Linjär algebra

TATA16, höstterminen 2026

Martin Křepela

Matematiska institutionen, Linköpings universitet

martin.krepela@liu.se

Dokumentversion: 2 september 2026

Om kursen

Vad är linjär algebra och vad är den bra till?

Allmänt:

Ett sätt att beskriva och hantera flerdimensionella objekt.

Vad är linjär algebra och vad är den bra till?

Allmänt:

Ett sätt att beskriva och hantera flerdimensionella objekt.

Klassisk motivering:

Geometri: kurvor, ytor, kroppar osv. i 2D-planet och 3D-rummet.

Fysik: storheter med riktning i rummet, beskrivning av 3D-verkligheten.

Vad är linjär algebra och vad är den bra till?

Allmänt:

Ett sätt att beskriva och hantera flerdimensionella objekt.

Klassisk motivering:

Geometri: kurvor, ytor, kroppar osv. i 2D-planet och 3D-rummet.

Fysik: storheter med riktning i rummet, beskrivning av 3D-verkligheten.

Aktuell motivering:

Hantering av data (3D räcker inte!)

Vad är linjär algebra och vad är den bra till?

Inom biologi (bland annat):

- Matematisk modellering av biologiska system (diff-ekvationer)
- Hantering och ”rengöring” av stora experimentella data
- Mönsterigenkänning inom komplexa processer, tolkning och rekonstruktion av bilder
- Hela AI är linjär algebra och statistik

TATA 16

Hemsida: courses.mai.liu.se/GU/TATA16

- Innehåller alla slags äldre och nyare material.
- Obs föreläsarbyte: vi kan avvika från tidigare struktur, innehållet dock förblir.
- Tidsplanen är preliminär, ordningen kan ändras.

TATA 16

Hemsida: courses.mai.liu.se/GU/TATA16

- Innehåller alla slags äldre och nyare material.
- Obs föreläsarbyte: vi kan avvika från tidigare struktur, innehållet dock förblir.
- Tidsplanen är preliminär, ordningen kan ändras.

Kursbok: L. Andersson m.fl.: *Linjär algebra med geometri*. Studentlitteratur.

TATA 16

Hemsida: courses.mai.liu.se/GU/TATA16

- Innehåller alla slags äldre och nyare material.
- Obs föreläsarbyte: vi kan avvika från tidigare struktur, innehållet dock förblir.
- Tidsplanen är preliminär, ordningen kan ändras.

Kursbok: L. Andersson m.fl.: *Linjär algebra med geometri*. Studentlitteratur.

Vidare källor (icke-obligatoriska):

3Blue1Brown: Essence of Linear Algebra
(korta YT-videor)

D. Margalit, J. Rabinoff: *Interactive Linear Algebra*
(interaktiv bok från Georgia Tech)

C. D. Meyer: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, 2000
(matematisk bok på riktigt)

Undervisningsmoment: föreläsningar + lektioner + mentorspass.

TATA 16

Undervisningsmoment: föreläsningar + lektioner + mentorspass.

Kontrollskrivning: 29 oktober

Tenta: 16 december

Vektorer

Vad är reella tal?

Ett reellt tal kan tolkas som en punkt på en rät horisontell linje:

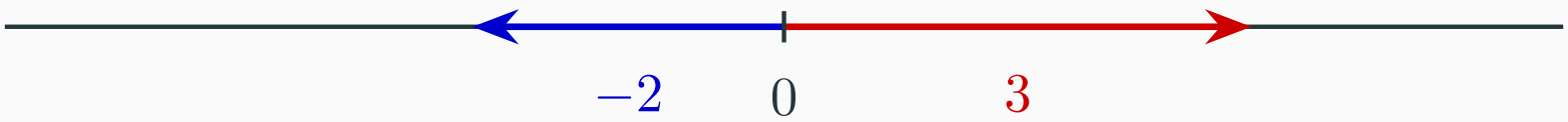


Vad är reella tal?

