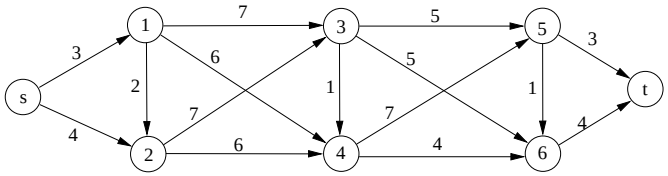
Vägar: Billigaste väg

En student ska cykla från bostaden, s, till tentasalen, t, på kortast möjliga tid (för att inte komma försent).



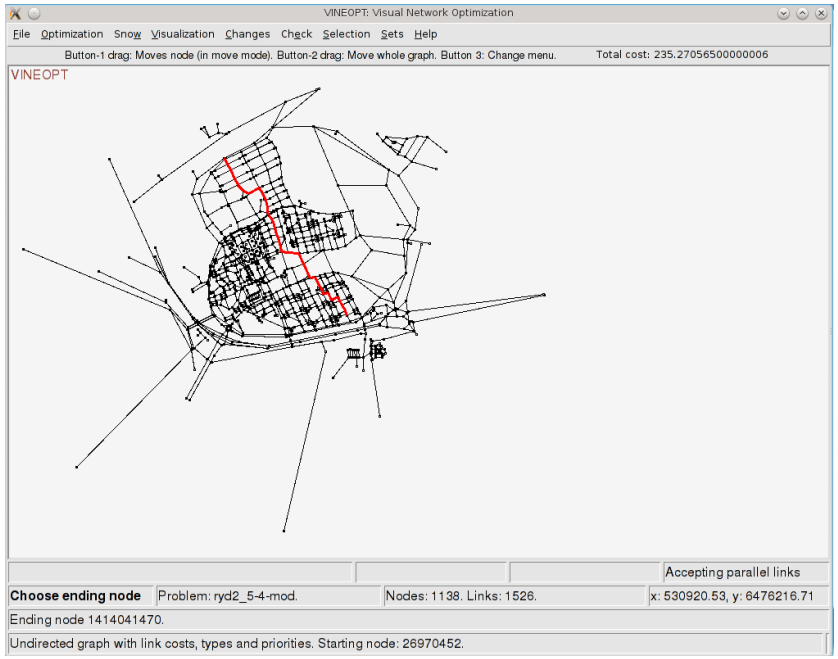
Indata: Riktad graf med bågkostnader c, start/slutnod s, t.

Billigaste väg-problemet: Finn en väg från s till t med minimal kostnad.

Kostnaden för en väg är summan av kostnaderna för de bågar som ingår i vägen.

Skicka en (odelbar) enhet från s till t på billigaste sätt.

Billigaste väg



Billigaste väg: Matematisk modell

Variabeldefinition: $x_{ij} = 1$ om båge (i,j) ingår i vägen.

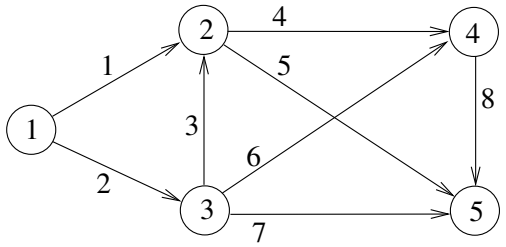
$$\min \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{då} \quad \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{då } i = s \\ 1 & \text{då } i = t \\ 0 & \text{f ö} \end{cases} \quad \text{för alla } i \in N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{för alla } (i,j) \in B$$

Nodjämviktsvillkor: (in - ut)

Exempel



$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} -x_{12} & -x_{13} & & & & & & & = & -1 \quad (1) \\ x_{12} & & +x_{32} & -x_{24} & -x_{25} & & & & = & 0 \quad (2) \\ & x_{13} & -x_{32} & & & -x_{34} & -x_{35} & & = & 0 \quad (3) \\ & & & x_{24} & & +x_{34} & & -x_{45} & = & 0 \quad (4) \\ & & & & x_{25} & & +x_{35} & +x_{45} & = & 1 \quad (5) \end{array}$$

Anslutningsmatris: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Billigaste väg: Matematisk modell i vektor/matrisform

Definition

En matris A är **fullständigt unimodulär** om varje underdeterminant har värdet 0, 1 eller -1.

