

# Grön optimering

Kaj Holmberg

med bidrag av Lars Eriksson, ISY,  
och Michael Patriksson, Chalmers

VT 2012

Matematiska Institutionen  
Linköpings tekniska högskola  
581 83 Linköping

4 oktober 2012

## Förord

Detta är ett kompendium om *grön optimering*, dvs. optimering som främjar miljön och bidrar till hållbar utveckling. Materialet förutsätter grundläggande kunskaper i optimering, som t.ex. kan inhämtas från boken “Optimering” av Kaj Holmberg, Liber, 2010.

Innehållet kan ses som ett antal fallbeskrivningar, med problembeskrivning, i vissa fall den matematiska modellen, information om hur modellen kan lösas och till sist något om resultatet. Materialet är hämtat från flera olika källor, och min huvudsakliga insats har varit att beskriva det hela på en lämplig nivå.

Målet med detta kompendium är att visa, genom exempel, att optimering kan användas för att främja miljön och bidra till hållbar utveckling. Detaljerna i modeller och metoder är i detta sammanhang mindre viktiga, och utelämnas därför i många fall, speciellt då de skulle göra presentationen överskådlig och svårgenomträngbar.

Jag tackar Lars och Michael för deras bidrag.

Synpunkter på framställningen, speciellt stav- och sakfel, mottages tacksamt, [kaj.holmberg@liu.se](mailto:kaj.holmberg@liu.se).

Kaj Holmberg  
Linköping 110321

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Grön optimering</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Laddbar hybrid-elbil</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Vindkraftverk</b>	<b>4</b>
3.1	Utbyte av gamla vindkraftverk . . . . .	4
3.2	Utbyte av delar i vindkraftverk . . . . .	6
3.3	Jas och vindkraftverk . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Ressträckor för handelsresande</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Design av försörjningskedja</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Olika vägar</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Placering av en oönskad anläggning</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Val av scenarior för miljökatastrofplanering</b>	<b>12</b>
<b>9</b>	<b>Minimering av bränsleåtgång för tunga lastbilar</b>	<b>13</b>
<b>10</b>	<b>Fordonsruttning för att minimera utsläpp</b>	<b>14</b>
<b>11</b>	<b>Intelligent trafikflöde</b>	<b>15</b>
<b>12</b>	<b>Grön logistik</b>	<b>15</b>
<b>13</b>	<b>Habitatnätverksgenomsläpplighet</b>	<b>16</b>
<b>14</b>	<b>Dimensionering av bussflotta</b>	<b>17</b>
<b>15</b>	<b>Snöröjning</b>	<b>18</b>
<b>16</b>	<b>Framtidens gruvor</b>	<b>19</b>

<b>17 Ytterligare problem</b>	<b>20</b>
17.1 Dubbdäck . . . . .	20
17.2 Hastighetsbegränsning . . . . .	21
<b>18 Några utvalda exempel från fordonsbranschen</b>	<b>22</b>
18.1 Introduktion . . . . .	22
18.1.1 Samspel mellan samhällets lagstiftning och fordon . . . . .	22
18.2 Åkeriets optimeringsproblem . . . . .	23
18.3 Optimering i lastbilsfarthållare . . . . .	23
18.4 Optimering av motorstyrningsparametrar . . . . .	24
18.5 Ingenjörrens vardagsverktyg . . . . .	24
<b>19 Ruttplanering för hemtjänsten i Torslanda</b>	<b>25</b>
<b>Referenser</b>	<b>27</b>

# 1 Grön optimering

Optimering, dvs. optimeringsmodeller och lösningsmetoder, är ett allsidigt och generellt verktyg. Man kan också se optimering som ett neutralt verktyg, dvs. metoderna fungerar lika bra oavsett vad det övergripande målet är. Man kan maximera vinst, minimera tidsåtgång, maximera effekten av vissa vapeninsatser eller minimera den skadliga effekten på miljön. Optimering som egen vetenskaplig disciplin föddes (troligen) under andra världskriget, och de första publikationerna kom i slutet av 40-talet och i början av 50-talet. Gissningsvis var de första tillämpningarna av krigisk natur. Många tekniska framsteg har gjorts under krigssituationer, men det betyder inte så mycket för den fortsatta användningen av tekniken. Så även för optimering. Man kan använda optimering för egen privat vinning, för att bekämpa sina fiender, för företagets bästa, för samhällets bästa eller för nästan vilket mål som helst. Ur en rent metodteknisk synvinkel är det ointressant vad de olika koefficienterna i problemet egentligen står för.

Å andra sidan täcker den rent metodtekniska synvinkeln en ganska liten del av vad optimering egentligen är. Det är *tillämpningarna* som gör optimering användbart och intressant. Det är inte verktygslådan i sig som är intressant, inte heller hammaren eller skruvmejseln, utan allt det nyttiga och fina man kan göra med verktygen.

Ju mer avancerat ett verktyg är, desto mindre trivialt är det att använda det. Vad man kan göra är att ge olika *exempel* på tillämpningar där optimering har använts på ett framgångsrikt sätt. Man har en viss situation som beskrivs med en matematisk modell, som löses med en lämplig metod. Därefter tar man hand om resultatet på olika sätt i praktiken.

Lyckade tillämpningar av optimering på t.ex. företagsmässig vinstoptimering blir dock ofta sekretessbelagda av företaget. Man vill inte berätta exakt hur man gjorde för att tjäna mycket pengar, och ofta inte ens hur mycket man tjänade. Militära tillämpningar blir också, av ganska uppenbara skäl, hemligstämplade.

Vårt intresse ligger här inte inom dessa områden, utan inom det miljömässiga området. Vi vill här ge exempel på hur optimering kan användas för att bidra till en *hållbar utveckling* samt att förbättra (eller undvika att försämra) miljön. Vi kallar detta *grön optimering*.

I boken "Optimering", Holmberg (2010), kan man läsa allmänt om modellering (hur man definierar variabler, bivillkor och målfunktion) och om operationsanalys (den något bredare bilden). Låt oss dock påminna om att varje optimeringsmodell är en förenkling av verkligheten. Förhoppningsvis är de detaljer man utelämnar av mindre vikt, dvs. påverkar inte nämnvärt den optimala lösningen. Man måste dock alltid ta ställning till de förenklingar som görs, och vara beredd på att ompröva detta val.

Vi kommer nu att beskriva ett antal olika fall, hämtade från olika källor.

## 2 Laddbar hybrid-elbil

Vår första tillämpning handlar om en laddningsbar elbil av hybridtyp, på engelska “plug-in hybrid electric vehicle”, PHEV, även kallad *laddhybrid*. Det är en bil med både elmotor och bensinmotor, med möjlighet att byta mellan olika funktionssätt. (Beteckningen elmaskin är egentligen bättre än elmotor, eftersom batteriet kan laddas upp vid inbromsning.) Det är möjligt att ladda batteriet via ett vanligt eluttag. Fullständig laddning av batteriet tar då flera timmar, och görs exempelvis på natten, när bilen står stilla i garaget. Man kan även ladda batteriet vid speciella laddstationer, och då går laddningen snabbare. Det tar dock fortfarande betydligt längre tid än att fylla på bensin, så man gör inte gärna detta medan man står och väntar. Vi tänker oss endagsutflykter, med laddning innan körturen, och ingen extern laddning under färden.

Det finns ett par olika funktionssätt för hybridmotorn:

1. Bara el.
2. Bara bensin.
3. Blandad, behåller laddningen.
4. Blandad, laddningen minskar i bestämd takt.

Funktionssätt 1 kan användas tills batteriet är tomt, dvs. tills laddningen understiger en viss nedre gräns. Funktionssätt 2 kan alltid användas, men undviks helst. Funktionssätt 3 innebär att både el och bensin används. Batteriet laddas automatiskt upp vid inbromsningar, och batteriets laddning hålls hela tiden inom ganska snäva givna gränser. Detta alternativ använder alltså precis så mycket bensin som behövs för att hålla laddningen uppe. Funktionssätt 4 innebär en annan blandning av el och bensin. Batteriets laddning minskar, men inte så fort som i alternativ 1. Det går åt bensin, men inte så mycket som i alternativ 3.

Eftersom man enkelt kan fylla på bensin, beaktar vi inte möjligheten att bensinen tar slut. Det handlar istället om att använda batteriets laddning så “optimalt” som möjligt. Målet är att batteriets laddning ska räcka precis till färden, och ta slut när man kommer fram. Om man gör slut på laddningen för tidigt, så måste man använda mycket bensin under resten av färden. Om man inte använder batteriets laddning helt, innebär det att man har använt för mycket bensin. Ett grundläggande antagande är att bensin är mycket “dyrare” än el, speciellt när man tar hänsyn till miljön.

Eldrift är bättre än bensindrift vid färd med låg hastighet och om det är många start och stopp. Typexempel är stadstrafik, speciellt om det förekommer köer som gör att bilen blir helt stillastående då och då.

För att optimera funktionen under en färd, krävs det att man vet hur färden ska gå. Vi antar därför att man känner till startpunkten och slutpunkten, samt vet precis vilken väg bilen ska ta mellan dessa punkter.

I detta läge kan man välja två olika huvudspår, kontinuerligt olinjärt eller diskretiserat linjärt. Vi väljer det senare.

Vi delar alltså upp sträckan som ska köras i små delar, där varje del kan anses ha konstanta egenskaper. Delarna behöver inte vara lika långa. En längre sträcka med 70 km/h som hastighetsgräns, i princip utan trafik hinder och backar, kan ses som en homogen del. I

städer är dock en finare uppdelning motiverad.

Självklart innebär diskretiseringen en approximation, dvs. att små fel införs i modellen. Vi kommer därför inte att få den exakt optimala lösningen, utan bara en lösning som är ganska nära optimum (näroptimal). Problemet är dock så svårt att det måste ses om omöjligt att finna exakt optimum. Felet som uppstår av diskretiseringen beror på hur stora delar man delar upp vägen i. Ett fåtal delar ger en mindre modell med större fel, medan ett stort antal mindre delar ger bättre lösning, men samtidigt en mycket större modell, som tar längre tid att lösa. Valet av diskretiseringspunkter måste vara en avvägning av dessa två effekter. (En olösbar modell är inte användbar.) Vi ska här inte gå in mer på hur uppdelningen ska göras.

Antag nu att vi har en given diskretisering, så att vår väg består av ett större antal homogena delar. Varje del har vissa egenskaper, lutning, förväntad medelhastighet, mängd störande trafik, samt sannolikheter för andra störningar. Dessa egenskaper kan omvandlas till olika effekter vid de olika funktionssätten för framdrivningen.