Ett reellt tal kan tolkas som en punkt på en rät horisontell linje:



Eller som en rörelse från noll till denna punkt:

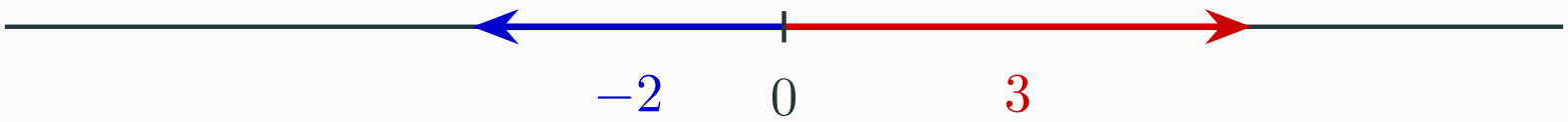


Vad är reella tal?

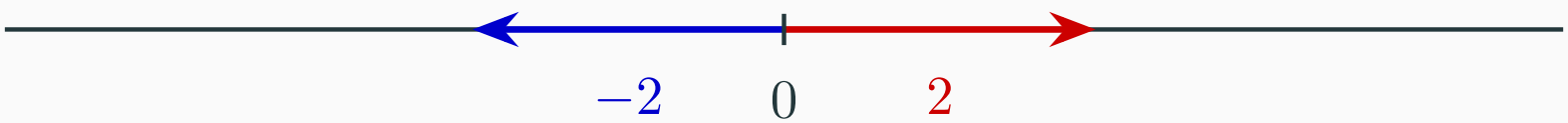
Ett reellt tal kan tolkas som en punkt på en rät horisontell linje:



Eller som en rörelse från noll till denna punkt:

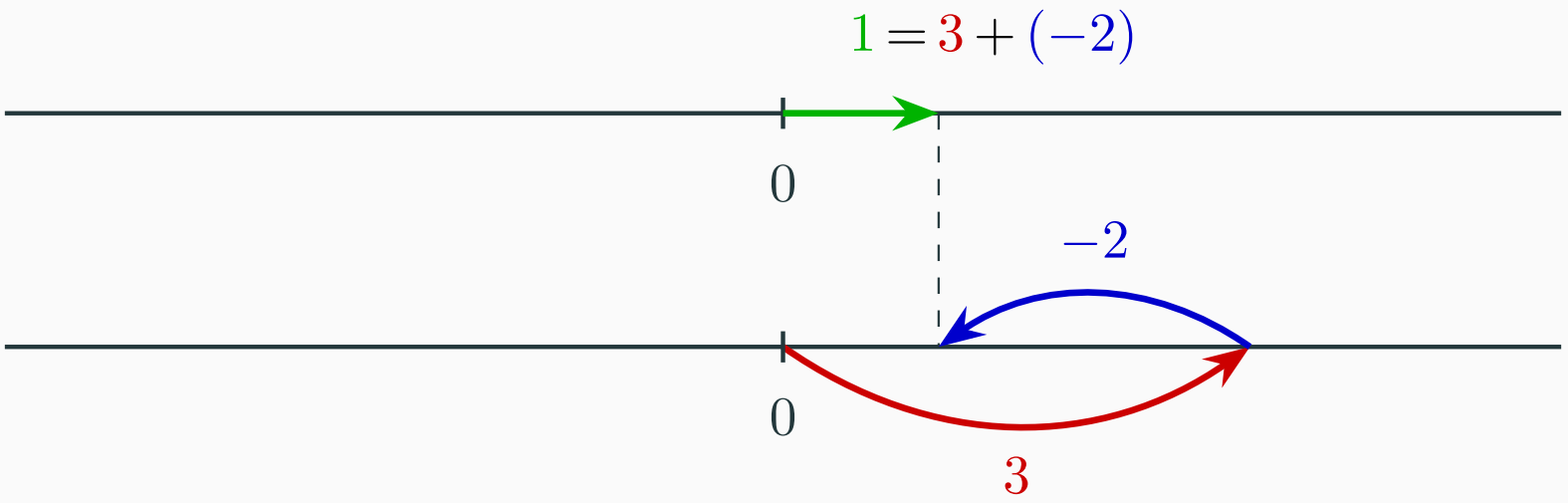


Motsatt tecken motsvarar motsatt riktning på pilen:

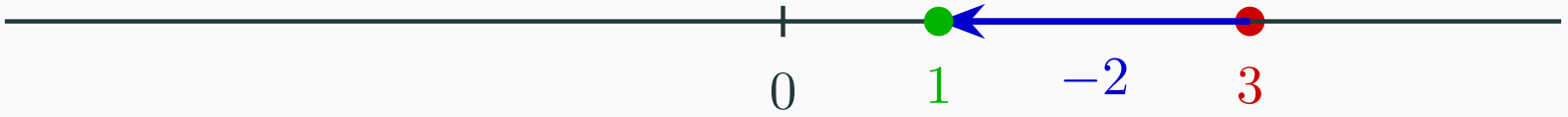


Vad är reella tal?

Att addera två tal uppfattas då som att stegvis utföra två rörelser:

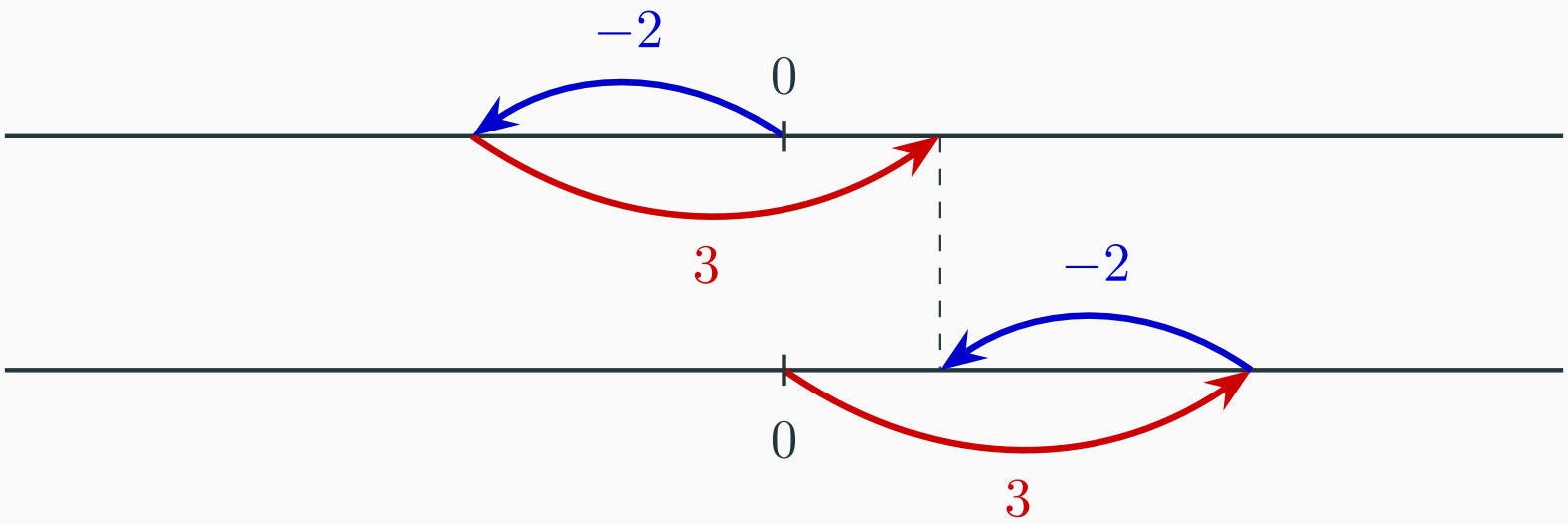


Det går bra att blanda punkter och pilar:



Vad är reella tal?