Sats

Varje anslutningsmatris, A, är fullständigt unimodulär.

Sats

Om A är en fullständigt unimodulär matris och b är en heltalsvektor, så är alla extrempunkter till mängden $X = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ heltaliga.

Sats

Ett LP-problem vars bivillkorsmatris är en anslutningsmatris och vars högerled är heltaligt, har heltalig optimallösning.

Slutsats

Billigaste väg-problem kan betraktas som LP-problem.

Billigaste väg

LP-formulering:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} \\ \text{då} \quad & \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{då } i = s \\ 1 & \text{då } i = t \\ 0 & \text{f ö} \end{cases} \quad \text{för alla } i \in N \\ & x_{ij} \geq 0 \ \text{ för alla } (i,j) \in B \end{aligned}$$

Slutsats

Om LP-formuleringen av billigaste väg-problemet har ändligt optimum, så är alla x_{ij} lika med 1 eller 0 i optimallösningen.

Lösningsmetoder för billigaste vägproblemet

Summering av $Ax = b$ ger $0 = 0$.

$Ax = b$ innehåller ett redundant bivillkor (raderna är linjärt beroende).

y_i: dualvariabel för nod i.

LP-dualen:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_t - y_s \\ \text{då} \quad & y_j - y_i \leq c_{ij} \ \text{ för alla } (i,j) \end{aligned}$$

Ett redundant bivillkor i primalen ger en frihetsgrad i dualen. Sätt $y_s = 0$.

LP-dualitet ger:

Om y är en optimal duallösning (med $y_s = 0$), så är y_k är lägsta kostnaden för att komma till nod k från s.

Vi kallar y_i nodpris.

Nodmärkningsmetoder

LP-dual: max y_t då $y_j - y_i \leq c_{ij}$ för alla (i,j) (samt $y_s = 0$)

Bivillkoren: $y_j \leq c_{ij} + y_i$.

Målfunktionen: max $y_t \Rightarrow$ öka alla nodpriser så mycket som möjligt.

Slutsats: Sätt $\boxed{y_j = \min_i (c_{ij} + y_i).}$

Primal tolkning: Vi vill finna billigaste sättet att komma till nod j.

Märk nod j med (y_j, p_j), där p_j är det i som gav min (föregångaren).

Praktisk fråga: I vilken ordning skall vi undersöka noderna?

Tre olika fall:
1. Allmänt (negativa kostnader och cykler).
2. Inga negativa kostnader.
3. Inga cykler.

Billigaste väg

Negativa kostnader och cykler: Fords metod

Finns ingen ordning så att nodmärkningar säkert inte behöver göras om.

Avsökning av nod: Kolla utgående bågar. Uppdatera alla nodpriser som blir lägre. Om inget nodpris kan sänkas är noden avsökt.

Om en avsökt nod får lägre nodpris, blir den oavsökt.

Stoppkriterium: Alla noder avsökta.

Cykel med negativ kostnad ger obegränsad lösning. Nodpriserna i cykeln kommer att uppdateras ett oändligt antal gånger. Man kan sluta efter $|N|$ gånger.

Billigaste väg: Fords metod

0. Sätt $y_s = 0$ och $y_j = M$ för alla andra noder.
1. Finn oavsökt nod (k) med lägsta nodpris ($\min_j y_j$).
2. Uppdatera de nodpriser som blir lägre via y_k.
Om en avsökt nod får lägre nodpris, blir den oavsökt.
3. Markera nod k som avsökt.
4. Om all noder är avsökta: Stopp.
5. Gå till 1.

