

## Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmetoder**:

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Punkten man står i verkar optimal. Är det det?

Vad kan man förvänta sig av olika metoder?

## Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

### Definition

En mängd  $X$  är **konvex** om  $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$  för alla  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

### Sats

Om  $X_i$  är konvex för alla  $i$  så är  $X = \cap_i X_i$  konvex.

Exempel: Flera halvrum. Flera linjära bivillkor.

## Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

### Definition

En punkt  $x^*$  är **globalt** minimum i  $X$  om  $f(x^*) \leq f(x)$  för alla  $x \in X$ .

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

### Definition

En punkt  $x^*$  är **lokalt** minimum i  $X$  om  $f(x^*) \leq f(x)$  för alla  $x \in X$  som är nära  $x^*$ . (T.ex. för alla  $x \in X : \|x - x^*\| \leq \delta$ .)

## Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt “innanför” de andra. (rita)

### Definition

$\hat{x}$  är en **konvexkombination** av punkterna  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , om  $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$ , där  $\sum_k \lambda_k = 1$  och  $\lambda_k \geq 0$  för alla  $k$ .

Exempel: Mittpunkt.  $\lambda_k = 1/p$ .

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Exempel: Origo (under bivillkoren  $x_i \geq 0$  för alla  $i$ ).

Mängd med "raka kanter".

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel:  $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $Ax \leq b$ .

Exempel:  $Ax = b, x \geq 0$ .

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen: Gå så långt man får åt något håll.  $\Rightarrow$  Hörn.

## Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

## Vårt första exempel

### Variabeldefinition:

$x_1$  = antal enheter Optimus som görs varje timme.

$x_2$  = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

### Matematisk modell:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 & (1) & \text{ (knappar)} \\ \quad x_1 &\leq 6 & (2) & \text{ (optik)} \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 & (3) & \text{ (monteringstid)} \\ \quad x_1 &\geq 0 & (4) & \\ \quad \quad x_2 &\geq 0 & (5) & \end{aligned}$$

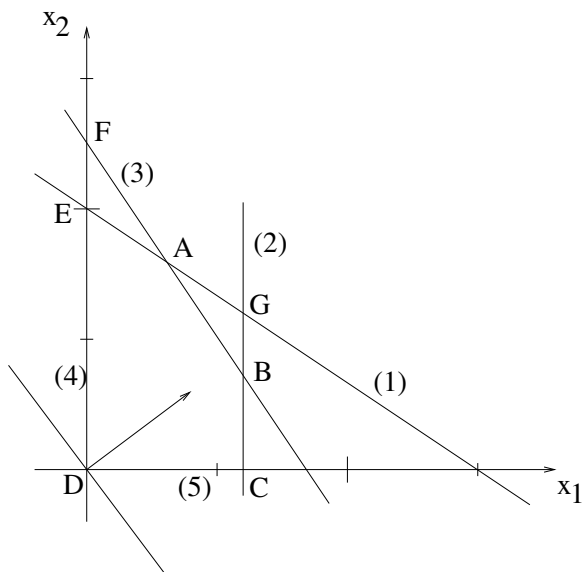
## Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 & (1) \\ \quad x_1 &\leq 6 & (2) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 & (3) \\ \quad x_1 &\geq 0 & (4) \\ \quad \quad x_2 &\geq 0 & (5) \end{aligned}$$

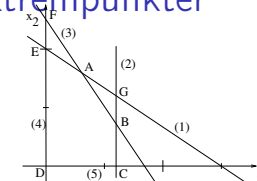
Inför slackvariabler.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ \quad x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Baslösningar representerar extrempunkter



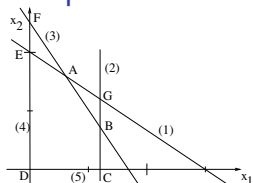
## Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

## Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Icke-basvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion (reducerade kostnader)
A	$x_3, x_5$	$x_1, x_2, x_4$	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	$x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_3$	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	$x_1, x_3$	$x_2, x_4, x_5$	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

## Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z.)
- Gör ökningen så stor som möjligt, dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

## Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$\begin{aligned} 2t + x_3 &= 30 \\ t + x_4 &= 6 \\ 6t + x_5 &= 50 \end{aligned}$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger  $t = 6$ , dvs.  $x_1 = 6$

och  $x_3 = 30 - 12 = 18, x_4 = 6 - 6 = 0, x_5 = 50 - 36 = 14$ .

## Baslösning, teoretiskt

### Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut  $m$  **basvariabler**, sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet  $Ax = b$ .