Man kan alltså beräkna hur mycket bensin som går åt vid de olika funktionssätten för varje del av vägen, och likaså hur mycket av laddningen av batteriet som går åt. Vi byter inte funktionssätt inom en vägdel, utan bara i punkterna mellan delarna.

Ett dynamiskt lösningssätt är det som känns mest naturligt. Antag att man står inför den sista delen av vägen, och vet precis hur mycket laddning man har kvar i batteriet. Då är det enkelt att avgöra hur den sista delen ska köras. Om man betraktar den näst sista delen av vägen, och vet hur den sista delen ska köras, kan man bestämma hur den näst sista ska köras. Detta kan upprepas iterativt baklänges.

Detta leder till en lösningsmetod av dynamisk programmeringstyp. Vi bygger upp en stegindelad acyklisk graf där varje nod motsvarar en viss plats på vägen (mellan två delar) och en viss laddning av batteriet (diskretiserat till vissa nivåer).

Att köra en viss vägdel med ett viss funktionssätt innebär en förflyttning framåt ett steg på vägen, men också att förändring av batteriets laddning. Dessutom uppstår en viss kostnad (i bensin).

Man inför *alla* dessa bågar, vilket modellerar alla möjligheter att ta sig från startpunkten till slutpunkten. Därefter finner man helt enkelt den billigaste vägen från startpunkten till slutpunkten. Denna väg ger lösningen.

Problemet beskrivs översiktligt i Fairley (2009).

### 3 Vindkraftverk

Det finns många intressanta optimeringsproblem rörande vindkraftverk. Här beskrivs några av dem.

#### 3.1 Utbyte av gamla vindkraftverk

Det finns numera många vindkraftsparker, dvs. grupper av relativt tätt belägna vindkraftsverk. Den tekniska utvecklingen har lett fram till större och effektivare vindkraftverk. Samtidigt har en del gamla vindkraftverk slitits, och behöver repareras eller bytas ut.

Denna fråga diskuteras i Rydh, Jonsson, och Lindahl (2004), där man noterar att gamla vindkraftverk kan leverera 150–600 kW, medan nya kan ge 1–2 MW. Ett nytt kan alltså ge samma effekt som flera gamla. Mycket talar alltså för att man ska byta ut gamla vindkraftverk mot nya. En möjlighet som nämnts är att skicka de gamla vindkraftverken till u-länder.

Om de nya vindkraftverken var av precis samma storlek som de gamla, kunde man bestämma vilka som ska bytas ut genom att titta på ett i taget (så länge som budgeten inte spräcks). Men de nya vindkraftverken är större än de gamla, i vissa fall betydligt större. Detta betyder att man kan behöva ta bort flera gamla för att få plats med ett nytt.

Vi antar nu att man inte beaktar andra placeringar än de som redan använts. För varje plats där det nu står ett vindkraftverk har vi då möjligheten att låta det stå kvar, att ta bort det och inte sätta dit något nytt eller att ta bort det och sätta dit ett nytt i någon av de storlekar som finns.

Målfunktionen är att maximera den erhållna effekten av hela vindkraftsparken. Dessutom finns ett budgetbivillkor, dvs. kostnaden får inte överstiga en viss gräns.

Den matematiska modellen blir som följer. Antag att det i varje position,  $i = 1 \dots n$ , står ett vindkraftverk av storlek 1, den äldre storleken. Låt  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  vara platserna där vindkraftverken behöver bytas ut. De olika storlekarna betecknas med  $k = 1, \dots, m$ , där  $2, \dots, m$  är de nya storlekarna. (Vi kan alltså inte konstruera ett nytt vindkraftverk av storlek 1, de nya måste vara av minst storlek 2.) Vi har även de kända koefficienterna  $a_{ijk}$  som är 1 om en placering av ett vindkraftverk i position  $i$  av storlek  $k$  omöjliggör en placering av något vindkraftverk i position  $j$  (och 0 annars). (Vi vet bl.a. att  $a_{ij1} = 0$  för alla  $i \neq j$ .)

Låt  $c_k$  vara kostnaden att uppföra ett vindkraftverk av storlek  $k$ , och  $d$  kostnaden att ta bort ett av de gamla vindkraftverken. Låt  $b$  beteckna den tillåtna budgeten, och  $f_k$  den effekt som fås av ett vindkraftverk av storlek  $k$ . Vi definierar nu variablerna  $x_{ik} = 1$  om ett vindkraftverk av storlek  $k$  ska finnas på position  $i$ .

Först noterar vi att högst ett vindkraftverk kan placeras på varje position, vilket ger följande bivillkor.

$$\sum_{k=1}^m x_{ik} \leq 1.$$



Om  $x_{ik} = 1$  så får inget vindkraftverk finnas i de positioner  $j$  där  $a_{ijk} = 1$ , dvs.  $x_{jk} = 0$  för alla  $k$  om  $x_{ik} = 1$  och  $a_{ijk} = 0$ . Detta kan skrivas som

$$\sum_{k=1}^m x_{jk} \leq 1 - \sum_{k=1}^m a_{ijk} x_{ik} \quad \text{för alla } i, j.$$

(Här kan man notera att  $\sum_{k=1}^m a_{ijk} x_{ik} \leq 1$  p.g.a. det först bivillkoret, så högerledet blir aldrig mindre än noll.) Om man låter det gamla vindkraftverket stå kvar, säger detta bivillkor inget.

De gamla vindkraftverken som måste tas bort ger bivillkoren  $x_{i1} = 0$  för alla  $i \in I$ .

Kostnaden för att ta bort ett vindkraftverk uppstår då  $x_{i1} = 0$ , så den summerar till

$$\sum_{i=1}^n d(1 - x_{i1}) = dn - \sum_{i=1}^n dx_{i1}.$$

Kostnaden för att sätta upp ett vindkraftverk summerar till

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^m c_k x_{ik}.$$

Detta gör att budgetbivillkoret blir

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^m c_k x_{ik} + dn - \sum_{i=1}^n dx_{i1} \leq b,$$

vilket kan skrivas om som

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^m c_k x_{ik} - \sum_{i=1}^n dx_{i1} \leq b - dn.$$

Den totala effekten som fås av vindkraftparken blir

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f_k x_{ik}.$$

Den matematiska modellen blir nu sammanfattningsvis

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f_k x_{ik} \\ \text{då} \quad & \sum_{k=1}^m x_{ik} \leq 1 \quad \forall i \quad (1) \\ & \sum_{k=1}^m x_{jk} + \sum_{k=1}^m a_{ijk} x_{ik} \leq 1 \quad \forall i, j \quad (2) \\ & x_{i1} = 0 \quad \forall i \in I \quad (3) \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^m c_k x_{ik} - \sum_{i=1}^n dx_{i1} \leq b - dn \quad (4) \\ & x_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \quad (5) \end{aligned}$$

Detta problem bör kunna lösas med en effektiv kod för heltalsproblem, eftersom storleken är ganska begränsad. För 50 positioner och 10 storlekar fås 2500 variabler.

Givetvis kan man byta plats på målfunktionen och bivillkor 4, dvs. minimera kostnaden och ha ett bivillkor som ger en undre gräns för den totala effekten.

### 3.2 Utbyte av delar i vindkraftverk

En något annorlunda frågeställning gäller utbyte av utslitna delar i vindkraftverk. Vi ska diskutera två möjligheter, det första som är planerat utbyte, där man byter ut enheter när de uppnår en viss ålder, och den andra, där man byter ut enheter då de går sönder.

Det andra fallet innehåller ingen intressant optimering om man bara byter ut den enhet som gått sönder. Men man kan fundera på om man ska byta ut flera enheter vid samma tillfälle. Det uppstår nämligen en stor fast kostnad vid utbyte av någon detalj, främst eftersom man måste forsla dit en hög och tung kran, som kanske befinner sig långt borta. Ofta krävs flera dagars transport av kranen.

Därför kan det vara lönsamt att byta ut flera detaljer när kranen ändå är på plats. Det är detta som optimeringsmodellen ska fånga.

När det gäller första fallet, så är problemet liknande. Då anser man att varje detalj har en bestämd livslängd, och måste bytas ut (senast) då den uppnår en viss ålder. Om ingen fast kostnad uppstår, är det sannolikt optimalt att byta varje enhet precis då dess livslängd är slut.

Men oftast uppstår fasta kostnader, som som beskrives ovan, som gör att det kan vara värdefullt att byta flera detaljer samtidigt.

Om man antar att alla delarna har en känd livslängd, kan man sätta upp ett optimeringsproblem i många tidssteg, som planerar utbytesstrategin för alla delarna på en gång fram till en viss tidshorisont.

En annan möjlighet, som vi inte kommer att beröra här, är att man använder stokastik för att modellera enheterna livslängd. Detta betyder att man utgår från vissa sannolikhetsfördelningar som för varje tid anger sannolikheten att enheten går sönder just då. Vi kommer som sagt dock inte att beröra stokastisk optimering här.

Ett deterministiskt alternativ är att man modellerar sannolikheterna med kostnader som varierar över tiden. Man inför en fiktiv kostnad som ökar då enheten blir äldre. Istället för att ha en kostnad som är noll till en viss känd tidspunkt, och därefter bli väldigt stor, kan man låta kostnaden stiga gradvis, allt eftersom enheten blir äldre och sannolikheten att den går sönder ökar.

En sådan kostnadsfunktion blir naturligt konvex. Om man gör en diskretisering av tiden, dvs. bara har vissa tidpunkter som möjliga bytestider, kan den konvexa kostandskurvan ersättas av en styckvis linjär funktion, vilket är lätt att modellera.

Den matematiska modellen innehåller dels binära variabler för om en viss enhet bytes vid en viss tidpunkt eller ej, samt andra binära variabler som anger om någonting överhuvudtaget bytes på en viss plats eller ej.

Målfunktionen är att minimera kostnaden för alla byten under en viss tidsperiod.

Låt oss börja med en enkel modell för ett vindkraftverk (eller för flera på samma plats). Vi har  $n$  komponenter och  $T$  tidsperioder. Att byta del  $j$  kostar  $c_j$  och att överhuvudtaget påbörja något arbete kostar  $d$ . Antag att  $T_j$  är den kända livslängden för komponent  $j$ .

Variabeldefinition:  $x_{jt} = 1$  om komponent  $j$  byts vid tidpunkt  $t$ , och 0 om inte.  $z_t = 1$  om något överhuvudtaget byts vid tidpunkt  $t$ .