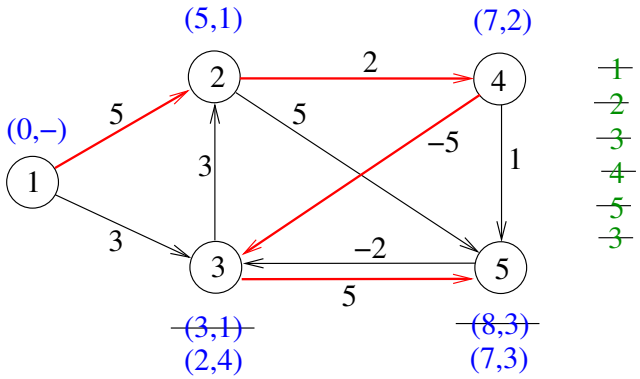
Billigaste vägen nystas upp bakifrån mha p_j.

Alla nodpriser kan ändras.

I steg 1 och 2 beaktas alla noder: Komplexitet $O(|N|^3)$.

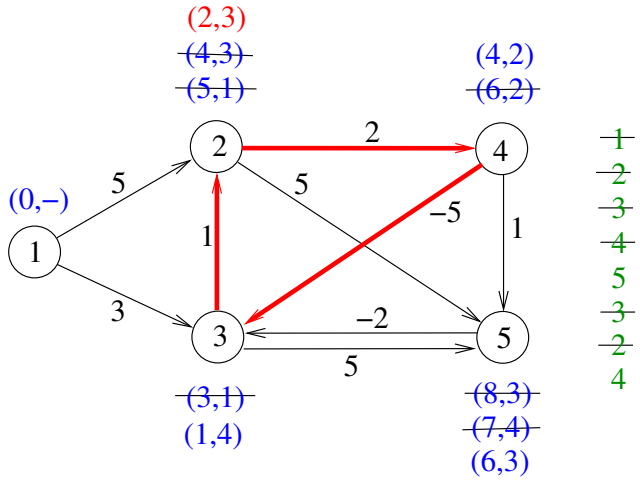
Obs: Först görs nodmärkningen helt färdigt, dvs. den duala lösningen finnes. Sedan hittar man vägen.

Fords metod för billigaste väg: Exempel



Alla noder avsökta. Finn väg baklänges.
Billigaste väg: 1 - 2 - 4 - 3 - 5. Kostnad: 7.

Fords metod för billigaste väg: Exempel 2



Vi kommer att fortsätta sänka nodpriserna för nod 4, 3, 2.
Negativ cykel: 2 - 4 - 3 - 2.
Oändligt bra primal lösning.
Ingen tillåten duallösning.

Nodmärkningsmetoder

Ickenegativa kostnader: Dijkstras metod

Arbeta med temporära och permanenta nodmärkningar.

De temporära ändras, och görs till sist permanenta.

De permanenta ändras inte.

Det lägsta temporära nodpriset görs permanent.

Frånvaron av negativa kostnader gör att inga nodpriser kan sänkas genom att gå i ytterligare en båge.

Det blir alltid lite dyrare. Minimera fördyringen.

De permanenta nodmärkningar är minimala och behöver inte ändras.

(Försök inte ens.)

Effektivare än Fords metod, men kanske lite krångligare.

Billigaste väg: Dijkstras metod

A: permanent märkta noder.

0. Sätt $y_s = 0$, $y_j = c_{sj}$ om båge (s, j) finns, och $y_j = M$ för alla andra $j \neq s$, samt $A = \{s\}$.

1. Finn nod (k) med lägsta temporära nodpris: $y_k = \min_{j \notin A} y_j$.

Lägg till k till A, dvs. gör märkningen permanent.

2. Om slutnoden (eller alla noder) permanent märkt: Stopp.

3. Uppdatera de temporära nodpriser som blir lägre via y_k, dvs. om $c_{kj} + y_k < y_j$ för $j \notin A$.

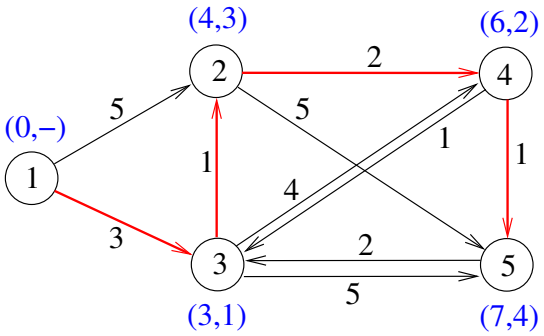
4. Gå till 1.