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$ ,  $A = (B \ N)$ .  $Bx_B + Nx_N = b$  ger  $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ .

Eliminera  $x_B$  från målfunktionen:  $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

där  $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$  och  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$ ,

eller separat  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$  där  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

$\hat{c}$  kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för  $x_N = 0$  och  $x_B = B^{-1}b$  är **tillåten** om  $B^{-1}b \geq 0$  och **optimal** om  $\hat{c}_N \leq 0$ .

### Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av en tillåten baslösning.

## Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

Om  $\hat{c}_j \leq 0$  för all  $j$ : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn,  $\min_{i: \hat{a}_{ij} > 0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$ .

Om  $\hat{a}_{ij} \leq 0$  för alla  $i$ : Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

## Löst exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \quad (1) \\ x_1 &\leq 6 \quad (2) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 \quad (3) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inför slackvariabler,  $x_3, x_4, x_5$ .

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Simplexmetoden

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Starttablå:

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	0	0	0	0
$x_3$	0	2	3	1	0	0	30
$x_4$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel:  $x_1$ . Utgående variabel:  $x_4$ .

## Simplexmetoden

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel:  $x_2$ . Utgående variabel:  $x_5$ .

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
$x_3$	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_2$	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel:  $x_4$ . Utgående variabel:  $x_3$ .

## Simplexmetoden

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Slack:**

Villkor 1 aktivt ( $x_3 = 0$ ).

Villkor 2 ej aktivt ( $x_4 = 3$ ).

Villkor 3 aktivt ( $x_5 = 0$ ).

## Skuggpriser

Skuggpriser,  $y$ , är vad man tjänar på att öka ett högerled lite.

Optimaltablå:

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

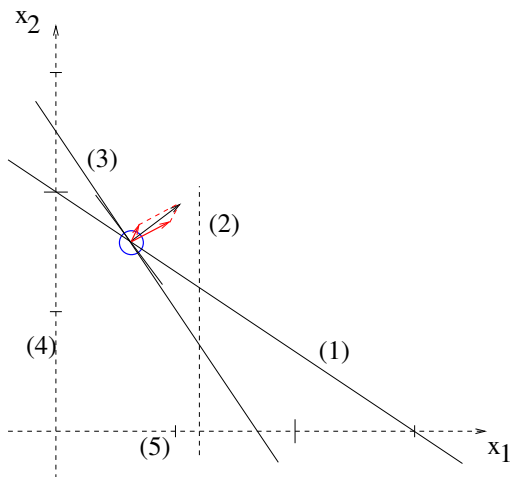
Vad händer med baslösningen om jag ökar högerledet i bivillkor 1 ( $b_1$ ) lite?

Då rör sig lösningen i motsatt riktning mot om jag ökade motsvarande slackvariabel ( $x_3$ ) lite.

Effekten på målfunktionsvärdet blir den motsatta:  $\hat{c}_3 = -1/5$ , så  $y_3 = 1/5$ .

Läs av i målfunktionsraden.

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .



Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = (x_B, x_N)$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = (c_B, c_N)$ .

1. Beräkna  $B^{-1}$ .

2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}, x_N = 0$ .

3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .

4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).

6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.

7. Välj **inkommande** variabel  $x_k$  så att **förbättring** fås:  $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$ .

8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas:  $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$ .

9. Om  $\hat{a}_k \leq 0$ : Stopp, problemet har obegränsad lösning.

10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls:  $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i: \hat{a}_{ik} > 0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$ .

11. Byt bas: Uppdatera  $B$ ,  $N$ ,  $c_B$  och  $c_N$ . Gå till 1.

## Degeneration och konvergens

### Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

## Degeneration och konvergens

### Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning:  $\hat{b}_i = 0$ .

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

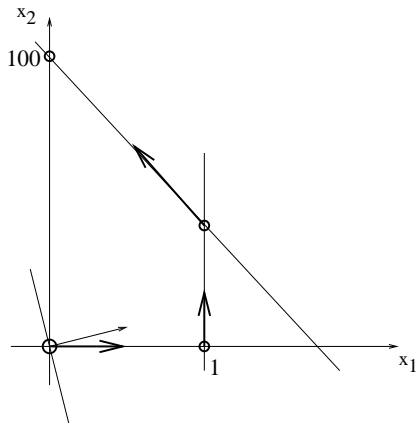
Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling är ovanligt i praktiken. Kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

## Västa fall för simplexmetoden

Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 10x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 \leq 1 \\ & 20x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Besöker *alla* extrempunkter.