Först får vi bivillkor som ger rätt värde på  $z$ .

$$x_{jt} \leq z_t \text{ för alla } j, t.$$

Detta bivillkor ser helt enkelt till att  $z_t = 1$  om  $x_{jt} = 1$  för något  $j$ .

Nästa bivillkor ser till att komponenten byts innan den går sönder. Den måste bytas en gång under tidsperioderna 1 till  $T_j$ . Därefter måste den bytas igenom inom nästa sekvens om  $T_j$  perioder, osv. Detta åstadkommes av bivillkoren

$$\sum_{t=l+1}^{l+T_j} x_{jt} \geq 1 \text{ för } l = 0, \dots, T - T_j \text{ och alla } j.$$

Detta bivillkor säger att komponenten byts minst en gång under varje sekvens av  $T_j$  tidsperioder. Observera att bivillkoret inte förhindrar att man byter för ofta. Detta kommer målfunktionen att se till.

Kostnaden blir

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_i x_{it} + \sum_{t=1}^T dz_t$$

Den fullständiga modellen blir nu helt enkelt

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n c_i x_{it} + \sum_{t=1}^T dz_t \\ \text{då} \quad & x_{jt} \leq z_t \quad \forall j, t \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{t=l+1}^{l+T_j} x_{jt} \geq 1 \quad l = 0, \dots, T - T_j \quad (2)$$

$$x_{jt} \in \{0, 1\} \quad \forall j, t \quad (3)$$

$$z_t \in \{0, 1\} \quad \forall t \quad (4)$$

Denna modell är ett ganska enkelt exempel på fasta kostnader, vilket gör att man tjänar på att samordna aktiviteter.

Bivillkor (3) kan relaxeras från heltalskrav till ickenegativitet, eftersom bivillkorens enkla struktur gör att  $x$  automatiskt blir heltal om  $z$  är det.

En utvidgning av ovanstående modell fås om man betraktar flera områden. Detta ger direkt ett ytterligare index på variablerna. Man får då även ta ställning till om det finns fördelar av att byta komponenter på två närliggande platser i samma tidsperiod. Detta kräver troligen att man inför en nätverksstruktur, baserad på platsernas geografiska placering.

Modelleringen av de fasta kostnaderna blir då mer komplicerad.

Man kan även tänka sig en mer detaljerad modellering av de fasta kostnaderna baserade på var de olika komponenterna sitter i vindkraftverket. Komponenter som sitter precis bredvid varandra kan bytas för samma fasta kostnad, medan att byta två komponenter som sitter långt från varandra kanske bara ger en viss kostnadsfördel.

Optimeringsproblem av denna typ diskuteras i Besnard, Patriksson, Strömberg, Wojciechowski, och Bertling (2009), samt mer generellt i Wojciechowski (2010) och Andréasson (2004). Problemet dyker även upp för kärnkraftverk, vilket beskrivs i Nilsson, Patriksson, Strömberg, Wojciechowski, och Bertling (2009).

### 3.3 Jas och vindkraftverk

På senare tid har Försvaret kommit fram till att de stora snurrande propellrarna på vindkraftverk kan förvirra radarn på flygplanet Jas. Det är oklart vad som kan hända (förhoppningsvis ser inte planet vindkraftverket som en fiende och skjuter ner det), och det verkar som Försvaret inte tror att man kan bygga bort problemet genom tekniska förändringar av flygplanet.

Därför kräver man nu i princip att alla vindkraftverk inom en radie av 40 km kring flygplatser som trafikeras av Jas tas bort, eller åtminstone att inga nya byggs där. (Man har börjat med att hitta flera fall där det formella godkännandet från Försvaret för att bygga vindkraftverket inte tycks finnas, och kräver att dessa ska ta bort.) Detta innebär en stor försämring när det gäller alternativa källor för elenergi i Sverige.

Om parterna (Försvaret och vindkraftverksägarna) kunde enas, kunde man sätta upp ett optimeringsproblem som finner en blandning av omallokering av Jas och förflyttning av vindkraftverk. Om parterna inte kan enas (vilket verkar vara fallet), hamnar frågan snarare hos regeringen, som måste avgöra vilka intressen som är viktigast. Traditionellt har Försvaret alltid haft sista ordet, men frågan är inte riktigt besvarad än. Dock tror inte jag att regeringen sätter upp en optimeringsmodell för detta beslut. Här finns två tydliga kännetecken på ett problem som kanske inte passar för att angripas med optimering: 1. Bakomliggande politiska aspekter som inte låter sig formuleras matematiskt. 2. Den ena sidan (Försvaret) är en välorganiserad part, medan den andra består av många olika aktörer, i vissa fall enskilda individer, som vill bygga vindkraftverk.

## 4 Ressträckor för handelsresande

Många företag har s.k. *handelsresande* (säljare) som reser runt och marknadsför och säljer deras produkter, vilket kräver mycket resande med bil för de dagliga kundbesöken. Detta resulterar i kostnader för företagen, dels i form av reseersättningar och dels i form av miljöförstöring, speciellt koldioxidutsläpp. Många företag är eller vill bli certifierade enligt miljöledningssystem ISO 14001, vilket ses som en värdefull merit, så miljöarbetet blir allt viktigare.

Företaget ScanTech har beräknat att affärsresorna utgör den allra största delen av företagets miljöföroreningar. Koldioxidutsläppen har ökat de senaste åren, och detta är en

konsekvens av att säljarnas resande har ökat. Därför är det av yttersta vikt att hålla resandet nere.

För att begränsa de miljöskadliga effekterna, har man beslutat beräkna gränser för säljares "mileage", dvs. hur mycket en säljare får köra. Dessa gränser baseras på speciella egenskaper för varje säljares distrikt.

Det är viktigt att säljarna planerar sina resor strategiskt, så att onödiga turer undviks. Minskade resor ger minskade utsläpp av avgaser, vilket ger minskade kostnader och positiva miljöeffekter.

Man betraktar en månads resande och använder en uppskattning av hur många gånger varje kund besöks. Man har 25 distrikt i Sverige, och varje säljare har ett distrikt. En säljare besöker bara ett fåtal kunder per dag, och återvänder hem på kvällarna.

Man vill alltså beräkna en gräns för resandet under en månad för varje distrikt, baserat på kundernas geografiska placering i distriktet relaterat till säljarens hemstad.

Man ska implementera en metod för att beräkna de turer varje säljare kör vid sina kundbesök. Målet är dock inte att i detalj styra hur varje säljare ska köra; det vill man fortfarande låta säljarna bestämma. Målet är istället att beräkna vilken sträcka som behövs för att göra kundbesöken, och sedan genom att lägga till en liten marginal, få gränser för hur mycket man får köra. Tanken är någon sorts målstyrning, där säljarna själva skall finna de turer som ger en riklig körsträcka.

Om en säljare hann med att besöka alla kunder under en dag, dvs. en tur, så skulle problemet vara ett normalt *handelsresandeproblem*, vilket beskrivs i detalj i Holmberg (2010). Nu handlar det istället om att dela upp besöken på de olika dagarna. Man får då något som i litteraturen kallas det *periodiska handelsresandeproblemet* (PTSP).

I detta problem lämnar säljaren hemorten, besöker minst en kund, och återvänder sedan hem. Detta upprepas varje arbetsdag. (I det aktuella fallet hinner en säljare med att besöka 4 - 10 kunder på en dag.) Problemet syftar till att bestämma vilka kunder som ska besökas varje dag, och i vilken ordning de ska besökas under en dag, så att kunderna besökes önskat antal gånger och reskostnaden minimeras. Man måste också ha bivillkor som begränsar det resta avståndet under en dag.

En matematisk modell kan formuleras, baserad på standardmodellen för handelsresandeproblem med subtursförbudande bivillkor, men utvidgad i flera tidsperioder och med vissa extravillkor. Om man har bestämt vilka kunder som ska besökas av varje säljare varje dag, återstår bara ett vanligt handelsresandeproblem för varje säljare och varje dag.

Att lösa detta problem med en effektiv exakt heltalsprogrammeringskod, CPLEX, visade sig ta alldeles för lång tid. Exakt lösning av detta problem verkar inte vara möjligt inom realistisk tid. Istället användes en konstruktiv heuristik för att bygga upp tillåtna turer, följt av lokalsökning och en genetisk algoritm för att förbättra lösningen. Metoden genererar bra lösningar i form av realistiska turer.

För fler detaljer, se examensarbetet "Computation of Milage Limits for Traveling Salesmen by Means of Optimization Techniques", Torstensson (2008).

## 5 Design av försörjningskedja

Företaget Lantmännen (division Spannmål) hanterar raffinering och försäljning av spannmål. Verksamheten beskrivs i examensarbetet "Supply Chain Network Design at Lantmännen from a Cost and Environmental Perspective", Raba (2008). Modellen inkluderar bondgårdar, silos och kunder, och behandlar transporter mellan dessa. Lantmännen funderar på att lägga ner en silo, men är då inte säkra på att transportkapaciteten räcker till. Man funderar därför på att börja använda järnväg för transporterna. Examensarbetets syfte är att ta reda på om detta är lönsamt.

Dessutom står Lantmännen för 1% av Sveriges totala lastbilstransporter under ett år, vilket är ungefär 9 miljoner ton per år. För att minska avgasutsläpp och verka för en hållbar utveckling, planerar man dels att satsa på s.k. EcoDriving. se kapitel 9, och dels att öka användandet av järnvägstransporter.

Modellen är i grunden ett flervaruflödesproblem, se sida 304 i Holmberg (2010), men med tidsuppdelning samt olika typer av lastbärare, såsom lastbil, båt och järnväg. En typisk variabeldefinition är  $x_{ijkt}$  lika med mängd av spannmålssort  $i$  som skickas från bondgård  $j$  till silo  $k$  under tidsperiod  $t$  med lastbil. (Flera andra variabler av denna typ finns.) Dessutom definieras lagret av spannmålssort  $i$  i silo  $k$  under tidsperiod  $t$  som variabel.

Det finns bivillkor som ser till att allt som ska skickas verkligen skickas på något sätt, och att de olika begränsningarna på transporterna uppfylls. Varje silo har en begränsad kapacitet. För järnvägstransporter finns ytterligare bivillkor, bl.a. som begränsar kapaciteten för på- och avlastning.

Målfunktionen innehåller dels summan av alla transportkostnader och dels summan av alla  $CO_2$ -utsläpp från transporterna. (Vi ger inte fler detaljer för modellen här.)