Viktigt för effektiviteten: Titta inte på permanent märkta noder, $j \in A$, i steg 1 och 3. Komplexitet $O(|N|^2)$.

Billigaste vägen nystas upp bakifrån med föregångare p_j (börja med $j = t$).

Obs: Först görs nodmärkningen helt färdigt. Sedan hittar man vägen.

Dijkstras metod för billigaste väg: Exempel



Nysta upp vägen baklänges.
Billigaste väg: 1 - 3 - 2 - 4 - 5. Kostnad: 7.
Nodpriserna ger optimal duallösning.

Nodmärkningsmetoder, inga cykler

Acyklisk graf:

Sortera noderna så att $i < j$ för alla bågar $(i, j) \in B$.

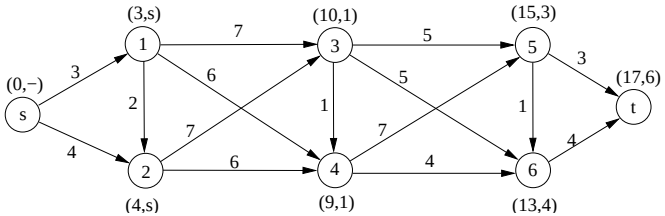
Märk noderna i den ordningen: $y_j = \min_{i<j}(c_{ij} + y_i)$ för $j = 1, \ldots, n$.

(Bellmans ekvationer. Används för dynamisk programmering.)

Man kan aldrig gå baklänges, så inga nodmärkningar behöver göras om.

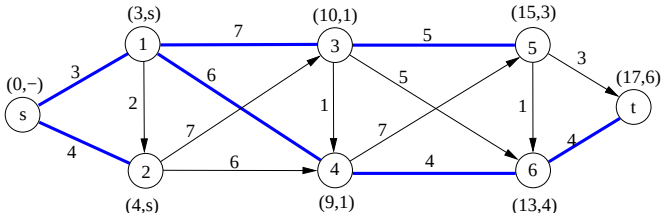
Billigaste väg

Optimala nodmärkningar:



Alla noder har en märkning.

Kan nysta upp från vilken nod som helst.



Vi får billigaste väg från s till alla andra noder.

Billigaste väg: Generaliseringar

Kan lösas med samma metoder.

Billigaste väg	$\min \sum_{ij} c_{ij}$	$y_j = \min_i(c_{ij} + y_i)$	$y_s = 0$
Dyraste väg	$\max \sum_{ij} c_{ij}$	$y_j = \max_i(c_{ij} + y_i)$	$y_s = 0$
Min produkt	$\min \prod_{ij} c_{ij}$	$y_j = \min_i(c_{ij} \cdot y_i)$	$y_s = 1$
Max produkt	$\max \prod_{ij} c_{ij}$	$y_j = \max_i(c_{ij} \cdot y_i)$	$y_s = 1$
Min max	$\min \max_{ij} c_{ij}$	$y_j = \min_i(\max(c_{ij}, y_i))$	$y_s = 0$
Max min	$\max \min_{ij} c_{ij}$	$y_j = \max_i(\min(c_{ij}, y_i))$	$y_s = M$

I de fyra sista fallen förutsätts $c_{ij} \geq 0$ för alla (i, j).

Billigaste väg: Alla till alla

Floyd-Warshalls metod för att finna billigaste väg mellan alla nodpar:

1. Sätt $d_{ij} = c_{ij}$ för alla i, j.
2. För $k = 1, \ldots, |N|$,
   för $i = 1, \ldots, |N|$,
   för $j = 1, \ldots, |N|$
   sätt $d_{ij} = \min(d_{ij}, d_{ik} + d_{kj})$.

Komplexitet $O(|N|^3)$.

Kan användas för att göra om ett TSPr till ett ΔTSP(r).

Flöde i nätverk

Variabeldefinition: x_{ij} = flöde i båge (i, j).

Bågdata för båge (i, j):

- c_{ij}: flödeskostnad per enhet.
- u_{ij}: övre gräns för flödet.
- l_{ij}: undre gräns för flödet.