## Vårt första exempel

Variabeldefinition:

$x_1$  = antal enheter Optimus som görs varje timme.

$x_2$  = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \text{ (knappar)} \\ & x_1 \leq 6 \quad (2) \text{ (optik)} \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (3) \text{ (monteringstid)} \\ & x_1 \geq 0 \quad (4) \\ & x_2 \geq 0 \quad (5) \end{aligned}$$

## Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler,  $n$ .

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j \\ \text{då} \quad & 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Simplexmetoden kräver  $2^n - 1$  iterationer.

Varje iteration kräver  $O(m^2)$  (uppdatering av  $B^{-1}$ ).

Empiriskt: I medel  $m^3$  iterationer för verkliga problem.

## LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \quad (y_1) \\ & x_1 \leq 6 \quad (2) \quad (y_2) \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (3) \quad (y_3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualvariabel:  $y_i$  pris på råvara  $i$ .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{aligned} \min \quad & v = 30y_1 + 6y_2 + 50y_3 \\ \text{då} \quad & 2y_1 + y_2 + 6y_3 \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 3y_1 + 4y_3 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Komplementaritetsvillkoren:

Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.

Produkten görs ej om kostnaden blir högre än intäkten.

## LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{då} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ y_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= c^T x \\ \text{då} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad v &= b^T y \\ \text{då} \quad A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

## LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

### Svaga dualsatsen

Om  $x$  är tillåten i primalen och  $y$  är tillåten i dualen så  $c^T x \leq b^T y$ .

(bevis) (rita)

### Följdsats

Om  $\bar{x}$  är tillåten i primalen,  $\bar{y}$  är tillåten i dualen och  $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$  så är  $\bar{x}$  optimal i primalen och  $\bar{y}$  optimal i dualen.

(se figur)

### Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

Båda kan dock sakna lösning.

## LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel,  $y_i$ , anger hur mycket primala bivillkor  $i$  "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

**Komplementaritet** (i ord):

Om primala bivillkor  $i$  inte är aktivt, måste  $y_i = 0$ .

Om duala bivillkor  $j$  inte är aktivt, måste  $x_j = 0$ .

### Komplementaritetsvillkoren

Primallösningen  $x$  och duallösningen  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren om

$$y_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

## LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T (Ax - b) = 0$$

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

### Sats

Om  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $c^T x = b^T y$ .

(peka på bevis)

### Följdsats

Om  $x$  är tillåten i primalen,  $y$  är tillåten i dualen och  $x$  och  $y$  uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är  $x$  optimal i primalen och  $y$  optimal i dualen.

Åt andra hållet:

### Starka dualsatsen

Om  $x$  och  $y$  är optimallösningar så gäller  $c^T x = b^T y$ .



Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning,  $x^*$ , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning,  $y^*$ , och  $c^T x^* = b^T y^*$ .
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

Optimalitetsvillkor (KKT)

Primal tillåtenhet +  
Dual tillåtenhet +  
Komplementaritet  
= Optimalitet

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	y fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$
x fri	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal/dual:} \\ \max z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual/primal:} \\ \min v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

*	*
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	y fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$
x fri	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$\begin{array}{rcl} \max z = & 2x_1 & + 3x_2 - 5x_3 \\ \text{då} & 2x_1 & + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \quad (1) \quad (y_1) \\ & 7x_1 & + x_2 - x_3 \geq 16 \quad (2) \quad (y_2) \\ & 3x_1 & + 4x_2 + 4x_3 = 43 \quad (3) \quad (y_3) \\ & x_1 & \geq 0, \quad x_2 \text{ fri}, \quad x_3 \leq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{rcl} \min v = & 10y_1 & + 16y_2 + 43y_3 \\ \text{då} & 2y_1 & + 7y_2 + 3y_3 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 3y_1 & + y_2 + 4y_3 = 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y_1 & - y_2 + 4y_3 \leq -5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & y_1 & \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \text{ fri} \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$\begin{array}{l} y_1 (2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10) = 0 \\ y_2 (7x_1 + x_2 - x_3 - 16) = 0 \\ x_1 (2y_1 + 7y_2 + 3y_3 - 2) = 0 \\ x_3 (2y_1 - y_2 + 4y_3 + 5) = 0 \end{array}$$

## Dualitet och baslösningar

Att stoppa in en optimal baslösning i LP-dualen och använda komplementaritet ger följande.

Lösning:  $x_B = B^{-1}b$ ,  $x_N = 0$ ,  $y = B^{-1T}c_B$ .

Dual tillåtenhet  $\Leftrightarrow$  primal optimalitet.