Modellen löstes för data från 2007 med året uppdelat i tolv tidsperioder, för ungefär södra halvan av Sverige och 27 varusorter. Detta gav en LP-modell med över 5 miljoner variabler och 300 000 bivillkor. Det tog 8 minuter att lösa den med AMPL och CPLEX.

Slutsatser var att järnvägstransporter är gynnsamma för miljön, man kan spara upp till 45% i  $CO_2$ -utsläpp med bara 15% i kostnadsökning. Att stänga ner en silo kan ge någon procent kostnadsökning och ökade utsläpp på 3-7%. Man påpekar dock att dessa resultat är bara en del av de faktaunderlag som behövs för att fatta beslut.

## 6 Olika vägar

När man ska transportera farligt material måste man beakta olycksrisken. Om en olycka sker, kan farligt material spridas och orsaka skador på miljö och människor. Oftast finner man bara en väg, när man söker en i någon aspekt optimal väg. Om denna väg inte anses bra av praktiska skäl, kan man söka efter annan väg, t.ex. den näst billigaste vägen. Om man använder samma målfunktion är det dock troligt att vägarna har många båggar gemensamt. Ibland är man dock intresserad av att finna ett par, helt olika, vägar, dvs. vägar som inte har en enda bågga gemensamt.

Om t.ex. den väg man initialt tänkt använda är olämplig p.g.a. dåligt väder, t.ex. halka

p.g.a. kraftigt snöfall eller snabbt sjunkande temperatur, så vill man finna en helt annan väg. Om syftet är att hitta en alternativväg som ska användas om den bästa vägen blir obrukbar på grund av vägarbete eller olyckor (och man inte vet vilken länk som blir obrukbar), vill man givetvis inte att alternativvägen ska sammanfalla med den bästa vägen till stora delar.

En annan situation är att den farliga transporten skall upprepas många gånger. I ett sådant fall vill man sprida riskerna. Om man använder samma väg gång på gång, ökar ju risken att en olycka sker längs denna väg. Därför vill man använda helt skilda vägar, så att varje vägsträcka får samma låga risk.

Ett problem som är enkelt att lösa är att finna de två billigaste vägarna. Man formulerar då problemet som ett minikostnadsflödesproblem, precis som billigaste vägproblemet, men med skillnaden att man skickar *två* enheter från startnoden till slutnoden, och att alla bågar har övre gränsen ett. Detta ger *bågdisjunkta* vägar, dvs. vägar som använder olika bågar. Se avsnitt 12.3 i Holmberg (2010). Dock kan vägarna mötas i ett flertal noder, vilket kanske inte är önskvärt.

En matematisk modell för att få *noddisjunkta* vägar (dvs. som inte har något nod gemensamt, förutom startnoden och slutnoden) är relativt enkel att formulera i graftermer. Man kan notera att alla noddisjunkta vägar också är bågdisjunkta.

Man kan gå ett steg längre, och kräva att vägarna uppfyller vissa andra krav på "olikhet", t.ex. att noderna på de två vägarna ligger långt från varandra. Ett relaterat problem är det s.k.  $p$ -spridningsproblemet, där man ska välja ut  $p$  punkter ur  $m$  punkter, så att det minimala avståndet mellan två valda punkter maximeras. Dessa problem är betydligt svårare att lösa.

För detaljer, se Agkün, Erkut, och Batta (2000), där man går igenom flera möjliga metoder av olika typ och jämför dem. Följande heuristiska metoder nämns.

En metod går ut på att man finner billigaste väg, och sedan ökar kostnaden på alla bågar som ingår i billigaste vägen, och finner på nytt en billigaste väg. Detta upprepas tills man funnit önskat antal vägar. Svårigheten här ligger i att bestämma hur mycket man ska öka bågkostnaderna. Ökas de för lite, kanske vägarna blir för lika. Ökas de för mycket, kan nästa väg bli för dyr (i de ursprungliga kostnaderna).

En annan metod är att kräva att den billigaste vägen går genom en viss nod (kallad "gateway"). Om man väljer en helt annan gateway, fås troligen en annan väg. Detta upprepas för varje väg. Denna metod tycks vara starkt baserad på det geografiska, och fungerar troligtvis bäst halvmanuellt där man visuellt väljer gateway på en karta.

En tredje metod finner först de  $k$  billigaste vägarna, med en känd metod. Denna mängd av vägar är troligen ingen bra lösning, eftersom de kan vara väldigt lika. Ur denna mängd av vägar väljer man ut de mest olika enligt vissa regler. Man tillåter även en viss modifiering av vägarna, för att de ska bli mer olika.

## 7 Placering av en önskad anläggning

Ett standardproblem inom optimering är lokalisering av anläggningar. Se Holmberg (2010), sida 32 för fallet då anläggningarna kan placeras i vissa diskreta punkter, och sida 46 för fallet då de kan ligga var som helst i planet.

Ibland måste man finna en geografisk placering av en anläggning som ingen vill ha i närheten, en s.k. önskad anläggning. Det kan t.ex. vara en anläggning som sprider dålig lukt. Man kan då formulera en matematisk modell som minimerar den totala avskyn (motviljan) hos invånarna i regionen, medan man tar hänsyn till vissa miljömässiga aspekter som gör vissa områden olämpliga för anläggningen. Modellen blir kontinuerlig, men icke-konvex, och kan ses som en specialvariant av det generella lokaliseringsproblemet. Modellen anses lämplig för fallet där anläggningen är obehaglig, men inte är direkt farlig för människor.

Detaljer återfinnes i Fernández, Fernández, och Pelegrín (2000). Där används följande formel för den motvilja (“repulsion”) som en placering av anläggningen i position  $x$  ger för plats  $a_i$ :

$$rp(a_i, x) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha_i + \beta_i d(a_i, x))}$$

där  $d(a_i, x)$  är avståndet från  $x$  till  $a_i$  och  $\alpha_i$  och  $\beta_i$  är konstanter som beräknas specifikt för varje plats. Optimeringsproblemet är helt enkelt att minimera den totala motviljan.

$$\min \sum_i w_i rp(a_i, x)$$

där  $w_i$  anger hur viktig plats  $a_i$  är. (Om platserna är städer, kan  $w_i$  vara lika med antalet invånare i stad  $i$ .)

Problemet är inte konvext. För varje plats har den totala motviljan ett lokalt maximum där  $x = a_i$ . Lösningmetoden är baserad på uppdelning av den aktuella geografiska regionen, och kan ses som en trädsökningsmetod.

## 8 Val av scenarior för miljökatastrofplanering

När man beaktar möjligheten av en miljökatastrof, är det brukligt att man konstruerar ett fåtal scenarior, som sedan analyseras i detalj, så att man får maximal information om alla möjliga skador. Sådana undersökningar är ofta mycket dyra, så man har inte råd att undersöka för många scenarior.

I Jenkins (2000) betraktar man ett plötsligt utsläpp av en katastrofal kvantitet av ett miljögift. Genom att beakta ett begränsat antal olika miljögifter, dela upp området i ett ändligt antal zoner och dela upp året i ett fåtal tidsperioder, kan ett ändligt antal katastrofer definieras. Ur denna mängd av katastrofer kan man välja ut ett fåtal, som om de undersöks i detalj, kan ge information som är relevant för alla möjliga katastrofer. Detta kan ske med hjälp av en heltalsmodell med målfunktionen att maximera likheten mellan ett fåtal utvalda katastrofer och den totala mängden.

Modellen är ganska enkel. Vi har ett (stort) antal möjliga katastrofer,  $j = 1, \dots, n$ , och ska



välja ut några ur en kandidatmängd,  $k = 1, \dots, q$ . Låt  $z_k = 1$  om kandidatkatastrof  $k$  ska tas med.

Som indata har vi  $p_j$  som är sannolikheten för katastrof  $j$ ,  $s_{jk}$  som är likheten mellan katastrof  $j$  och kandidat  $k$ , och  $K$  som är det maximala antalet utvalda kandidatkatastrofer. Om kandidat  $k$  tas med, ska man räkna med  $s_{jk}$ , annars inte. Därför behövs hjälpvariablerna  $x_{jk} = 1$  om likhet  $s_{jk}$  ska räknas med. Modellen blir

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_k \sum_j p_j s_{jk} x_{jk} \\ \text{då} \quad & \sum_k z_k \leq K \\ & \sum_k x_{jk} \leq 1 \quad \forall j \\ & x_{jk} \leq z_k \quad \forall j, k \\ & 0 \leq x_{jk} \leq 1 \quad \forall j, k \\ & z_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \end{aligned}$$

Denna modell löstes för ett exempel med oljespill från fartyg på en större flod (i Kanada). Man fann att det mest arbetsamma var inte att lösa modellen, utan att beräkna indata. För 84 möjliga spill, krävs beräkning av 3486 värden för  $s_{jk}$ . Att lösa denna modell går oftast på ett fåtal sekunder. En slutsats var att detta angreppssätt är bäst om man vill välja ut ett fåtal kandidatkatastrofer.

## 9 Minimering av bränsleåtgång för tunga lastbilar

Många lastbilar (långtradare) är mycket tunga i förhållande till motorstyrkan, vilket ger stora variationer i hastighet i backar. Det är mycket energikrävande att accelerera fordonet. De flesta chaufförer tar hänsyn till detta genom att planera körningen så att man undviker behov av snabba och onödiga fartändringar. Man försöker helt enkelt förutse vad som kommer att hända och planerar genom att försöka hålla bästa hastighet på fordonet med tanke på den närmaste framtiden.

Givetvis kan oväntade saker hända, och t.ex. utlösa oplanerade tvärbromsningar etc. Det är dock svårt att förutse och ta hänsyn till alla sådana möjligheter på ett metodiskt sätt. Troligen utgör en van förares erfarenhet och vaksamhet det bästa sättet att hantera helt oväntade situationer.

Det finns dock utrymme för förbättring även när det gäller kända aspekter, såsom vägens lutning etc. Genom att öka hastigheten *innan* man kommer fram till en uppförsbacke, kan en jämnare hastighet erhållas. Detta ger minskad bränsleåtgång och minskade utsläpp av avgaser.

Därför finns ett intresse för att finna den optimala planen för en känd vägsträcka. Genom att använda kunskap om hur vägen ser ut kan man göra viss optimering i en dator i bilen, försedd med en GPS-enhet. Målfunktionen är att minimera energikonsumtionen.