Bivillkor: $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

Noddata för nod i:

- b_i: källstyrka/sänkstyrka. (måste vara givet)

Nodjämviktsvillkor: $\sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = b_i$ för alla $i \in N$ (in - ut)

Krav på indata: $\sum_i b_i = 0$.

Flöde i nätverk

Sats

Varje anslutningsmatris är fullständigt unimodulär.

Slutsats

Flödesproblem kan betraktas som LP-problem. Flödet blir automatiskt heltal.

Obs: Inga andra bivillkor får finnas.

Minkostnadsflödesproblemet

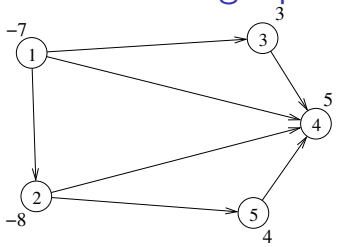
Skicka efterfrågade mängder så billigt som möjligt.

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{då} \quad \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = b_i \quad \text{för alla } i \in N$$

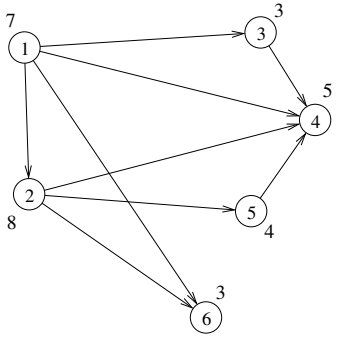
$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \text{för alla } (i,j) \in B$$

Nätverksformuleringstips

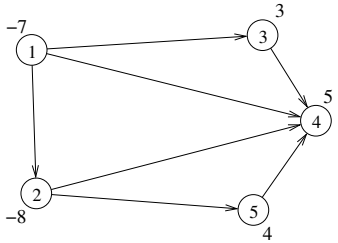


Mer tillgång än efterfrågan: Tillgång: 15, efterfrågan: 12.

Alternativ 1: Inför dummy-sänka, för varor som egentligen inte skickas.



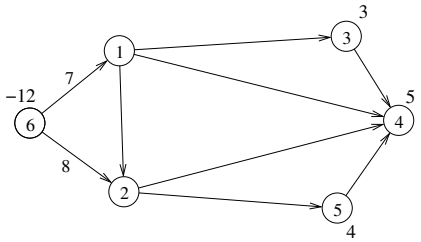
Nätverksformuleringstips



Mer tillgång än efterfrågan: Tillgång: 15, efterfrågan: 12.

Alternativ 2: Inför superkälla, med tillgång lika med total efterfrågan.

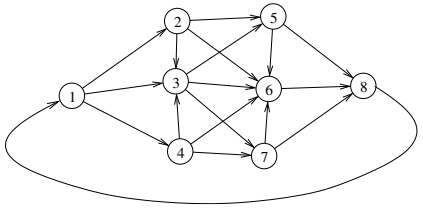
Begränsa flödet i bågar från superkällan till tidigare källor, som nu blir mellannoder.



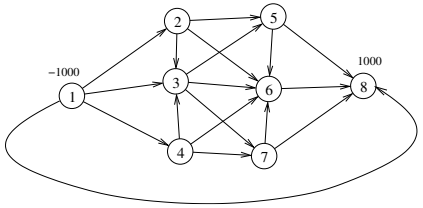
Nätverksformuleringstips

Köp allt i nod 1 och släng allt i nod 8, men vet inte hur mycket.

Alternativ 1: Inför återbåge, nod 1 och 8 mellannoder. Cirkulerande flöde.



Alternativ 1: Inför slackbåge, nod 1 sänka och nod 8 sänka av styrka 1000.



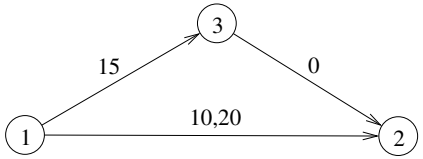
Nätverksformuleringstips

Konvex styckvis linjär kostnad:

De först 20 enheterna kostar 10 kr/st, sedan 15 kr/st.

