

# Vårt första exempel

## Variabeldefinition:

$x_1$  = antal enheter Optimus som görs varje timme.

$x_2$  = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

## Matematisk modell:

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \text{ (knappar)} \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \text{ (optik)} \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \text{ (monteringstid)} \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

# LP-dualitet: Exempel

Primal:

# LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten,

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rlllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual:



## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna.

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{llllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{llllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.

Produkten görs ej om kostnaden blir högre än intäkten.

# LP-dualitet: Generellt

**Primal:**

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$



# LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$\max z = c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

# LP-dualitet: Generellt

**Primal:**

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= c^T x \\ \text{då} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

**Dual:**

$$\begin{aligned} \min \quad v &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{då} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ y_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

# LP-dualitet: Generellt

**Primal:**

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

**Dual:**

$$\begin{aligned} \min \quad v &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{då} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ y_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= c^T x \\ \text{då} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad v &= b^T y \\ \text{då} \quad A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis)

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis) (rita)

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

### Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis) (rita)

### Följdsats

Om  $\bar{x}$  är tillåten i primalen,  $\bar{y}$  är tillåten i dualen och  $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$  så är  $\bar{x}$  optimal i primalen och  $\bar{y}$  optimal i dualen.



## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

### Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis) (rita)

### Följdsats

Om  $\bar{x}$  är tillåten i primalen,  $\bar{y}$  är tillåten i dualen och  $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$  så är  $\bar{x}$  optimal i primalen och  $\bar{y}$  optimal i dualen.

(se figur)

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

### Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis) (rita)

### Följdsats

Om  $\bar{x}$  är tillåten i primalen,  $\bar{y}$  är tillåten i dualen och  $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$  så är  $\bar{x}$  optimal i primalen och  $\bar{y}$  optimal i dualen.

(se figur)

### Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

### Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis) (rita)

### Följdsats

Om  $\bar{x}$  är tillåten i primalen,  $\bar{y}$  är tillåten i dualen och  $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$  så är  $\bar{x}$  optimal i primalen och  $\bar{y}$  optimal i dualen.

(se figur)

### Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

Båda kan dock sakna lösning.

## LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel,  $y_i$ , anger hur mycket primala bivillkor  $i$  "tar emot".

## LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel,  $y_i$ , anger hur mycket primala bivillkor  $i$  "tar emot".  
Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

## LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel,  $y_i$ , anger hur mycket primala bivillkor  $i$  "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

**Komplementaritet** (i ord):

Om primala bivillkor  $i$  inte är aktivt, måste  $y_i = 0$ .

Om duala bivillkor  $j$  inte är aktivt, måste  $x_j = 0$ .

## LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel,  $y_i$ , anger hur mycket primala bivillkor  $i$  "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

**Komplementaritet** (i ord):

Om primala bivillkor  $i$  inte är aktivt, måste  $y_i = 0$ .

Om duala bivillkor  $j$  inte är aktivt, måste  $x_j = 0$ .

### Komplementaritetsvillkoren

Primallösningen  $x$  och duallösningen  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren om

$$y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

## LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$



## LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

### Sats

Om  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $c^T x = b^T y$ .

## LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

### Sats

Om  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $c^T x = b^T y$ .

(peka på bevis)

## LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

### Sats

Om  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $c^T x = b^T y$ .

(peka på bevis)

### Följdsats

Om  $x$  är tillåten i primalen,  $y$  är tillåten i dualen och  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $x$  optimal i primalen och  $y$  optimal i dualen.

## LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

### Sats

Om  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $c^T x = b^T y$ .

(peka på bevis)

### Följdsats

Om  $x$  är tillåten i primalen,  $y$  är tillåten i dualen och  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $x$  optimal i primalen och  $y$  optimal i dualen.

Åt andra hållet:

# LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

## Sats

Om  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $c^T x = b^T y$ .

(peka på bevis)

## Följdsats

Om  $x$  är tillåten i primalen,  $y$  är tillåten i dualen och  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $x$  optimal i primalen och  $y$  optimal i dualen.