I de två licenciatavhandlingarna "Fuel Optimal Powertrain Control for Heavy Trucks Utilizing Look Ahead", Ivarsson (2009), och "Look-ahead Control of Heavy Trucks utilizing Road Topology", Hellström (2007), behandlas detta problem. Speciellt visas värdet av den-

na optimering. Försök visar att man kan minska bränsleåtgången utan att öka restiden. Antal växlingar har också reducerats. Den nerväxling som ofta används i praktiken är oftast inte optimal. Det visar sig också att det inte är optimalt att helt enkelt försöka hålla konstant hastighet.

Denna problematik diskuteras även i kapitel 18.

## 10 Fordonsruttning för att minimera utsläpp

Optimeringsproblemet att finna rutter för fordon som ska starta i en depot och åka runt och leverera last till flera olika kunder på olika platser är ganska välkänt. Det som skall bestämmas är vilka kunder de olika lastbilarna skall besöka, och hur de skall köra runt bland de utvalda kunderna. (Jämför med problemet i avsnitt 4.) Man vill oftast minimera kostnaden för att utföra uppdragen, och det blir ofta samma sak som att minimera total körd sträcka.

Om man istället tittar på miljön, och vill minimera de avgasutsläpp som turerna ger, blir problemet något annorlunda. Man måste då ta hänsyn till hastigheten, eftersom en högre hastighet ger högre utsläpp (på ett olinjärt sätt).

Detta studeras i artikeln “Emissions Minimization Vehicle Routing Problem”, Figliozzi (2009). Där ges följande formel för sambandet mellan utsläpp och hastighet, givet av “Transport Research Laboratory”. Volymen av utsläpp från ett fordon som körs från kund  $i$  till kund  $j$  fås som

$$v_{ij} = \sum_{l=0}^p (\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 d_{ij}^l / (s_{ij}^l)^2)$$

där  $l$  står för tidsintervall,  $s_{ij}^l$  är hastigheten och  $d_{ij}^l$  är sträckan. Konstanterna  $\alpha$  beror på biltyp, och för en viss biltyp har man  $\alpha_0 = 1,576$ ,  $\alpha_1 = -17,6$ ,  $\alpha_2 = 0.00117$  och  $\alpha_3 = 36,067$ .

Kostnaden för utsläppen blir  $c_e v_{ij}$ , där  $c_e$  är enhetskostnaden för utsläpp.

I den matematiska modellen uppträder då följande olinjära term i målfunktionen.

$$\sum_k \sum_{(i,j)} c_e x_{ij}^k v_{ij}$$

där  $x_{ij}^k$  är antalet fordon av typ  $k$  som kör på länk  $(i, j)$ .

Förutom detta, ingår vissa standardbivillkor i modellen, som ser till att man inte lastar för mycket på någon lastbil, att alla kunder besöks, att turerna startar och slutar i depån, samt nodjämviktstvillkor, liknande de i flervarufödesproblemet som ges på sida 304 i Holmberg (2010). Dessutom kan man ha tidsvillkor på besöken hos kunderna. Vi ger inte alla dessa detaljer här.

## 11 Intelligent trafikflöde

Kontrollen av trafikljus påverkar trafiken och dess utsläpp väldigt mycket. I sämsta fall fås långa köer med bilar och en ryckig körning med många bilar som stannar och startar upprepade gånger, vilket ger stora avgasutsläpp. Det är bättre om samordnade trafikljus ger en jämn och lugn trafikrytm. Det svåra är givetvis att åstadkomma detta för flera gator samtidigt.

I den engelska staden Leicester försöker man utnyttja ett befintligt system, kallat Star Trak, som håller reda på var stadens bussar befinner sig, och meddelar detta till passagerarna via elektroniska tavlor vid busshållplatserna.

Bussarnas placering och rörelser ger även information om det generella trafikflödet, speciellt om det är trafikstockningar. Man kan även använda satellitdata och data från sensorer på marken för att skapa en bild av trafiksituationen och hur mycket luftföroreningar man har just då. Detta kan sedan användas för att beräkna hur trafiksituationen kan se ut om en halvtimme eller en timme, samt vilka förändringar som är önskvärda.

Detta används sedan för att beräkna hur trafikljusen ska optimeras, för att undvika trafikstockningar.

Man funderar också på att låta resenärer få SMS till sina mobiltelefoner om hur bussarnas situation är, hur mycket väntetid som återstår innan bussen kommer, samt om en annan buss (dvs. annan linje) skulle komma fram till målet snabbare.

Detta beskrivs i en artikel benämnd "Intelligent traffic flow" i [WWW.THEENGINEER.CO.UK](http://WWW.THEENGINEER.CO.UK) den 17:e februari 2010.

## 12 Grön logistik

Området *grön logistik* handlar om att producera och distribuera gods på ett hållbart sätt, medan man tar hänsyn till miljön och sociala faktorer. I översiktsartikeln "Combinatorial optimization and Green Logistics", Sbihi och Eglese (2010), beskrives flera olika problem inom området.

Man diskuterar bl.a. ett område som kallas "reverserad logistik", ("Reverse Logistics") som behandlar en produkts hela livslängd, speciellt hur produkter återanvänds eller kastas på ett lämpligt sätt.

Ett annat område är avfallshantering, som innehåller många möjliga optimeringsproblem. Farligt avfall ger speciellt viktiga problem.

Mycket handlar om ruttplanering, där man bestämmer hur fordon ska köra när de levererar varor etc. Arbete som pågår handlar om att ändra målinriktning, från att som tidigare minimera tiden för att utföra tjänsterna, till att minimera avgasutsläppen för att göra jobbet. Istället för att räkna med högsta möjliga hastighet, får man ta med hastigheten som en beslutsvariabel.

Ett annat aktuellt område är att ta hänsyn till trafikstockningar i planeringen. Man fun-

derar också på att införa trafikstockningsmotiverade biltullar, vilket kräver att man tar fram procedurer för att bestämma biltullarna.

En generell slutsats är dock att mycket kan vinnas på förbättrad planering. På hemsidan WWW.GREENLOGISTICS.ORG fins mycket intressant om detta.

## 13 Habitatnätverksgenomsläpplighet

När man bygger vägar, bygger nya stadsdelar eller utvidgar jordbruksområden, styckas landskapet upp i delar. Djur som lever i naturen kan då få svårt att ta sig fram på det sätt de gjorde innan förändringen. Detta kan påverka många djurarter på ett mycket negativt sätt. Vissa djurarter kan inte överleva utan tillräckliga "habitat", dvs. levnadsområden. Man har observerat reducerad genetisk diversitet (inavel) hos isolerade populationer.

Naturreservat kan hjälpa till att sakta ner fragmenteringen av landskapet, men ibland kan reservaten vara för små för att säkra vissa arters långtidsöverlevnad. Speciellt större däggdjur har visat sig ha svårt att ha tillräckligt stor och varierad population utan tillräckligt stora habitat.

Man kan då studera problemet att minimera nya anläggningars negativa påverkan på djurlivet. Ett sätt är att installera korridorer för djuren, som tillåter djur att ta sig mellan annars isolerade områden. Sådana korridorer kan vara viadukter, broar och tunnlar. Dessutom kan man använda viltstängsel kring motorvägar och järnväg för att styra in djuren mot korridorerna.

Eftersom tillgången av pengar för sådana aktiviteter alltid är begränsad, är det viktigt att satsa på de mest verksamma åtgärderna.

Även om man inte bygger nya korridorer, kommer naturliga sådana att uppstå. Djuren kommer att försöka ta sig över vägar mer på vissa ställen än på andra. I sådana fall föreligger dock tyvärr ganska stor sannolikhet att djuret blir påkört av en bil.

Man kan studera detta som ett grafproblem, där de olika områdena är noder, och korridorerna som länkar samman olika områden är bågar. Detta har gjorts i artikeln "Integer programming for optimization habitat network permeability", Billionnet (2010), och där återfinnes följande resonemang.

Om man betraktar en individ av en art som befinner sig i ett visst område,  $i$ , kan följande hända. Efter en tid bestämmer sig individen för att använda korridoren  $(i, j)$  för att försöka komma till område  $j$ . Med en viss sannolikhet ger individen upp försöket och återvänder till startområdet. Annars påbörjar individen försöket, och löper då viss risk att bli överkörd och dödad. Om detta inte händer, klarar individen sig, och når område  $j$ .

Ett nätverks genomsläpplighet mäts genom att summera varje individs förväntade tillryggalagda avstånd inom en korridor innan individen dör, då man låter en individ starta i varje område.

Detta kan modelleras i en matematisk optimeringsmodell på följande sätt. Sätt  $x_{ijk} = 1$  om utbyggnadsalternativ  $k$  genomförs i korridoren  $(i, j)$ . (Man kan låta utbyggnadsalternativ 1 betyda ingen utbyggnad.)

Den lätta delen av modellen är att se till att budgeten inte överskrids,

$$\sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} \leq B$$

(där  $c_{ijk}$  är kostnaden för alternativ  $k$  för korridor  $(i, j)$ ), att ett alternativ används för varje korridor,

$$\sum_k x_{ijk} = 1 \text{ för alla } i, j,$$

samt att enbart hela utbyggnadsalternativ används,

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \text{ för alla } i, j, k.$$

Det krångliga är att få fram ett linjärt uttryck för nätverkets genomsläpplighet. Med hjälp av de sannolikheter som nämnts ovan, samt ett resonemang om Markovkedjor, lyckas man få fram bivillkor som innehåller en produkt av  $x$  och en kontinuerlig variabel.

Eftersom  $x$  är binära, kan man dock linjärisera detta, och får en linjär heltalsmodell. Man har löst modellen för upp till 10 områden, 15 korridorer och 7 utbyggnadsalternativ, vilket tog upp till 3 minuter med CPLEX. Med några extravillkor tog det 20 minuter, och man bedömer att större problem inte kan lösas till optimalitet, utan föreslår istället heuristiker.

Andra studier har använt Steinerträdsproblemet för att modellera system av korridorer, och har i ett fall använt angreppssättet för att bestämma korridorer för grizzlybjörnar i norra USA.

## 14 Dimensionering av bussflotta

Många länder privatiserar sin kollektivtrafik och släpper in privata aktörer i bl.a. busstrafiken. Man ställs då inför problemet hur man ska hantera upphandlingar. Detta diskuteras i artikeln "Environmental evaluation of public procurement for bus transports", Lidestam och Abrahamsson (2010), där man siktar in sig på de miljömässiga effekterna av busstrafiken. Låt oss här inte fokusera på upphandlingsaspekterna, utan studera den modell i artikeln som kan användas för att dimensionera en bussflotta, dvs. välja vilka bussar som ska användas.