Inför en parallell båge för det dyrare flödet.

En extranod behövs om parallella bågar inte accepteras.



Observera: Den billigaste bågen kommer automatiskt att användas fullt ut, innan den dyrare börjar användas.

Detta fungerar inte för konkava kostnader.

Vägar: Maxflödesproblemet

Hur mycket kan man maximalt få igenom en fabrik med många stationer, och vilka stationer är det som är begränsande?

Indata: Riktad graf $G = (N, B)$ med bågkapaciteter u, start/slutnod s, t.

Skicka så mycket som möjligt från s till t.

Variabeldefinition: x_{ij} = flöde i båge (i, j).

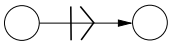
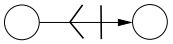
$$\begin{aligned} \max \quad & f \\ \text{då} \quad & \sum_{j:(j,i)\in B} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in B} x_{ij} = \begin{cases} -f & \text{då } i = s \\ f & \text{då } i = t \\ 0 & \text{f ö} \end{cases} \quad \text{för alla } i \in N \\ & 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \text{för alla } (i,j) \in B \\ & f \text{ fri} \end{aligned}$$

Lösningsmetod för maxflödesproblemet

Påfyllnadsmetoden (Edmonds-Karp)

0. Börja från noll.
1. Finn maximal **flödesökande väg** från s till t. Avbryt om ingen väg finns.
2. Skicka så mycket som möjligt den vägen.
3. Ändra tillåtna riktningar.
4. Gå till 1.

Tillåtna riktningar:

$x_{ij} = 0$:	Framåt (öka).	
$0 < x_{ij} < u_{ij}$:	Framåt och bakåt.	
$x_{ij} = u_{ij}$:	Bakåt (minska).	

Maxflödesproblemet

Sats

Varje tillåtet flöde ger en *undre* gräns på f^*.
Kapaciteten hos varje (s, t)-snitt ger en *övre* gräns på f^*.

Sats

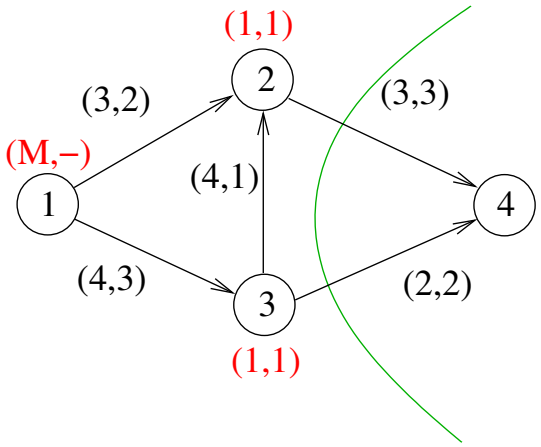
Kapaciteten hos ett *minsnitt* är lika med den maximala flödesstyrkan, f^*.

Sats

Flödesstyrkan är maximal (och lika med kapaciteten hos ett minsnitt) om och endast om en flödesökande väg saknas.

En flödesökande väg finnes metodiskt med Dijkstras metod (max av min).

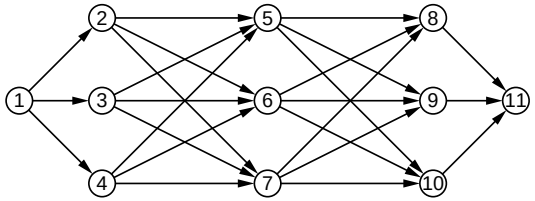
Maxflöde: Exempel



Maxflöde uppnått. Minsnittet går mellan märkta och omärkta noder.
Maxflöde: 5.

Vägar: Dynamisk programmering

Billigaste väg-problem i acyklisk nivåindelad graf. Tid!



Nodmärkningsmetod (Bellmans ekvationer): Ta en nivå, S_k, i taget:

- $y_1 = 0$.
- För $k = 1, \ldots, N$:
  För varje $j \in S_k$: Sätt $y_j = \min_{i \in S_{k-1}} (c_{ij} + y_i)$.

Ordningen inom en nivå oviktig.

Vägen kommer att passera *en* av noderna i varje nivå. Vet ej vilken.