### Starka dualsatsen, version 2

Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning,  $x^* = B^{-1}b$ , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, som ges av  $y^* = B^{-1T}c_B$ .

Både primalen och dualen har det optimala målfunktionsvärdet  $z^* = c_B^T B^{-1}b$ .

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 & (1) & \quad (y_1) \\ x_1 &\leq 6 & (2) & \quad (y_2) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 & (3) & \quad (y_3) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 30y_1 + 6y_2 + 50y_3 \\ \text{då} \quad 2y_1 + y_2 + 6y_3 &\geq 4 & (1) & \quad (x_1) \\ 3y_1 + 4y_3 &\geq 3 & (2) & \quad (x_2) \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$\begin{aligned} y_1 (2x_1 + 3x_2 - 30) &= 0 \\ y_2 (x_1 - 6) &= 0 \\ y_3 (6x_1 + 4x_2 - 50) &= 0 \\ x_1 (2y_1 + y_2 + 6y_3 - 4) &= 0 \\ x_2 (3y_1 + 4y_3 - 3) &= 0 \end{aligned}$$

## LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

Basvariabler  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$ .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt  $\Rightarrow y_2 = 0$ .

Villkor 3 aktivt.

$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4$ .

$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3$ .

Dual optimallösning:  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

## LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Dual optimallösning:  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

## LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & v = 10y \\ \text{då} \quad & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Skriv som:  $\min v = 10y$  då  $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning:  $y = 5/2, v = 25$ .

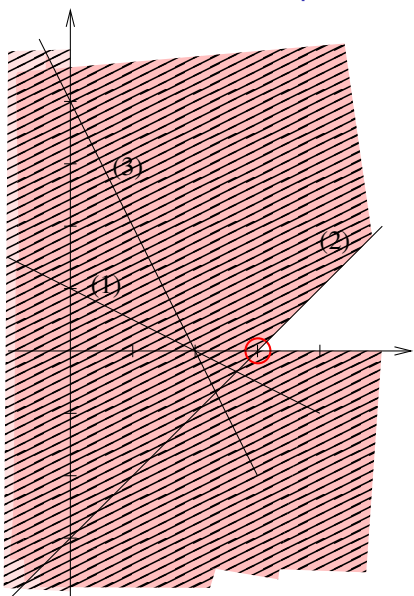
Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ .

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$ . Problemet löst.

Det blev en metod!  $\max_j(c_j/a_j)$  ger bästa  $x_j$ . Ta med den.

## LP-dualitet: Exempel



Dual optimalpunkt:  $y_1 = 3, y_2 = 0$ .

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \quad (y_1) \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad (y_2) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & v = 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad & y_1 + 2y_2 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & y_1 - y_2 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y_1 + y_2 \geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ & y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

## LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \quad (y_1) \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad (y_2) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & v = 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad & y_1 + 2y_2 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & y_1 - y_2 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y_1 + y_2 \geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ & y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning:  $y_1 = 3, y_2 = 0, v = 15$ .

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.  $\Rightarrow x_1 = 0, x_3 = 0$ .

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$ . Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning:  $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 0, z = 15$ . (Kolla gärna  $z$ .)

## Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

$$\text{Starka dualsatsen: } z = c^T x = b^T y \text{ eller } z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$$

Derivatn av  $z$  med avseende på  $b_i$  är  $y_i$ .

### Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion:  $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$ .

Stoppa in dual optimallösning:  $y_1 = 3, y_2 = 0$  ger  $v = 3b_1$ .

En enhets ökning av  $b_1$  ger 3 enheters ökning av  $v$ , dvs.  $z$ .

En enhets ökning av  $b_2$  ger ingen ändring av  $v$ , dvs.  $z$ .

## Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte  $B^{-1}$ .

Stoppa in nya  $b$  och/eller  $c$  i  $x_B = B^{-1}b$ ,  $y = B^{-1^T} c_B$  och  $z = c_B^T x_B$ .

Ny variabel,  $x_j$ , med kolumn  $a_j$  och målfunktionskoefficient  $c_j$ :

Ska den ökas? Kolla primal optimalitet:  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y^* \leq 0$ .

## Skuggpriser

I en viss baslösning har vi  $x_B = B^{-1}b$  och  $y = B^{-1^T} c_B$ .

Skuggpriserna är oförändrade så länge som  $B^{-1}$  och  $c_B$  är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i  $b$  ger  $B^{-1}b \not\geq 0$ , ändras optimal baslösning/skuggpriser.