Vi har ett antal olika busstorlekar,  $k$ , hållplatser,  $i$ , och linjer,  $j$ . Målet är att använda så små bussar som möjligt, eftersom detta är mest gynnsamt för miljön, dvs. avgasutsläppen blir så små som möjligt för den givna transporterade mängden resenärer.

Variablerna är  $x_{ijk} = 1$  om busstorlek  $i$  används från hållplats  $k$  till nästa hållplats på linje  $j$ . Modellen för att minimera  $CO_2$ -utsläppen blir som följer.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j \sum_k a_{jk} h_i x_{ijk} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i p_i x_{ij1} \geq e_{1j} \quad \forall j \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_i p_i x_{ijk} - \sum_{k=1}^{k-1} e_{kj} + \sum_{k=1}^k r_{jk} \geq e_{kj} \quad \forall j, k \geq 2 \quad (2)$$

$$x_{ijk} - x_{ijk-1} = 0 \quad \forall k \geq 2, \forall i, j \quad (3)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k \quad (4)$$

där

$h_i$  = CO<sub>2</sub>-utsläpp i kg per km från busstyp  $i$ .

$a_{kj}$  = avståndet från hållplats  $k$  till nästa hållplats på linje  $j$ .

$e_{kj}$  = antal personer som går på bussen vid hållplats  $k$  på linje  $j$ .

$r_{kj}$  = antal personer som går av bussen vid hållplats  $k$  på linje  $j$ .

$p_i$  = kapaciteten hos busstyp  $i$  i antal sittplatser. (Vi förutsätter att alla passagerare sitter ned.)

Bivillkor (1) och (2) ser till att alla får plats på bussen. Om det är möjligt att låta bussar starta vid en senare hållplats och köra till slutet av linjen, blir bivillkor 3 istället  $x_{ijk} - x_{ijk-1} \geq 0 \quad \forall k \geq 2, \forall i, j$ .

Man har löst modellen för regionen Skaraborg, vilket gav följande problemstorlek. Linjer: 103, varianter: 664, tidsperioder: 2059, antal busstyper: 7, hållplatser: 2037, antal personer som går på (av) bussarna: 34312. Detta gav en modell med 388680 binära variabler och 501731 bivillkor. Den har lösts med hjälp av de generella verktygen AMPL och CPLEX.

Modellen har lösts under olika extrabegränsningar, motsvarande krav som kan ställas vid upphandlingen, och man har då funnit att vissa krav ökade CO<sub>2</sub>-utsläppen tydligt. Detta indikerar att man ur miljösynpunkt inte bör ställa dessa krav. Den viktigaste slutsatsen är inte precis vilka krav man inte bör ställa, utan att denna matematiska modell kan användas för att evaluera olika krav. På detta sätt kan man undvika att göra miljömässiga misstag vid upphandlingar.

## 15 Snöröjning

En viktig verksamhet i nordliga länder är snöröjning samt relaterade aktiviteter såsom vägsaltning, vägsandning samt upptagning av sand på våren. Här förutsätter nästan allmänheten att det ska skötas på ett perfekt sätt. Annars uppkommer otaliga klagomål.

Snön måste snabbt och effektivt avlägsnas från gator, cykelvägar, trottoarer, busshållplatser, torg mm. Först ska den plogas åt sidan, för att senare (om det kommer mycket snö) förflyttas till uppläggningsplatser, där den inte är i vägen.

Det finns många knepiga optimeringsproblem. Ett är dimensioneringen av fordonsparken. Hur många snöplogar behöver man? Behovet varierar ju väldigt mycket. Under vissa perioder under vintrarna 2010 och 2011 har det funnits behov av ett mycket stort antal fordon, medan under vissa andra vintrar har det knappt behövs några.

Ett annat problem är att bestämma hur fordonen ska köra. Det handlar om optimerings-

problem i grafer, dvs. trafiknät, och frågan är när och i vilken ordning de olika vägavsnitten ska åtgärdas och av vilket fordon. De fordon som utför snöröjning förbrukar mycket bränsle och ger ganska stora utsläpp av avgaser. Om de kör fram och tillbaka onödigt mycket, fås en avsevärd negativ miljöpåverkan.

Här kan man se kopplingar till brevbärrarproblem, eftersom man har ett antal vägsträckor som alla ska röjas. Det hela är lite krångligare, för de flesta gator plogas inte bara en gång, utan tre, först i mitten, därefter högersidan och vänstersidan. Mitten måste göras före de andra två. Man måste också göra viss röjning av vändplatser och finputsning av korsningar, och det kan ske först efter det att anslutande gator har röjts. Det är inte absolut nödvändigt att samma fordon gör alla dessa uppgifter på en viss gata, men i praktiken är det oftast så. Det finns alltså vissa krav på ordningen av de olika uppgifterna.

Andra komplicerande faktorer är att man ofta har flera olika fordon, som går olika fort och kan göra olika saker. Om man ska göra detaljerade planer och också har krav på att vissa fordon inte får plats på samma vägsträcka samtidigt och att det tar mer tid att vända ett fordon än att fortsätta rakt fram, blir modellen mycket mer komplex.

Problemen blir olika beroende på om man studerar snöröjning i städer eller på landsbygden. Man brukar också skilja på fallen att röja under pågående snöfall eller efter avslutat snöfall. Under pågående snöfall måste man återvända till redan röjda vägar och upprepa röjningen. Något förenklat handlar det om att hitta bra rundturer (cykler) för fordonen, som de sedan ska upprepa gång på gång. Snöröjning under pågående snöfall i landsbygd behandlas i doktorsavhandlingen Razmara (2004).

Som tur är slutar det alltid att snöa någon gång. Efter avslutat snöfall behöver varje uppgift bara göras en gång. När alla uppgifter är gjorda, är man färdig. Målfunktionen är ofta att allt ska vara färdigt efter så kort tid som möjligt. Man kan även tänka sig att minimera den sträcka man kör utan att röja (för att komma till andra platser där det ska röjas), eller minimera avgasutsläppen.

Flera olika aspekter på dessa optimeringsproblem diskuteras utförligt i artiklarna Perrier, Langevin, och Campbell (2006a), Perrier, Langevin, och Campbell (2006b), Perrier, Langevin, och Campbell (2007a), Perrier, Langevin, och Campbell (2007b). Snöröjning i städer behandlas i Perrier, Langevin, och Amaya (2008).

Sammanfattningsvis kan man säga att det är komplexa optimeringsproblem som knappast kan lösas till exakt optimalitet. Därför är olika heuristiker av stort intresse. Just nu pågår ett arbete där vi utvecklar dylika heuristiker på uppdrag av Linköpings kommun. Våra lösningar ska utvärderas i samarbete med de entreprenörer som nu utför snöröjningen.

## 16 Framtidens gruvor

I vanliga gruvor gräver man fram mineraler och utvinnet metaller ur dem, vilket är dyrt och tidskrävande. Å andra sidan har priserna på vissa metaller stigit, och gruvdriften (t.ex. i norra Sverige) inbringar väldigt mycket pengar. (Man ha t.ex. råd att flytta en stad, Kiruna, för att komma åt mera mineraler.)

Gruvdrift är ett välkänt område för optimering, där man bestämmer var man ska gräva,

när man ska gräva och i vilken ordning.

Nu har man kommit på att det finns stora mängder koppar och andra metaller nedgrävda i marken, t.ex. uttjänt kopparkabel som har använts för telekommunikation etc. Tidigare har man inte ansett det vara värt besväret eller kostnaden att ta bort kablar som inte används längre. Nu är kanske saken i ett annat läge.

Metaller ovan jord tas oftast om hand, t.ex. när hus rivs. Men det under jord har man hittills inte rört.

En undersökning har visat att det bara under Norrköping finns minst 650 ton urkopplad kopparkabel. Det kan jämföras med att kopparskrot i dag kostar cirka 60 kronor/kilo. Där finns ett uttjänt likströmsnät, stadsgasledningar, urkopplade växelströmsledningar, ledningar till nedlagda industrier och spårvagnslinjer, gamla fjärrvärmerör och mycket mera.

Det kan även finnas en oanvänd potential på soptippar, dvs. deponier, där man lagrar sådant som inte brytes ner. Där uppstår inte kostnaden i att gräva, utan mer i att hitta var det värdefulla finns. Det finns ungefär 6000 kommunala deponier i Sverige, och man tror att det finns minst 13 miljoner ton metaller i svenska deponier.

Man kan även undersöka askdeponier, dvs. aska från avfallsförbränning, för att hitta värdefulla material.

Frågan är helt enkelt var man ska gräva fram/leta fram metaller. Man måste först ta reda på var det finns, och bedöma dess värde. Därefter får man ett optimeringsproblem som kan lösas.

I det område som kallas "Urban mining" ser man staden som gruva, i "Landfill mining" handlar det om att ta tillvara det som finns lagrat på deponier.

Ibland kan man passa på att plocka upp kabel, bland annat gamla kraftkablar, när man ska gräva på dessa ställen av andra anledningar.

I optimeringsproblemet finns kommersiella hänsyn, men det är också viktigt att ta med miljöhänsyn. Dels skapar utvinningen avgaser och andra miljöproblem, men man får även lägre koldioxidutsläpp om materialet tas tillvara på bästa sätt.

## 17 Ytterligare problem

Låt oss nu nämna några få optimeringsproblem som antingen inte har lösts i litteraturen eller där man tydligt ser att mer kan göras. (Har du någon idé om något mer som borde stå här, kontakta Kaj.)

### 17.1 Dubbdäck

Varje bilförare har ett val mellan dubbdäck och vinterdäck utan dubbar. Dubbdäck ger bättre väggrepp på snö och is, men sliter upp farliga partiklar om man kör på ren asfalt. Vinterdäck är mer miljövänliga, men är slirigare vid riktigt vinterväglag. Det svåra är att jämföra dessa effekter, t.ex. genom att omvandla dem till kostnader.



Myndigheterna kan välja att förbjuda dubbdäck på vissa gator. På detta sätt kan man minska mängden farliga partiklar i luften. Nackdelen är att risken för olyckor troligen ökar något. Dessutom kanske trafiken minskar något på dessa gator, för att istället öka på andra. Ytterligare en effekt är att vissa bilister kan känna sig tvingade att köpa nya dubbfria vinterdäck.

Det svåra i den här situationen är att jämföra dessa olika effekter. Med hjälp av trafikmodeller kan man uppskatta trafiken på gatorna, och därmed beräkna den totala ändringen i farliga partiklar. Frågan är hur man jämför denna långsiktiga hälsoeffekt med de utgifter för nya däck som drabbar individerna och olycksriskerna som inträffar inom ett betydligt kortare tidsperspektiv. Det är alltid kontroversiellt att sätta pris på miljö och människors hälsa.