Möjliga målfunktioner: min $\sum$, max $\sum$, min $\prod$, max $\prod$, min max, max min.

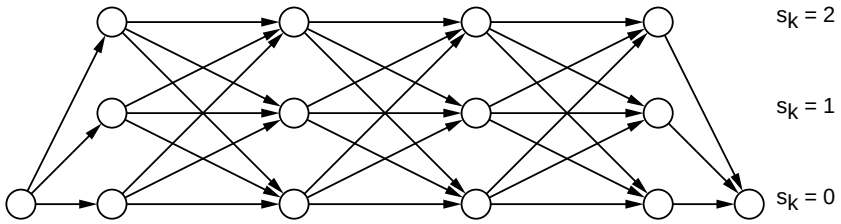
Dynamisk programmering: Lagerhållningsproblem

Kan lösa allt som "är" ett väg-problem i en acyklisk nivåindelad graf.

Exempel: **Lagerhållningsproblem**

Nod: s_k = antal enheter i lager efter period k.

Hur komma dit: x_k = antal enheter som köps/produceras/säljs i period k.



Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem

$$\min \sum_j c_j x_j \quad \text{då} \quad \sum_j a_j x_j \leq b, \quad 0 \leq x_j \leq u_j \text{ och heltal, för alla } j$$

Varje variabel ses som en nivå.

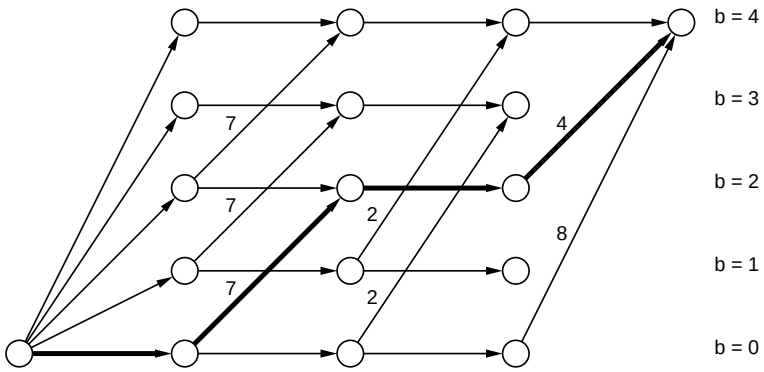
Varje nivå innebär ett ökat utnyttjande av den gemensamma resursen b.

Nod: s_k = den del av högerledet b som får användas till de k första variablerna.

Koppling mellan nivåerna: $s_{k-1} = s_k - a_k x_k$

Dynamisk programmering: Kappsäcksproblem

Ex: $\max 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$
$\quad$ då $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 4$,
$\quad\quad x_1 \in \{0,1\}$, $x_2 \in \{0,1\}$, $x_3 \in \{0,1,2\}$



Dynamisk programmering: Beräkningar

$\max 7x_1 + 2x_2 + 4x_3$
$\quad$ då $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 4$, $x_1 \in \{0,1\}$, $x_2 \in \{0,1\}$, $x_3 \in \{0,1,2\}$

Kan göra beräkningarna i en tabell p.g.a. strukturen hos nätverket.

$x_1 \backslash s_1$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	-	-	7	7	7
$f_1(s_1)$	0	0	7	7	7
$\hat{x}_1(s_1)$	0	0	1	1	1

$x_2 \backslash s_2$	0	1	2	3	4
0	0	0	7	7	7
1	-	-	-	2	2
$f_2(s_2)$	0	0	7	7	7
$\hat{x}_2(s_2)$	0	0	0	0	0

$x_3 \backslash s_3$	0	1	2	3	4
0	0	0	7	7	7
1	-	-	4	4	11
2	-	-	-	-	8
$f_3(s_3)$	0	0	7	7	11
$\hat{x}_3(s_3)$	0	0	0	0	1

Uppnystning:
$s_3 = 4$, $\quad x_3 = 1$,
$s_2 = 2$, $\quad x_2 = 0$,
$s_1 = 2$, $\quad x_1 = 1$,
$z = 11$.