$B^{-1}b \geq 0$  ger gränser på  $b$  för oförändrad optimallösning.

## Vårt musexempel

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \quad (y_1) \text{ (knappar)} \\ & x_1 \leq 6 \quad (2) \quad (y_2) \text{ (optik)} \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (3) \quad (y_3) \text{ (monteringstid)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad & v = 30y_1 + 6y_2 + 50y_3 \\ \text{då} \quad & 2y_1 + y_2 + 6y_3 \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \text{ (Optimus)} \\ & 3y_1 + 4y_3 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \text{ (Rullmus)} \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimaltablå:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	1/5	0	3/5	36
$x_4$	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
$x_1$	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
$x_2$	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x <sub>4</sub>	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x <sub>1</sub>	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x <sub>2</sub>	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

**Skuggpriser:**  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av  $b_1$ , så vi tjänar  $y_1 = 1/5$  per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta? Kolla  $B^{-1}b \geq 0$ .

Kan läsa av  $B^{-1}$  under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x <sub>4</sub>	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x <sub>1</sub>	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x <sub>2</sub>	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger  $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$ .

Så vi tjänar 1/5 kr per ytterligare knapp, för  $b_1$  upp till 37.5.

## Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel,  $x_6$ : kolumn:  $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  målfunktionskoefficient:  $c_6 = 3$ .

Dual optimallösning (skuggpriser) :  $y_1 = 1/5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 3/5$ .

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt  $x_6$  förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm  $c_6$  så att  $\hat{c}_6 > 0$ :

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0 \text{ om } c_6 > 3.2.$$

För att få lite marginal sätter man priset så att intäkten blir 3:50 kr.

## Känslighetsanalys från koder

Indatafil: (GMPL)

```
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;

maximize obj:    4*x1 + 3*x2;
subject to con1: 2*x1 + 3*x2 <= 30;
subject to con2: x1 <= 6;
subject to con3: 6*x1 + 4*x2 <= 50;
end;
```

Lösning av problemet: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod -o lp-ko1.sol
```

## Känslighetsanalys från koder

På skärmen (rensat):

```
Reading model section from lp-ko1.mod...
11 lines were read
Model has been successfully generated
GLPK Simplex Optimizer, v4.44
4 rows, 2 columns, 7 non-zeros
Preprocessing...
2 rows, 2 columns, 4 non-zeros
Scaling...
A: min|aij| = 2.000e+00 max|aij| = 6.000e+00 ratio = 3.000e+00
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part = 2
* 0: obj = 0.000000000e+00 infeas = 0.000e+00 (0)
* 3: obj = 3.600000000e+01 infeas = 0.000e+00 (0)
OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used: 0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (108000 bytes)
Writing basic solution to 'lp-ko1.sol'...
```

## Känslighetsanalys från koder

Lösning av problemet med känslighetsanalys: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod --bounds lp-ko1.bnd
```

I utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

```
GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT
Problem: lpluma
Objective: obj = 36 (MAXimum)
```

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Lower bound Upper bound	Activity range	Obj
1	obj	BS	36.00000	-36.00000 .	-Inf +Inf	30.00000 36.00000	-1.0
2	con1	NU	30.00000	. .20000	-Inf 30.00000	22.50000 37.50000	-.1
3	con2	BS	3.00000	3.00000 .	-Inf 6.00000	. 8.33333	-2.0
4	con3	NU	50.00000	. .60000	-Inf 50.00000	40.00000 60.00000	-.1

## Känslighetsanalys från koder

I utdatafilen lp-ko1.sol (rensat):

```
Problem: lp
Rows: 4
Columns: 2
Non-zeros: 7
Status: OPTIMAL
Objective: obj = 36 (MAXimum)
```

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	obj	B	36			
2	con1	NU	30		30	0.2
3	con2	B	3		6	
4	con3	NU	50		50	0.6

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	x1	B	3	0		
2	x2	B	8	0		

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

## Känslighetsanalys från koder

Sida 2 i utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

```
GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT
Problem: lpluma
Objective: obj = 36 (MAXimum)
```

No.	Column name	St	Activity	Obj coef Marginal	Activity range	Obj coef range	Obj value break po
1	x1	BS	3.00000	4.00000 .	-Inf 6.00000	2.00000 4.50000	30.00000 37.50000
2	x2	BS	8.00000	3.00000 .	3.50000 10.00000	2.66667 6.00000	33.33333 60.00000

End of report

Att tänka på inför lab 2:

Skuggpris? Reducerad kostnad?

Vad händer om man gör fel i simpexmetoden?