## 17.2 Hastighetsbegränsning

När det gäller vägtrafik, finns numera flera olika möjligheter när det gäller hastighetsbegränsning. Dels kan man ha hastighetsbegränsningar på alla hela multiplar av 10 (inte bara 20, som tidigare). Dels kan man ha dynamiska hastighetsbegränsningar, dvs. elektroniska vägmärken som kan ändras. I Stockholm sänker man t.ex. hastighetsbegränsningarna på in- och utfarterna när man har trafikstockningar eller andra trafikproblem. Man kan då tänka sig att sätta upp en optimeringsmodell för att bestämma de optimala hastighetsbegränsningarna för varje vägsträcka.

Aspekter som då bör tas med i beräkningen är olycksfallsrisk, ljudnivå vid omgivande bostadsområden och utsläpp av miljöfarliga avgaser. Å andra sidan, för att inte det ska bli optimalt att sätta alla hastighetsgränser till noll, bör man beakta den ökade tiden för transportarbetet. Troligen åsamkas samhället någon typ av kostnader om de transporter som måste göras (t.ex. varuleveranser och resor till och från arbetet) tar längre tid.

## 18 Några utvalda exempel från fordonsbranschen

Av Lars Eriksson, Fordonssystem, ISY.

### 18.1 Introduktion

Det finns och kommer alltid att finnas ett behov av transporter samtidigt som transportererna har en direkt påverkan på vår lokala och globala miljö, där den lokala påverkan kommer direkt från fordonsutsläppen och den globala påverkan exemplifieras av både koldioxidutsläpp och det faktum att fordonen förbrukar jordens begränsade råvaror. Fordonsområdet är ett utmärkt område att välja miljörelaterade optimeringsexempel från, eftersom det är intressant ur ett samhällsperspektiv och eftersom det har mycket uppmärksamhet i media och miljödebatten.

#### 18.1.1 Samspel mellan samhällets lagstiftning och fordon

Samverkan mellan miljöaktörer i samhället är alltför komplext för att kunna täckas i denna kortfattade text och ett urval måste göras. Urvalet här är gjort med syftet att ge en enkel och rättfram bild av hur spelreglerna ser ut för fordonstillverkarna när man tittar på ett fordons miljöpåverkan i form av bränsleförbrukning och utsläpp.

Lagstiftningen för fordon sätter begränsningar på hur mycket utsläpp ett fordon får generera i en väl specificerad certifieringsprocedur. Utsläppen som man reglerar är kolmonoxid  $CO$ , kolväten  $HC$  (vilket är ett samlingsnamn för alla oförbrända kolväten), kväveoxider  $NO_x$  (vilket är ett samlingsnamn på  $NO$  och  $NO_2$ ), samt partiklar (eller sot). Bensin- och dieselmotorernas utsläpp skiljer sig markant, och det tre första är stora för bensinmotorn medan de två sista är stora för dieselmotorn. En intressant aspekt är att det kostar att rena utsläppen från motorn, så att det billigaste alternativet är att inte göra något, men då uppnår man inte emissionsmålen. Därför är emissionskraven hårda och man får inte sälja ett fordon om det inte uppfyller kraven.

Dessa begränsningar på utsläpp blir därför naturliga bivillkor när man formulerar designen som ett optimeringsproblem och man kan förenklat säga att designen av ett fordon går ut på att ställa in sina designparametrar  $x$  så att bränsleförbrukningen  $m_b$  (massa bränsle) minimeras utan att man överskrider gränserna för emissionerna. Detta kan skrivas som

$$\begin{aligned} \min \quad & m_b(x) \\ \text{s.t.} \quad & CO(x) \leq Limit_{CO} \\ & HC(x) \leq Limit_{HC} \\ & NO_x(x) \leq Limit_{NO_x} \end{aligned}$$

När motorn och fordonet har designats och står hos kund så finns det inte några direkta möjligheter att påverka utsläppen, utan man jobbar då med att minimera bränsleförbrukningen. Fyra exempel på optimeringsproblem på olika nivåer kommer att ges:

- Det först exemplet (på högsta nivån) behandlar ett företags flotta av fordon och transportuppdraget som de har.

- Det andra exemplet tittar på förbrukningsoptimering för ett enskilt fordon i ett transportuppdrag.
- Det tredje exemplet används ett optimeringsproblem för att bestämma styrsystemparametrar.
- I det sista exemplet används ett minstakvadratproblem för att bestämma modellparametrar.

Som gemensamt tema för alla dessa problem har vi bränsleförbrukningen. När man pratar om bränsleförbrukning så pratar man också om  $CO_2$ -utsläpp. Om man har valt ett bränsle, så är bränsleförbrukning och  $CO_2$ -utsläppen direkt relaterade till varandra. Ett sätt att påverka detta utsläpp är att välja alternativa bränslen, men detta skall vi inte gå in på i denna text, utan nöjer oss med att notera att om vi gör ett bra jobb att minimera bränsleförbrukningen så kommer detta att vara till nytta för fordonsägaren, oavsett om fordonet körs på vanligt bränsle eller alternativa bränslen.

## 18.2 Åkeriets optimeringsproblem

Ett större åkeri har ett antal lastbilar  $y_i$  och ett antal transportuppdrag  $x_i$ . Vi antar att alla transportuppdragen kan och skall lösas och optimeringsproblemet som man då vill lösa är att minimera kostnaden för dessa transportuppdrag. Målfunktionen för detta problem summerar kostnaderna för alla lastbilarna som kör och tar även in löner, bränslekostnader, och eventuella andra kostnader. Den viktigaste miljöaspekten här är minimeringen av bränslekostnaden vilken är en avsevärd del. Av en lastbils totala kostnad så är ca 1/3 bränslekostnad, eftersom detta är en rörlig kostnad så spelar den en stor roll.

Frågor som man får svar på är t.ex. hur många lastbilar måste man köra? Vilka laster skall gå på vilka lastbilar?

## 18.3 Optimering i lastbilsfarthållare

I detta exempel tittar vi hur man skall köra ett fordon från punkt A till punkt B (sträckan  $s$ ) på en given tid  $t$  för att minimera bränsleförbrukningen, då man känner till höjdprofilen. Man tillåter alltså att fordonets hastighet sänks och höjs. Med standardantaganden på motorns bränsleförbrukning och fordonskonfiguration, kan man med hjälp av optimal styrning visa några intressanta saker:

1. Om man klarar av att köra fordonet på högsta växeln och hålla konstant hastighet uppför och nedför alla backar så är det den optimala strategin.
2. Om man sänker hastigheten så kommer bränsleförbrukningen att sjunka, tills det går så sakta att man måste växla till en lägre växel för att köra fordonet. (Detta är anledningen att man lägger in bivillkor på tiden.)

Nu kan man fråga om detta är intressant, eftersom lösningarna verkar så enkla. Svaret är att det detta är ett mycket intressant problem för lastbilar eftersom de inte klarar av att hålla konstant hastighet uppför och nedför backarna. Dessa optimeringsproblem har lösts och de har nämnts i tidigare avsnitt.

## 18.4 Optimering av motorstyrsystemparametrar

Optimering av styrsystemparametrar sker innan produktion och i det läget så kan styrsystemparametrarna  $x$  påverka utsläppen och bränsleförbrukningen. Problemet som man löser under designen är helt analogt med det som beskrevs i introduktionen, dvs vi vill minimera bränsleförbrukningen utan att överskrida bränsleförbrukningsgränserna

$$\begin{aligned} \min \quad & m_b(x) \\ \text{s.t.} \quad & CO(x) \leq Limit_{CO} \\ & HC(x) \leq Limit_{HC} \\ & NO_x(x) \leq Limit_{NO_x} \end{aligned}$$

I många fall lägger man ibland till extra bivillkor som skall fånga att fordonet inte skall bete sig ryckigt och nervöst utan ge snabbt svar då föraren trycker på gasen. Man brukar ibland kalla detta för körkänsla. Oavsett vad man gör så får detta inte påverka de totala utsläppen, men eftersom vi nu lägger till fler bivillkor så kan detta påverka bränsleförbrukningen negativt.

## 18.5 Ingenjörrens vardagsverktyg

Minstakvadratproblem är ett standardverktyg som används när man skall bygga modeller. Ett exempel är när man skall bygga en modell för hur en motor genererar moment (i princip kraften som driver fordonet framåt) som funktion av bränslet som man sprutat in i motorn. När man bygger modellen så samlar man in ett antal datapunkter,  $N$  st, där de enskilda punkterna indexeras med  $i$ . Mellan varje datapunkt har man varierat motorns driftsparametrar (exempelvis gaspedalsläge  $u_i$ , motorvarvtal  $N_i$ , bränsleinsprutning  $m_{b,i}$ ) och mäter momentet  $Meas_i$  sedan ställer man upp en modell  $M(u_i, x)$  där man ofta har okända parametrar  $x$ . För att bestämma de okända parametrarna  $x$  i modellen så ställer man upp ett minstakvadratproblem enligt följande

$$\min \sum_{i=1}^N (Meas_i - M(u_i, N_i, m_{b,i}, x))^2$$

där man minimerar med avseende på parametrarna  $x$ .

Detta var några kortfattade exempel på hur optimeringsproblem används i fordonsindustrin.

## 19 Ruttplanering för hemtjänsten i Torslanda

Av Michael Patriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers.

I ett examensarbete, Sellman (2005), utfört under år 2005 av Carl-Peter Sellman vid Göteborgs Universitet och med Michael Patriksson, Chalmers, som handledare, studerades ett intressant problem som uppkom under ett pågående miljöprojekt hos stadsdelsförvaltningen i Torslanda och i samarbete med dåvarande Vägverket. Målet för miljöprojektet var att minska den miljöpåverkan som uppstår på grund av stadsdelsförvaltningens transporter. Bland delprojekten finns t.ex. en kartläggning av personalens resvanor, personalutbildning i "Eco-driving" och halkkörning, byte till miljöfordon m.m.