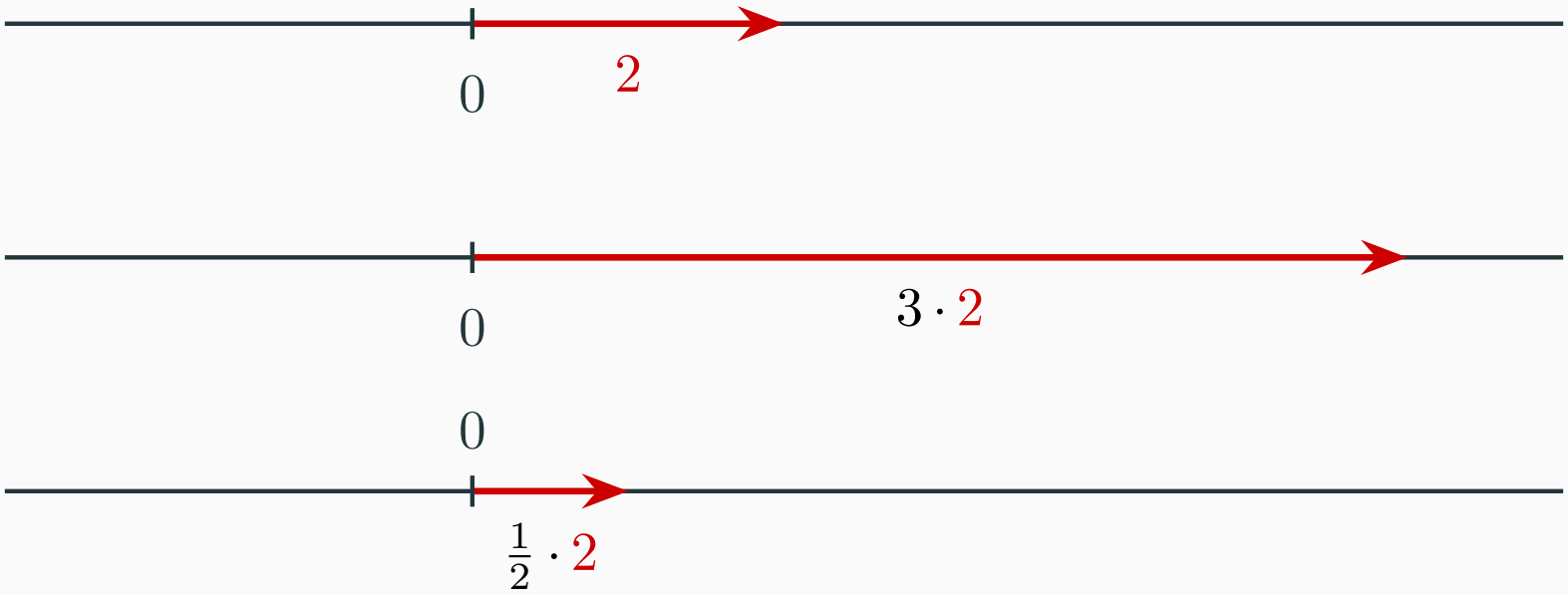
Notera kommutativiteten:



$$(-2) + 3 = 3 + (-2)$$

Vad är reella tal?

Att multiplicera med ett positivt reellt tal (faktor) betyder att skala (förlänga/förkorta) pilen:



(Vad händer om faktorn är negativ?)

Vad händer i högre dimension?

Nu vill vi göra samma saker ”i högre dimension”.

Bästa sätt att visualisera är i ett (2D-) plan eller ett (3D-) rum.

Vi ska dock börja med en hårdkokt matematisk definition.

Vektorer – matematisk definition

Definition 1.1 (koordinatvektor, euklidiskt rum)

Låt $n \in \mathbb{N}$. En **koordinatvektor** $\mathbf{v}$ är en ordnad n-tupel av reella tal. Man skriver:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix},$$

där $v_1, \ldots, v_n$ är reella tal.

Mängden av alla sådana koordinatvektorer betecknas $\mathbb{R}^n$ och kallas ett **reellt euklidiskt rum.**

Talet n kallas i denna kontext **dimensionen** av $\mathbb{R}^n$.

Koordinatvektorer – exempel

koordinatvektorer från $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

koordinatvektorer från $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

koordinatvektorer från $\mathbb{R}^7$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koordinatvektorer

Datavetarens perspektiv:

Vektor är en ordnad lista av data.

Koordinatvektorer

Datavetarens perspektiv:
Vektor är en ordnad lista av data.

