösningar och duallösningar samt målfunktionsvärden, samt vilka bivillkor som blir aktiva. Ska han ta med P1 eller P2 i tentan? Motivera. (4p)

b) Utgå från optimallösningarna i uppgift a. Ange optimala skuggpriser, samt vad de kan användas till, för P1 och P2. (1p)

c) Skulle en ny variabel, x_7, med $c_7 = -1$ och bivillkorskoefficienterna $a_7^T = (1, 1, 0)$ ändra optimallösningen i P1 resp. P2? Motivera. (2p)

Uppgift 2

Som uppgift nummer två brukar PK ha ett minkostnadsflödesproblem. Frågan är dock hur nätverket ska se ut.

a) Han väljer en fullständig graf (har direktbåge mellan alla par av noder) med fem noder, med bågkostnaderna $c_{ij} = i+j+1$. Sedan tar han bort alla bågar med $i > j$. Fem enheter ska skickas från nod 1 till nod 5. Han sätter bågkapaciteterna till 6 på alla bågar. Alla undre gränser sätts till noll. Ange det optimala flödet. Ledning: Om man är smart behöver man inte iterera. Ett fullständigt matematiskt optimalitetsbevis behövs ej. Ett par väl valda ord räcker. (1p)

b) PK kommer på att det blir mer intressant om bågkapaciteterna sätts till tre på alla bågar. Finn på enklast möjliga sätt en tillåten startbaslösning. Lös sedan problemet ordentligt med simplex i nätverk. Ange även optimala nodpriser. (3p)

c) Utgå från nätverket och kapaciteterna i uppgift b. Hur mycket kan man maximalt skicka från nod 1 till nod 5? Ge optimalitetsbevis. (2p)

Uppgift 3

Som tredjeuppgift brukar PK ha olinjär optimering, för att testa kunskaperna i a: KKT, b: Zoutendijks metod och c: Lagrangedualitet. Ibland är det svårt att hitta siffror som gör alla tre uppgifterna intressanta. Dessutom är det ju så att om optimum finns bland de punkter som ska testas med KKT, så vet ju studenten redan vilken punkt som är optimal när de följande deluppgifterna ska lösas. PK känner sig dock lite osäker på om det är bra för studenterna att veta vilken punkt man ska komma fram till. Poängen sätts ju mer på metodberäkningarna än på att ange rätt svar. Och det är alltid några studenter som frestas att ta genvägar, dvs. inte följa metoden ordentligt, för att nå rätt punkt, vilket ger poängavdrag. Ännu värre blir det för de som räknar fel i uppgift a, och sedan gör allt för att komma till "rätt" punkt i b och c.

a) PK bestämmer sig för målfunktionen $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 20x_1 - 40x_2$. Var ligger minimum av denna funktion om inga bivillkor finns? (1p)

b) PK vill ha ickenegativitetsvillkor på båda variablerna samt ett linjärt bivillkor som skär bort punkten som är svaret i uppgift a. Det linjära bivillkoret ska ha vänsterledet $x_1 + 2x_2$, ha olikheten $\leq$, och vara aktivt i optimum. Ange ett lämpligt högerled till detta bivillkor. Origo måste vara en tillåten punkt, och det tillåtna området får inte bara vara origo. (1p)

c) Kontrollera optimalitet för alla extrempunkter i det tillåtna området, samt i en tillåten punkt där inga bivillkor är aktiva, med hjälp av KKT-villkoren. (3p)

d) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten (0, 0). Lös LP-problemen grafiskt. Illustrera varje iterationspunkt grafiskt. (3p)

e) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret som innehåller båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$ samt två positiva värden, ett för litet och ett för stort (för att ge optimalitet). Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa erhållna övre och undre gränser för det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

f) Betrakta uppgift e. Beräkna vilket värde på u som skulle ge likhet i det relaxerade bivillkoret. (1p)

Uppgift 4

Nu, tycker PK, kan det vara dags att testa kunskaperna om de oriktade versionerna av optimeringsproblemen för handelsresande (H) och brevbärare (B). Betrakta nätverket i uppgift 2a, med alla bågar oriktade. Ta bort den dyraste bågen, (4,5).

a) Finn en tillåten och billig H-tur med valfri heuristik. Beskriv heuristiken.

Finn en optimistisk uppskattning av kostnaden för den optimala turen med hjälp av en relaxation av problemet. Ange övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (2p)

b) Finn den billigaste B-turen i samma graf. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total kostnad. (2p)

Uppgift 5

PK gillar uppgifter om billigaste väg. De är lätta att göra, lätta att rätta och de flesta studenterna får poäng på dem. Det enda som möjligtvis är svårt är kopplingen till LP-dualitet.

a) Finn, med lämplig metod, den väg från nod 1 till nod 5 i nätverket i uppgift 2a som minimerar summan av kostnaderna för bågarna i vägen. Följ metoden noga. Ange totalkostnad och optimal duallösning. (2p)

b) Ange en tillåten men inte optimal duallösning till problemet ovan, och motivera svaret. (1p)

Uppgift 6

En annan klassiker är heltalsproblemet. Eftersom PK vill att LP-problemen i Land-Doig-Dakins metod ska kunna lösas grafiskt kan det bara vara två dimensioner. För dessa problem kan det vara svårt att hitta rätt svårighetsgrad. Riktigt dumt blir det om första LP-lösningen är heltal. Men det kan också lätt bli så att trädet blir alldeles för stort.

a) Lös följande problem med högerleden $b_1 = 21$ och $b_2 = 24$. Se till att trädet är avsökt. (2p)

$$
\begin{array}{rrl}
\max & z = & x_1 + x_2 \\
\text{då} & & 4x_1 + 5x_2 \leq b_1 \\
\text{då} & & 6x_1 + 4x_2 \leq b_2 \\
 & & x_1 \geq 0, \text{heltal} \\
 & & x_2 \geq 0, \text{heltal}
\end{array}
$$

b) Öka sedan b_1 så att problemet blir lite svårare att lösa med samma metod. Lös det modifierade problemet. (2p)

Uppgift 7

Ingen tenta bör sakna tillordningsproblemet, tänker PK. Det är lätt att göra instanser av detta problem. I princip bara att slumpa fram siffror i en kvadratisk matris. Fast ibland blir det för lätt. PK vill alltid ha med den andra fasen i lösningsmetoden, där man arbetar med flera rader och kolumner samtidigt.

Ett (dåligt) exempel är följande kostnadsmatris.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Lös tillordningsproblemet med ovanstående kostnader med lämplig metod. Ange optimal lösning. Ange även dual optimallösning. (2p)

b) Modifiera ett fåtal siffror i matrisen, så att den andra fasen i lösningsmetoden krävs. Lös sedan tillordningsproblemet. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. (2p)