Hemtjänsten är dagtid indelad i två geografiska områden, "Norr" och "Söder", med olika geografiska utgångspunkter samt olika antal vårdtagare, anställda och fordon. Hemtjänsten är vidare indelad i två verksamhetsgrenar, "Hemtjänst" och "Städ", där "Städ" består av en person i respektive område. Dessutom finns en kvällspatrull med samma geografiska utgångspunkt som norra gruppen, men som täcker både norra och södra området. Under vecka fyra år 2005 fördelade sig antalet anställda, fordon och vårdtagare som i nedanstående tabell. Idag fungerar varje område och gren som enskilda, isolerade planeringsorganisationer utan en organiserad gemensam planering. Planeringen sker med hjälp av telefon, penna, papper, dagbok samt i viss mån Microsoft Excel och ser olika ut för alla grupper. Gemensamt gäller för norra och södra gruppen att planeringen sker en gång på morgonen samt en gång vid lunch och tar mellan femton och trettio minuter.

Område/Verksamhet	Anställda	Fordon	Vårdtagare
Norr/Hemtjänst	10	4	25
Söder/Hemtjänst	11	3	77
Norr/Städ	1	1	6
Söder/Städ	1	1	12
Kväll/Hemtjänst	4	4*	28

\*) Dessa fordon är desamma som används av norra gruppen.  
Kvällspatrullen använder två av dessa.

Tabell 1: Antal anställda, fordon och vårdtagare.

Kvällspatrullen gör en liknande planering när de går på sitt skift men "Städ" har ett mera fast schema och behöver inte planera så ofta. När planeringen sker försöker man intuitivt att "optimera" rutterna genom att ta hänsyn till vårdtagarnas geografiska läge samt vårdbehov och på så sätt pussla ihop arbetsfördelning och samåkning.

Vid bedömningen av vårdbehovet hos en blivande vårdtagare används ett tjugotal fördefinierade vårdmoment. Bedömningen resulterar i en vårdplan som specificerar vilka vårdmoment som skall utföras och hur många vårdtimmar per månad vårdtagaren är berättigad till. Vårdplanen specificerar i regel inte när respektive vårdmoment skall utföras, utan detta sker i samråd mellan vårdtagare och gruppen av vårdare. Det är först där det bestäms inom vilket tidsfönster vårdmomenten skall utföras och hur många vårdare som krävs. För faktureringsändamål motsvaras tidsåtgången för varje vårdmoment av en schablontid. Vid en snabb kontroll inser man att dagssumman av dessa tider för en anställd vårdare ibland överstiger vårdarens dagliga arbetstid, vilket gör att dessa schablontider inte går att använda i en optimeringsmodell. Ur matematiskt synvinkel är det inte heller nödvändigt att veta vilka moment som utförs.

I examensarbetet ingick att utveckla en modell för kombinerad ruttplanering och vårdschema, att lösa modellen och att provköra modellen för att göra en jämförelse mellan det nuvarande systemet och modellens lösning. Modellen är ämnad att svara på frågor av typen: Vilken är den bästa ruten för varje bil? Vilken vårdare ska serva respektive vårdtagare? Kan körsträckan minskas? Kan planeringstiden minskas?

Den matematiska modellen innehåller storheter som bestämmer, i en optimal lösning, vilka personer som färdas (som förare eller passagerare) i en given bil mellan två givna platser i trafiknätverket (typiskt motsvarar platserna vägkorsningar på en vägkarta), hur varje given bil färdas genom nätverket, vid vilka tider fordon och personer befinner sig i olika delar av nätverket, samt på motsvarande sätt vid vilka tider personal anländer till vårdtagare. Parametrar i modellen inkluderar för vårdinsatserna de tidsfönster som gäller för vårdbehovets tidigaste början och senaste avslut, vårdbehovet mätt i tid och behov av personal för varje vårdtagare, tidsfönster för personalens tillgänglighet, avstånd och restider mellan alla relevanta delar av trafiknätverket och data för vårdteamets bilar, speciellt maximalt antal passagerare. Slutligen ingår bivillkor som anger att bilar och vårdgivare skall befinna sig vid depån vid passets början och återvända till depån vid passets slut. Den målfunktion som valdes var att minimera den totala körsträckan.

Den resulterande modellen är av linjär, blandad heltalstyp, dvs. alla relationer mellan variabler är linjära och vissa av variablerna är heltaliga. Ett problem skapas för varje arbetspass, dvs. totalt 14 för en arbetsvecka.

Ett försök att lösa problemet med hjälp av CPLEX misslyckades, till viss del beroende på problemets komplexitet. Framför allt blev körtiderna kraftigt varierande beroende på val av testproblem och ett mål med examensarbetet var att utveckla en metodik som är tillämplig utan tillgång till CPLEX. Därför skapades en heuristisk lösningsansats, enligt följande: I ett första steg skapas rutter för vårdarna utan att ta hänsyn till samåkning; det andra steget använder dessa rutter för att försöka ordna samåkning där det går. För att öka flexibiliteten vid planeringen ges användaren möjlighet att bestämma hur många fordon som ska användas. Om samåkning inte kan ordnas, skapas nya rutter i steg ett och steg två försöker på nytt att ordna samåkning. Båda stegen bygger på en enkel insättningsheuristik och garanterar varken optimalitet eller ens att en tillåten lösning hittas.

Probleminstanser skapades motsvarande ruttningsproblemet för förmiddagen och eftermiddagen separat, vilket ger fjorton olika fall under en vecka. Resultaten visar att det är möjligt att minska körsträckan med upp till ca 10% jämfört med dagens ruttplanering. I vissa fall är det dock inte möjligt att hitta lösningar på grund av en inkompatibilitet mellan givna insatstider och tidsfönster. Dessa fall löses genom att i första hand kontrollera givna data och ändra uppenbara motsägelser och i andra hand genom att generellt minska insatstider och/eller utvidga vårdtagarnas tidsfönster.

Det gjordes också ett försök att se om CPLEX kunde utnyttja de funna lösningarna för att lättare finna optimala dito. Den resulterande modellen för måndag eftermiddag är, efter förprocessering, ett blandat heltalsproblem med 2616 binära variabler, 165 kontinuerliga variabler och 15411 bivillkor. Även efter en flera dygn lång körning kunde inte CPLEX rapportera huruvida den initiala lösningen kan förbättras eller ej, beroende på det gigantiska dualitetsgapet.

## Referenser

- Agkün, V., Erkut, E., och Batta, R. (2000), “On finding dissimilar paths”, *European Journal of Operational Research* 121, 232–246.
- Andréasson, N. (2004), *Optimization of opportunistic replacement activities in deterministic and stochastic multi-component systems*. Licentiate thesis, Chalmers University of Technology.
- Besnard, F., Patriksson, M., Strömberg, A.-B., Wojciechowski, A., och Bertling, L. (2009), “An optimization framework for opportunistic maintenance of offshore wind power systems”, i: *Proceedings of the 2009 IEEE Bucharest PowerTech Conference*, 2970–2976.
- Billionnet, A. (2010), “Integer programming for optimization habitat network permeability”, *Management of Environmental Quality: An International Journal* 21.
- Fairley, P. (2009), “Software looks at the road ahead to boost hybrid-card efficiency”, *IEEE Spectrum* 02/09.
- Fernández, J., Fernández, P., och Pelegrín, B. (2000), “A continuous location model for siting a non-noxious undesirable facility within a geographical region”, *European Journal of Operational Research* 121, 259–274.
- Figliozzi, M. (2009), “Emissions minimization vehicle routing problem”, Teknisk rapport, Portland State University, USA.
- Hellström, E. (2007), *Look-ahead Control of Heavy Trucks utilizing Road Topology*. Licentiatavhandling, Linköping University. LiU Thesis no. 1319.
- Holmberg, K. (2010), *Optimering*, Liber.
- Ivarsson, M. (2009), *Fuel Optimal Powertrain Control for Heavy Trucks Utilizing Look Ahead*. Licentiatavhandling, Linköping University. LiU Thesis no. 1400.
- Jenkins, L. (2000), “Selecting scenarios for environmental disaster planning”, *European Journal of Operational Research* 121, 275–286.
- Lidestam, H., och Abrahamsson, M. (2010), “Environmental evaluation of public procurement for bus transports”, *Management of Environmental Quality: An International Journal* 21.
- Nilsson, J., Patriksson, M., Strömberg, A.-B., Wojciechowski, A., och Bertling, L. (2009), “An opportunistic maintenance optimization model for shaft seals in feed-water pump systems in nuclear power plants”, i: *Proceedings of the 2009 IEEE Bucharest PowerTech Conference*, 2962–2969.
- Perrier, N., Langevin, A., och Amaya, C.-A. (2008), “Vehicle routing for urban snow plowing operations”, *Transportation Science* 42, 44–56.
- Perrier, N., Langevin, A., och Campbell, J. F. (2006a), “A survey of models and algorithms for winter road maintenance: Part I: System design for spreading and plowing”, *Computers and Operations Research* 33, 209–238.

- Perrier, N., Langevin, A., och Campbell, J. F. (2006b), “A survey of models and algorithms for winter road maintenance: Part II: System design for snow disposal”, *Computers and Operations Research* 33, 239–262.
- Perrier, N., Langevin, A., och Campbell, J. F. (2007a), “A survey of models and algorithms for winter road maintenance: Part III: Vehicle routing and depot location for spreading”, *Computers and Operations Research* 34, 211 – 257.
- Perrier, N., Langevin, A., och Campbell, J. F. (2007b), “A survey of models and algorithms for winter road maintenance: Part IV: Vehicle routing and fleet sizing for plowing and snow disposal”, *Computers and Operations Research* 34, 258 – 294.
- Raba, E. (2008), “Supply chain network design at lantmännen from a cost and environmental perspective”, Examensarbete, handledare Torbjörn Larsson, Linköping Institute of Technology. LiTH-MAT-EX-2008/09-SE.
- Razmara, G. (2004), *Snow Removal Routing Problems - Theory and Applications*. PhD dissertation, Linköping University, Sweden. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertation no. 888.
- Rydh, C. J., Jonsson, M., och Lindahl, P. (2004), “Replacement of old wind turbines assessed from energy, environmental and economic perspectives”, Teknisk rapport, University of Kalmar.
- Sbihi, A., och Eglese, R. (2010), “Combinatorial optimization and green logistics”, *Annals of Operations Research* 175, 159–175.
- Sellman, C.-P. (2005), “Ruttplanering för hemtjänsten i torslanda”, Examensarbete, Matematiska vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet. Handledare Michael Patriksson.
- Torstensson, J. (2008), “Computation of milage limits for traveling salesmen by means of optimization techniques”, Examensarbete, handledare Kaj Holmberg, Linköping Institute of Technology. LiTH-MAT-EX-2008/08-SE.
- Wojciechowski, A. (2010), *On the optimization of maintenance activities*. Licentiate thesis, Chalmers University of Technology.