OBS: Ordning spelar roll!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Typografiskt kommentar

Det är lämpligt att skilja vektorer från skalärer (reella tal) typografiskt.

I tryckt form:

$\mathbf{v}$ *(fetstil)* eller $\vec{v}$ *(kursiv + pil)*

I handskrift:

$\vec{v}$ *(klassiskt)*

$\overline{v}$ *(om du är lat)*

$\underline{v}$ *(om du är lat och tror på komplexa tal)*

v *(om du är lat och modig – ej rekommenderat)*

Koordinatvektorer

Notation:
Om vi behöver spara plats, får vi skriva

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Exempel (i $\mathbb{R}^3$):

$$(3,\ 4,\ 5)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Denna notation ska senare även få en djupare mening.

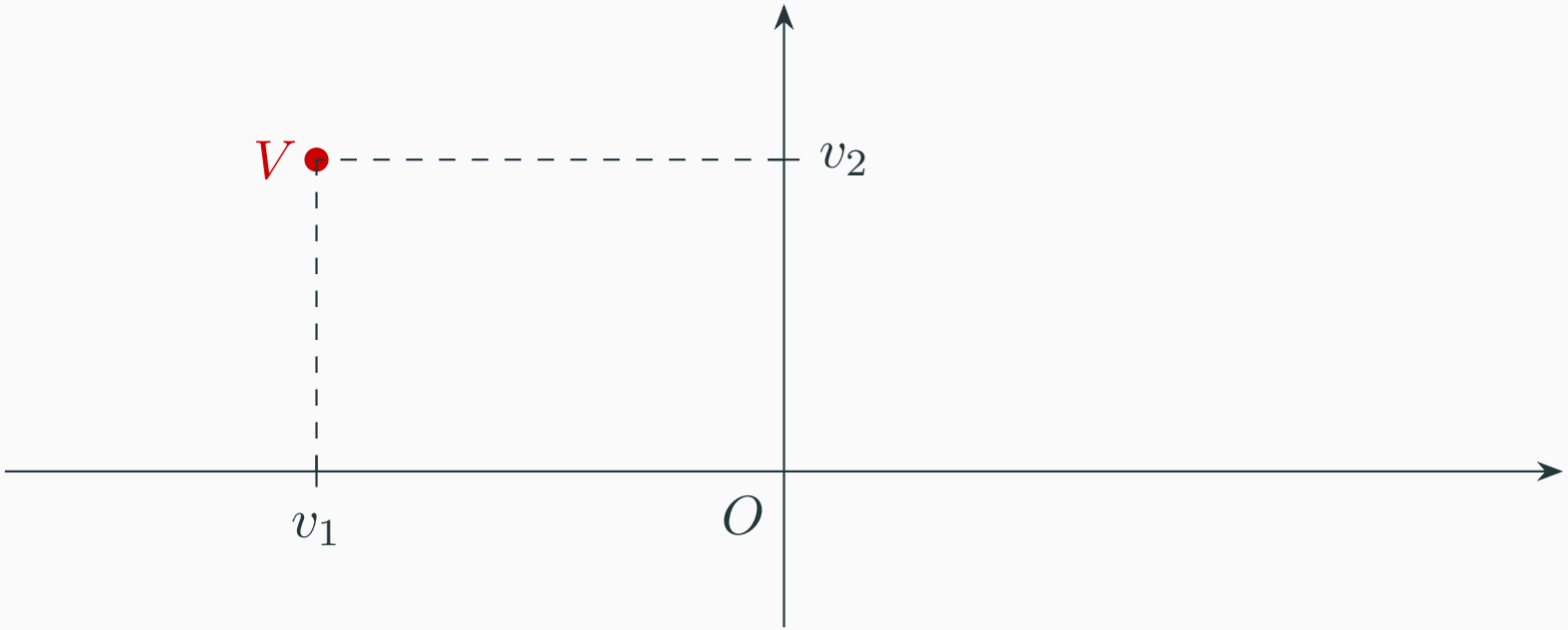
Vektorer – geometrisk tolkning i planet

Betrakta det tvådimensionella planet, inför en punkt O (**origo**) och de kartesiska koordinataxlarna.