Åt andra hållet:

## Starka dualsatsen

Om  $x$  och  $y$  är optimallösningar så gäller  $c^T x = b^T y$ .

# LP-dualitet: Slutsatser

## Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning,  $x^*$ , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning,  $y^*$ , och  $c^T x^* = b^T y^*$ .
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

# LP-dualitet: Slutsatser

## Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning,  $x^*$ , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning,  $y^*$ , och  $c^T x^* = b^T y^*$ .
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

# LP-dualitet: Slutsatser

## Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning,  $x^*$ , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning,  $y^*$ , och  $c^T x^* = b^T y^*$ .
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

## Optimalitetsvillkor (KKT)

Primal tillåtenhet +  
Dual tillåtenhet +  
Komplementaritet  
= Optimalitet



# LP-dualitet: Formulering

**Standard:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

# LP-dualitet: Formulering

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

Primal	Dual
max	min

# LP-dualitet: Formulering

**Standard:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$

# LP-dualitet: Formulering

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b \Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b \Rightarrow$	$y \leq 0$

# LP-dualitet: Formulering

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b \Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b \Rightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b \Rightarrow$	$y \text{ fri}$

# LP-dualitet: Formulering

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$y$ fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$

# LP-dualitet: Formulering

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$y$ fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$

# LP-dualitet: Formulering

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$y$ fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$
$x$ fri	$A^T y = c$



# LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Dual		Primal
max		min
$Ax \leq b$	$\Leftrightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Leftrightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Leftrightarrow$	$y$ fri
$x \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \leq c$
$x$ fri	$\Leftrightarrow$	$A^T y = c$

# LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

## Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal/dual:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual/primal:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

## Variationer:

*		*
max		min
$Ax \leq b$	$\Leftrightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Leftrightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Leftrightarrow$	$y$ fri
$x \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \leq c$
$x$ fri	$\Leftrightarrow$	$A^T y = c$

## LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$\begin{array}{rllllllll} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & (1) & (y_1) \\ & & 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 16 & (2) & (y_2) \\ & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 43 & (3) & (y_3) \\ & & x_1 & \geq & 0, & x_2 & \text{fri,} & x_3 & \leq & 0 & \end{array}$$

## LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \quad (1) \quad (y_1) \\ & 7x_1 + x_2 - x_3 \geq 16 \quad (2) \quad (y_2) \\ & 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 43 \quad (3) \quad (y_3) \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ fri}, \quad x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v = & 10y_1 + 16y_2 + 43y_3 \\ \text{då} \quad & 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 3y_1 + y_2 + 4y_3 = 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y_1 - y_2 + 4y_3 \leq -5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \text{ fri} \end{aligned}$$

## LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \quad (1) \quad (y_1) \\ & 7x_1 + x_2 - x_3 \geq 16 \quad (2) \quad (y_2) \\ & 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 43 \quad (3) \quad (y_3) \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ fri}, \quad x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v = & 10y_1 + 16y_2 + 43y_3 \\ \text{då} \quad & 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 3y_1 + y_2 + 4y_3 = 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y_1 - y_2 + 4y_3 \leq -5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \text{ fri} \end{aligned}$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$\begin{aligned} y_1 (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10) &= 0 \\ y_2 (7x_1 + x_2 - x_3 - 16) &= 0 \\ x_1 (2y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 2) &= 0 \\ x_3 (2y_1 - y_2 + 4y_3 + 5) &= 0 \end{aligned}$$

# Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

# Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

# Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow$$



# Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow$$

# Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

# Dualitet och baslösningar

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Primal:} & \text{Dual:} & \text{Kompl.:} \\ \max z = c^T x & \min v = b^T y & \\ \text{då } Ax = b & \text{då } A^T y \geq c & x^T (A^T y - c) = 0 \\ x \geq 0 & y \text{ fri} & \end{array}$$

Baslösning:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Primal:} & \text{Dual:} & \text{Kompl} \\ \max z = c_B^T x_B + c_N^T x_N & \min v = b^T y & \\ \text{då } Bx_B + Nx_N = b & \text{då } B^T y \geq c_B & x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_B, x_N \geq 0 & N^T y \geq c_N & x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \\ & y \text{ fri} & \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dual tillåtenhet: Sätt in  $y$  i  $N^T y \geq c_N$ .

# Dualitet och baslösningar

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Primal:} & \text{Dual:} & \text{Kompl.:} \\ \max z = c^T x & \min v = b^T y & \\ \text{då } Ax = b & \text{då } A^T y \geq c & x^T (A^T y - c) = 0 \\ x \geq 0 & y \text{ fri} & \end{array}$$

Baslösning:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{Primal:} & \text{Dual:} & \text{Kompl} \\ \max z = c_B^T x_B + c_N^T x_N & \min v = b^T y & \\ \text{då } Bx_B + Nx_N = b & \text{då } B^T y \geq c_B & x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_B, x_N \geq 0 & N^T y \geq c_N & x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \\ & y \text{ fri} & \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dual tillåtenhet: Sätt in  $y$  i  $N^T y \geq c_N$ . Uppfyllt om  $\hat{c}_N \leq 0$  där  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1} N)^T$ .

# Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dual tillåtenhet: Sätt in  $y$  i  $N^T y \geq c_N$ . Uppfyllt om  $\hat{c}_N \leq 0$  där  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1} N)^T$ .

**Primal och dual lösning:**  $x_B = B^{-1} b$ ,  $x_N = 0$ ,  $y = B^{-1T} c_B$ .

## Dualitet och baslösningar, forts

### Slutsats

Dual tillåtenhet  $\Leftrightarrow$  primal optimalitet.

## Dualitet och baslösningar, forts

### Slutsats

Dual tillåtenhet  $\Leftrightarrow$  primal optimalitet.

Vi har bevisat starka dualsatsen.

## Dualitet och baslösningar, forts

### Slutsats

Dual tillåtenhet  $\Leftrightarrow$  primal optimalitet.

Vi har bevisat starka dualsatsen.

### Starka dualsatsen, version 2

Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning,  $x^* = B^{-1}b$ , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, som ges av  $y^* = B^{-1T}c_B$ .

Både primalen och dualen har det optimala målfunktionsvärdet  $z^* = c_B^T B^{-1}b$ .



## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llllllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llllllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$\begin{array}{ll} y_1 & (2x_1 + 3x_2 - 30) = 0 \\ y_2 & (x_1 - 6) = 0 \\ y_3 & (6x_1 + 4x_2 - 50) = 0 \\ x_1 & (2y_1 + y_2 + 6y_3 - 4) = 0 \\ x_2 & (3y_1 + 4y_3 - 3) = 0 \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

## LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

Basvariabler  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ .

## LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

Basvariabler  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt  $\Rightarrow y_2 = 0$ .

Villkor 3 aktivt.

## LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

Basvariabler  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt  $\Rightarrow y_2 = 0$ .

Villkor 3 aktivt.

$$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4.$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3.$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

Basvariabler  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt  $\Rightarrow y_2 = 0$ .

Villkor 3 aktivt.

$$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4.$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3.$$

Dual optimallösning:  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .



# LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

# LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

## LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Dual optimallösning:  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.



## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0$

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ .

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ . Problemet löst.

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ . Problemet löst.

Det blev en metod!

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ . Problemet löst.

Det blev en metod!  $\max_j (c_j/a_j)$

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ . Problemet löst.

Det blev en metod!  $\max_j (c_j/a_j)$  ger bästa  $x_j$ .

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ . Problemet löst.

Det blev en metod!  $\max_j (c_j/a_j)$  ger bästa  $x_j$ . Ta med den.



## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & & \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & & \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & & \\ \text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\ & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

## LP-dualitet: Exempel

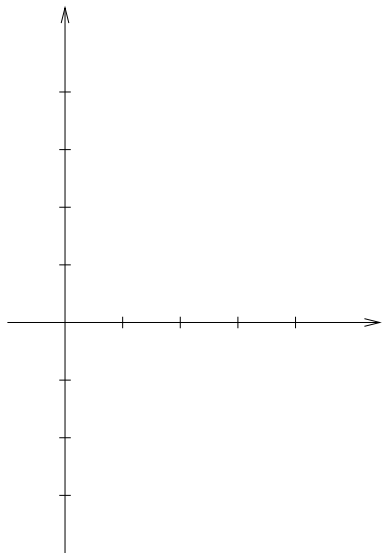
$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\ & \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

LP-dual:

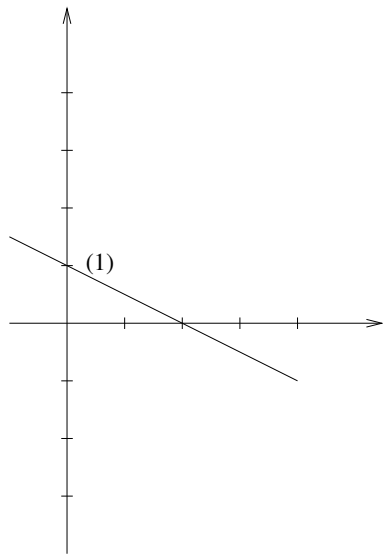
$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & & \\ & \text{då} & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\ & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

## LP-dualitet: Exempel

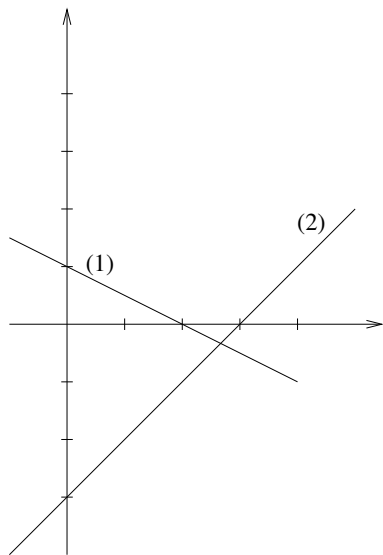


## LP-dualitet: Exempel



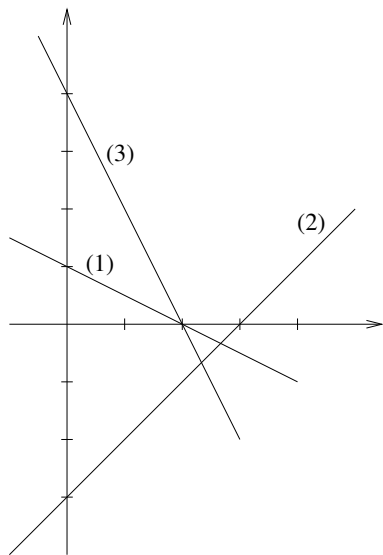
Duala bivillkor 1:  $y_1 + 2y_2 \geq 2$ .

## LP-dualitet: Exempel



Duala bivillkor 2:  $y_1 - y_2 \geq 3$ .

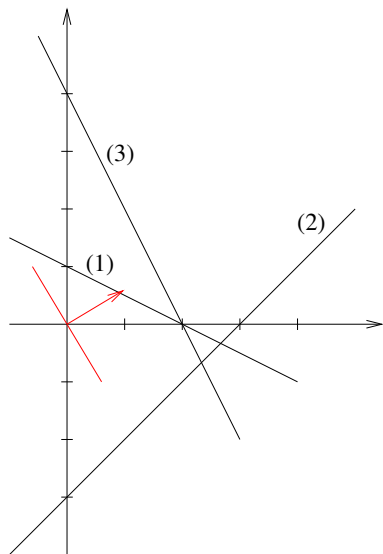
## LP-dualitet: Exempel



Duala bivillkor 3:  $2y_1 + y_2 \geq 4$ .