Vektorer – geometrisk tolkning i planet

Betrakta det tvådimensionella planet, inför en punkt O (**origo**) och de kartesiska koordinataxlarna.

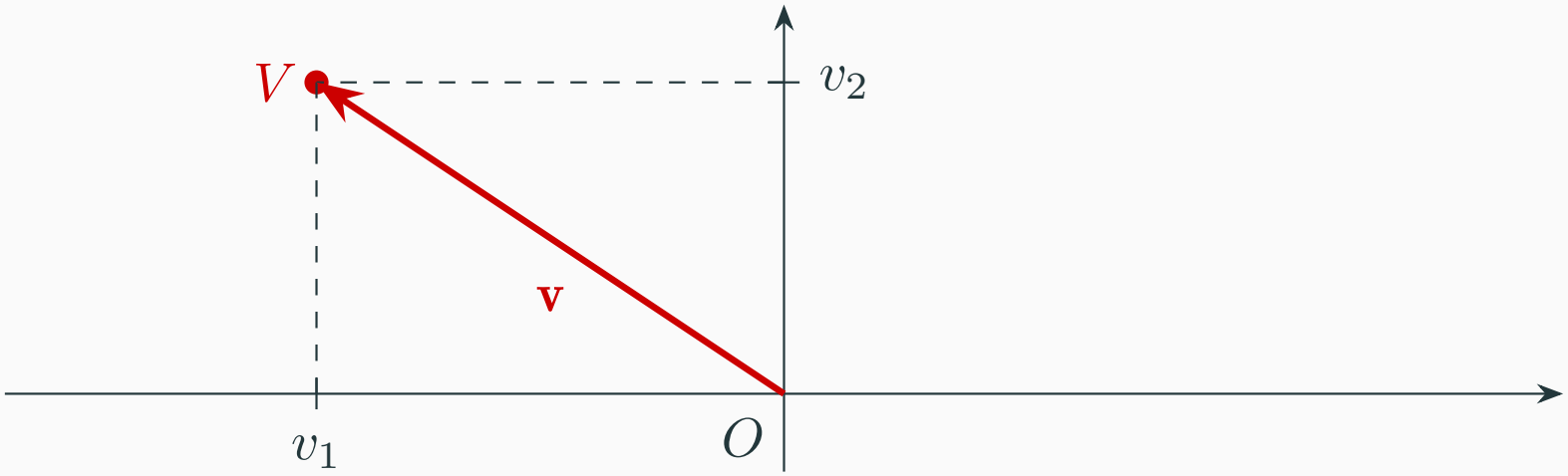
Koordinatvektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tolkas då som punkten V:



$v_1 =$ punktens horisontala position,
$v_2 =$ punktens vertikala position.