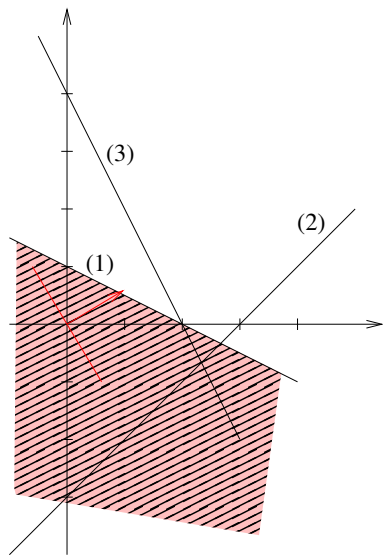


## LP-dualitet: Exempel



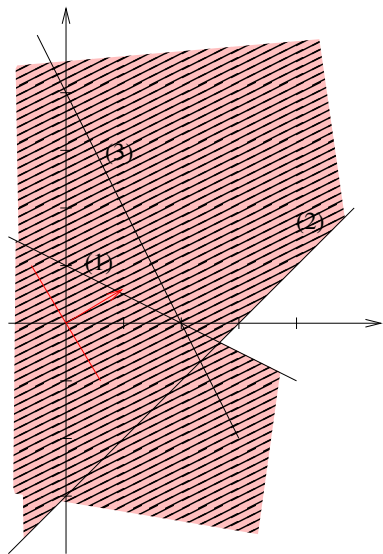
Dual målfunktion:  $v = 5y_1 + 3y_2$ .

## LP-dualitet: Exempel



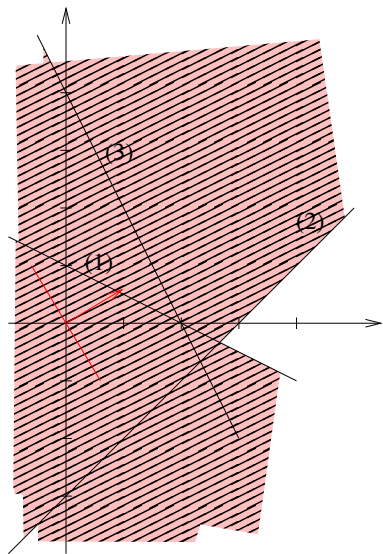
Duala bivillkor 1:  $y_1 + 2y_2 \geq 2$ .

## LP-dualitet: Exempel



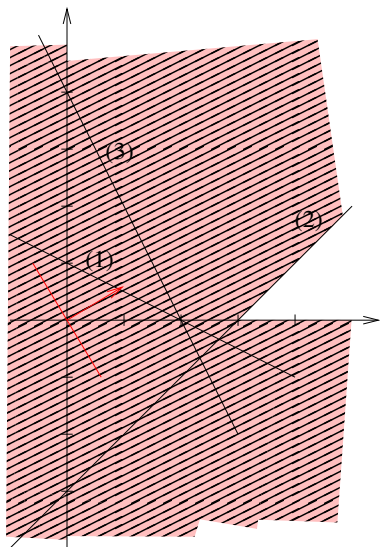
Duala bivillkor 2:  $y_1 - y_2 \geq 3$ .

## LP-dualitet: Exempel



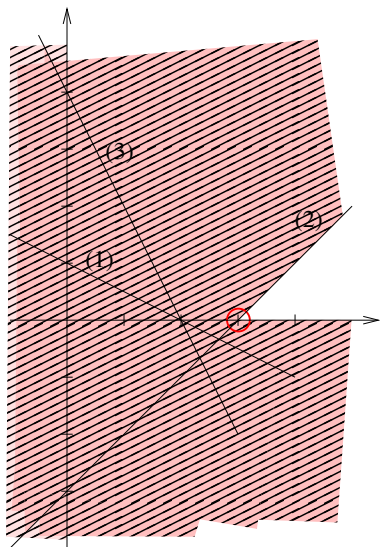
Duala bivillkor 3:  $2y_1 + y_2 \geq 4$ .

## LP-dualitet: Exempel



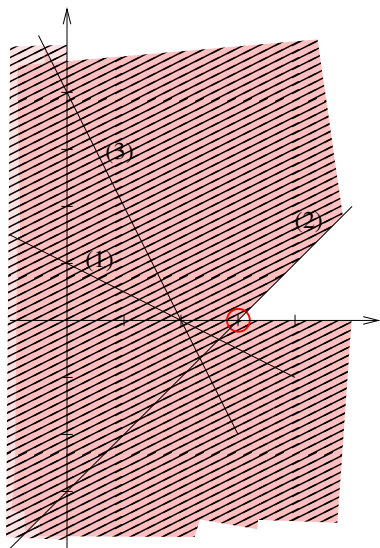
Duala ickenegativitetsvillkor:  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ .

## LP-dualitet: Exempel



Dual optimalpunkt:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ .

## LP-dualitet: Exempel



Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \quad (y_1) \\ &2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad (y_2) \\ &x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad &y_1 + 2y_2 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ &y_1 - y_2 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ &2y_1 + y_2 \geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ &y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.



## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

$y_1 > 0$

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$ .

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$ . Problemet löst.

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$ . Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$ . Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 0$ ,  $z = 15$ .



## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $v = 15$ .

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$ . Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 0$ ,  $z = 15$ . (Kolla gärna  $z$ .)

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion:  $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$ .

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion:  $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$ .

Stoppa in dual optimallösning:  $y_1 = 3, y_2 = 0$



## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion:  $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$ .

Stoppa in dual optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$  ger  $v = 3b_1$ .

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion:  $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$ .

Stoppa in dual optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$  ger  $v = 3b_1$ .

En enhets ökning av  $b_1$  ger 3 enheters ökning av  $v$ , dvs.  $z$ .

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen:  $z = c^T x = b^T y$  eller  $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion:  $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$ .

Stoppa in dual optimallösning:  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$  ger  $v = 3b_1$ .

En enhets ökning av  $b_1$  ger 3 enheters ökning av  $v$ , dvs.  $z$ .

En enhets ökning av  $b_2$  ger ingen ändring av  $v$ , dvs.  $z$ .

# Skuggpriser

I en viss baslösning har vi  $x_B = B^{-1}b$  och  $y = B^{-1T}c_B$ .

# Skuggpriser

I en viss baslösning har vi  $x_B = B^{-1}b$  och  $y = B^{-1T}c_B$ .

Skuggpriserna är oförändrade så länge som  $B^{-1}$  och  $c_B$  är oförändrade,

# Skuggpriser

I en viss baslösning har vi  $x_B = B^{-1}b$  och  $y = B^{-1T}c_B$ .

Skuggpriserna är oförändrade så länge som  $B^{-1}$  och  $c_B$  är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

# Skuggpriser

I en viss baslösning har vi  $x_B = B^{-1}b$  och  $y = B^{-1T}c_B$ .

Skuggpriserna är oförändrade så länge som  $B^{-1}$  och  $c_B$  är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i  $b$  ger  $B^{-1}b \not\geq 0$ , ändras optimal baslösning/skuggpriser.

# Skuggpriser

I en viss baslösning har vi  $x_B = B^{-1}b$  och  $y = B^{-1T}c_B$ .

Skuggpriserna är oförändrade så länge som  $B^{-1}$  och  $c_B$  är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i  $b$  ger  $B^{-1}b \not\geq 0$ , ändras optimal baslösning/skuggpriser.

$B^{-1}b \geq 0$  ger gränser på  $b$  för oförändrad optimallösning.



# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut,

# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte  $B^{-1}$ .



# Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte  $B^{-1}$ .

Stoppa in nya  $b$  och/eller  $c$  i  $x_B = B^{-1}b$ ,  $y = B^{-1T}c_B$  och  $z = c_B^T x_B$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.  
För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .



# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ :

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ . Kolla tillåtenhet,  $a_i^T x^* \leq b_i$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ . Kolla tillåtenhet,  $a_i^T x^* \leq b_i$ .
- Addition av ny variabel,  $x_k$ , med kolumn  $a_k$  och målfunktionskoefficient  $c_k$

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ . Kolla tillåtenhet,  $a_i^T x^* \leq b_i$ .
- Addition av ny variabel,  $x_k$ , med kolumn  $a_k$  och målfunktionskoefficient  $c_k$  (dvs. dualt bivillkor,  $a_k^T y \geq c_k$ ).

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ . Kolla tillåtenhet,  $a_i^T x^* \leq b_i$ .
- Addition av ny variabel,  $x_k$ , med kolumn  $a_k$  och målfunktionskoefficient  $c_k$  (dvs. dualt bivillkor,  $a_k^T y \geq c_k$ ).

Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.



# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ . Kolla tillåtenhet,  $a_i^T x^* \leq b_i$ .
- Addition av ny variabel,  $x_k$ , med kolumn  $a_k$  och målfunktionskoefficient  $c_k$  (dvs. dualt bivillkor,  $a_k^T y \geq c_k$ ).

Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

**Primal optimalitet:**  $\hat{c}_k = c_k - a_k^T y^* \leq 0$ .

# Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled,  $b$ . Kolla tillåtenhet,  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ .
- Målfunktionskoefficient,  $c$ . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel,  $c_N$ :  $c_N \leq N^T y^*$ .

(Ändringen i  $\hat{c}$  blir lika stor som ändringen i  $c$ .)

För basvariabel,  $c_B$ : Beräkna  $y = B^{-1T} c_B$  och kolla  $N^T y \geq c_N$ .

- Addition av nytt bivillkor,  $a_i^T x \leq b_i$ . Kolla tillåtenhet,  $a_i^T x^* \leq b_i$ .
- Addition av ny variabel,  $x_k$ , med kolumn  $a_k$  och målfunktionskoefficient  $c_k$  (dvs. dualt bivillkor,  $a_k^T y \geq c_k$ ).

Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

**Primal optimalitet:**  $\hat{c}_k = c_k - a_k^T y^* \leq 0$ .

Alternativ: Kolla **dual tillåtenhet:**  $a_k^T y^* \geq c_k$ .





## Vårt musexempel

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) & (\text{knappar}) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) & (\text{optik}) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) & (\text{monteringstid}) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) & (\text{Optimus}) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) & (\text{Rullmus}) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

Optimaltablå:

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

## Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

## Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

## Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av  $b_1$ , så vi tjänar  $y_1 = 1/5$  per enhets ökning.



## Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av  $b_1$ , så vi tjänar  $y_1 = 1/5$  per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta?

## Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av  $b_1$ , så vi tjänar  $y_1 = 1/5$  per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta? Kolla  $B^{-1}b \geq 0$ .

## Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av  $B^{-1}$  under slackvariablerna i optimaltablån.

## Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av  $B^{-1}$  under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

## Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av  $B^{-1}$  under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

## Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av  $B^{-1}$  under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger  $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$ .

## Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av  $B^{-1}$  under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger  $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$ .

Så vi tjänar 1/5 kr per ytterligare knapp, för  $b_1$  upp till 37.5.

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?



## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll.

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm  $c_6$  så att  $\hat{c}_6 > 0$ :

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm  $c_6$  så att  $\hat{c}_6 > 0$ :

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0$$



## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm  $c_6$  så att  $\hat{c}_6 > 0$ :

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0 \text{ om } c_6 > 3.2.$$

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm  $c_6$  så att  $\hat{c}_6 > 0$ :

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0 \text{ om } c_6 > 3.2.$$

För att få lite marginal sätter man priset så att intäkten blir 3:50 kr.