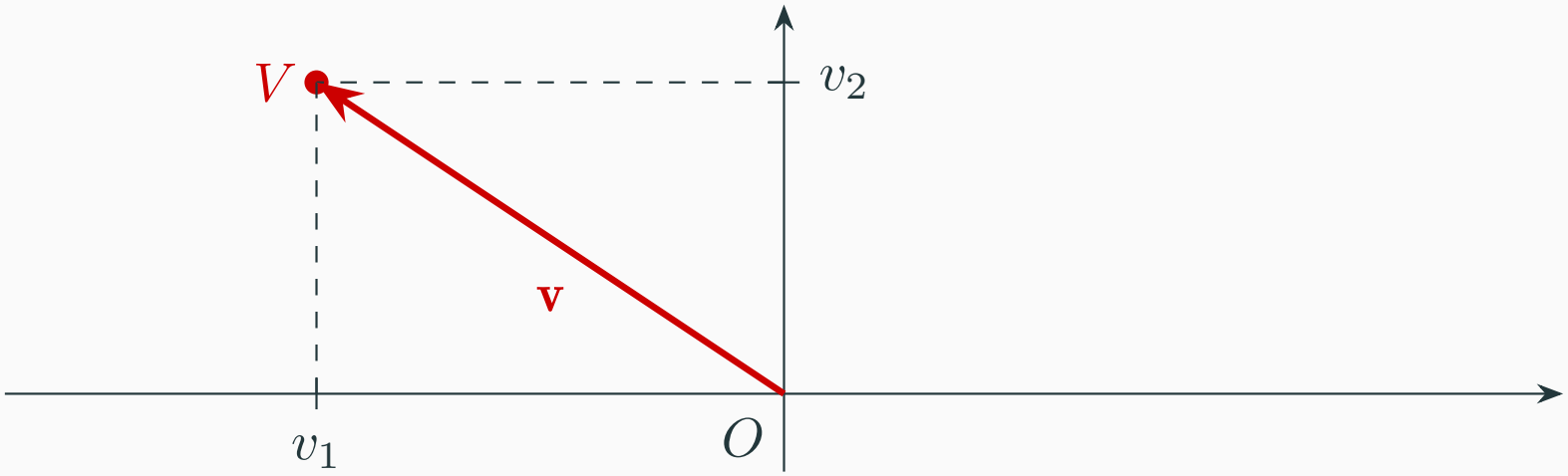
Vektorer – geometrisk tolkning i planet

Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ kan vidare tolkas som en **pil** med **foten** i origo och **spetsen** i punkten V:



Vektorer – geometrisk tolkning i planet

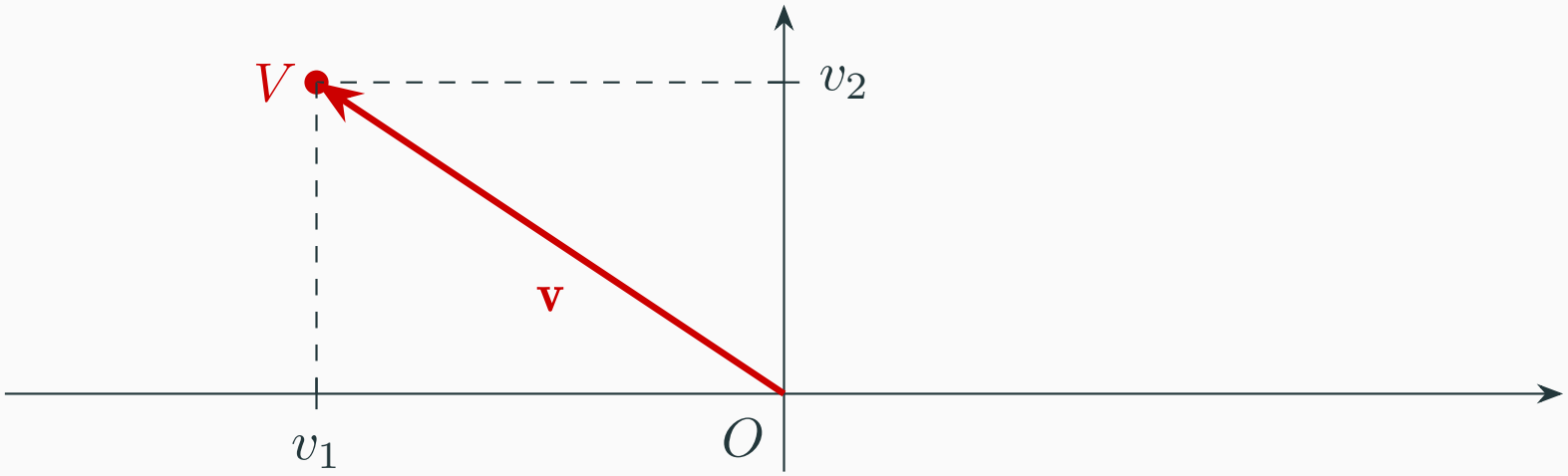
Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ kan vidare tolkas som en **pil** med **foten** i origo och **spetsen** i punkten V:



Pilen $\mathbf{v}$ kallas **ortsvektorn** för punkten V. Pilen har en **riktning** och **storlek** (längd).