# Känslighetsanalys från koder

Indatafil: (GMPL)

```
var x1 >= 0;  
var x2 >= 0;  
  
maximize obj:    4*x1 + 3*x2;  
subject to con1: 2*x1 + 3*x2 <= 30;  
subject to con2:  x1           <= 6;  
subject to con3: 6*x1 + 4*x2 <= 50;  
end;
```

Lösning av problemet: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod -o lp-ko1.sol
```

## Känslighetsanalys från koder

På skärmen (rensat):

```
Reading model section from lp-ko1.mod...
```

```
11 lines were read
```

```
Model has been successfully generated
```

```
GLPK Simplex Optimizer, v4.44
```

```
4 rows, 2 columns, 7 non-zeros
```

```
Preprocessing...
```

```
2 rows, 2 columns, 4 non-zeros
```

```
Scaling...
```

```
A: min|aij| = 2.000e+00  max|aij| = 6.000e+00  ratio = 3.000e+00
```

```
Problem data seem to be well scaled
```

```
Constructing initial basis...
```

```
Size of triangular part = 2
```

```
* 0: obj = 0.000000000e+00  infeas = 0.000e+00 (0)
```

```
* 3: obj = 3.600000000e+01  infeas = 0.000e+00 (0)
```

```
OPTIMAL SOLUTION FOUND
```

```
Time used: 0.0 secs
```

```
Memory used: 0.1 Mb (108000 bytes)
```

```
Writing basic solution to 'lp-ko1.sol'...
```

# Känslighetsanalys från koder

I utdatafilen lp-ko1.sol (rensat):

Problem: lp  
Rows: 4  
Columns: 2  
Non-zeros: 7  
Status: OPTIMAL  
Objective: obj = 36 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	obj	B	36			
2	con1	NU	30		30	0.2
3	con2	B	3		6	
4	con3	NU	50		50	0.6

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	x1	B	3	0		
2	x2	B	8	0		

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

# Känslighetsanalys från koder

Lösning av problemet med känslighetsanalys: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod --bounds lp-ko1.bnd
```

I utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT

Problem: lpluma

Objective: obj = 36 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Lower bound Upper bound	Activity range
1	obj	BS	36.00000	-36.00000 .	-Inf +Inf	30.00000 36.00000
2	con1	NU	30.00000	. .20000	-Inf 30.00000	22.50000 37.50000
3	con2	BS	3.00000	3.00000 .	-Inf 6.00000	. 8.33333
4	con3	NU	50.00000	. .60000	-Inf 50.00000	40.00000 60.00000

# Känslighetsanalys från koder

Sida 2 i utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT

Problem: lpluma

Objective: obj = 36 (MAXimum)

No.	Column name	St	Activity	Obj coef Marginal	Activity range	Obj coef range	Obj va break
1	x1	BS	3.00000	4.00000 .	-Inf 6.00000	2.00000 4.50000	30 37
2	x2	BS	8.00000	3.00000 .	3.50000 10.00000	2.66667 6.00000	33 60

End of report

VILEOPT: Visual LP Optimization

Problem data

Objective function  
c1: 4    c2: 3    c3: 0    c4: 0    c5: 0

Constraint coefficients  
a11: 2    a12: 3    a13: 1    a14: 0    a15: 0  
a21: 1    a22: 0    a23: 0    a24: 1    a25: 0  
a31: 6    a32: 4    a33: 0    a34: 0    a35: 1

Right-hand-side  
b1: 30    b2: 6    b3: 50

Exit (no save) <F3>    Save and exit

Iter    Print    PS

Welcome to VILEOPT!  
No basis given.



VILEOPT: Visual LP Optimization

File Optimization Visualization Changes

Visual Linear Programming

Bas	z	x1	x2	x3	x4	x5	b
z	1	-4.000	-3.000	0	0	0	0
x3	0	2.000	3.000	1	0	0	30.000
x4	0	1	0	0	1	0	6.000
x5	0	6.000	4.000	0	0	1	50.000

Choose entering variable at the top and leaving variable to the left and hit pivot.

Basic variables: 3 4 5

Pivot

Iter Print PS Problem: fo1ex. Variables: 5. Constraints: 3.

Welcome to VILEOPT!

Basic variables: 3 4 5.

Att tänka på inför lab 2:

Skuggpris? Reducerad kostnad?

Vad händer om man gör fel i simpexmetoden?