Vektorer – geometrisk tolkning i planet

Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ kan vidare tolkas som en **pil** med **foten** i origo och **spetsen** i punkten V:



Pilen $\mathbf{v}$ kallas **ortsvektorn** för punkten V. Pilen har en **riktning** och **storlek** (längd).

Fysikerns perspektiv:
Vektor är en fysikalisk storhet med riktning och storlek.

Vektoraddition – matematisk definition

Definition 1.2 (vektoraddition)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, nämligen

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Deras **summa** definieras som

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

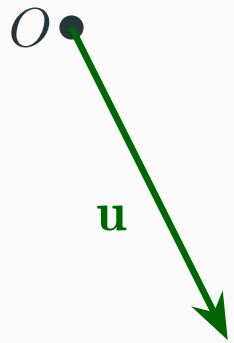
- **OBS!** Både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ måste ha samma antal komponenter (n).
- Vi adderar ihop komponenterna på samma plats i varsin vektor.
- Resultatet blir en **ny koordinatvektor.**

Vektoraddition – geometrisk tolkning

Betrakta ortsvektorer i planet ($n = 2$). Summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ kan uppfattas geometriskt som två konsekutiva rörelser:

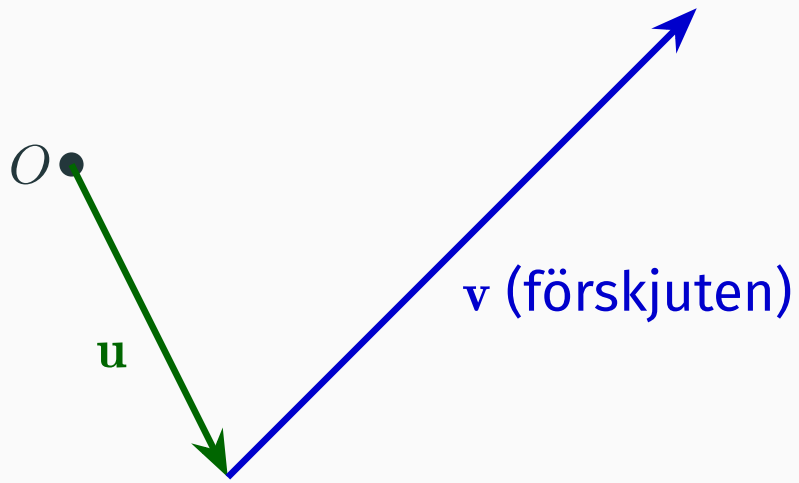
Vektoraddition – geometrisk tolkning

Betrakta ortsvektorer i planet ($n = 2$). Summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ kan uppfattas geometriskt som två konsekutiva rörelser:



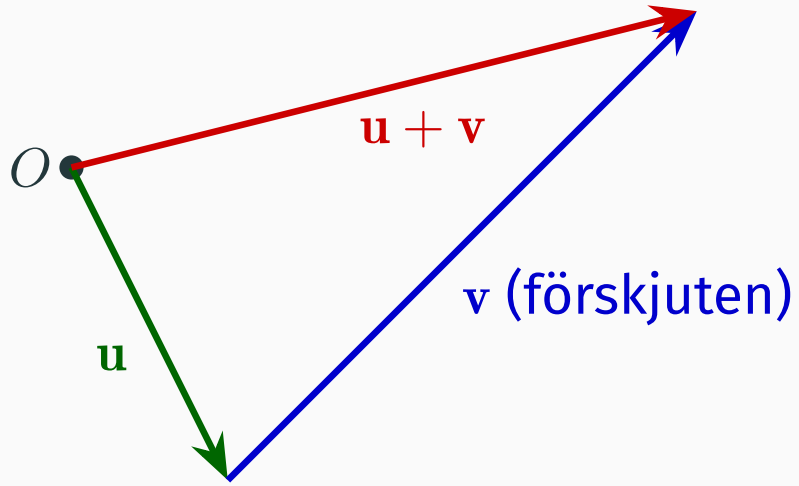
Vektoraddition – geometrisk tolkning

Betrakta ortsvektorer i planet ($n = 2$). Summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ kan uppfattas geometriskt som två konsekutiva rörelser:



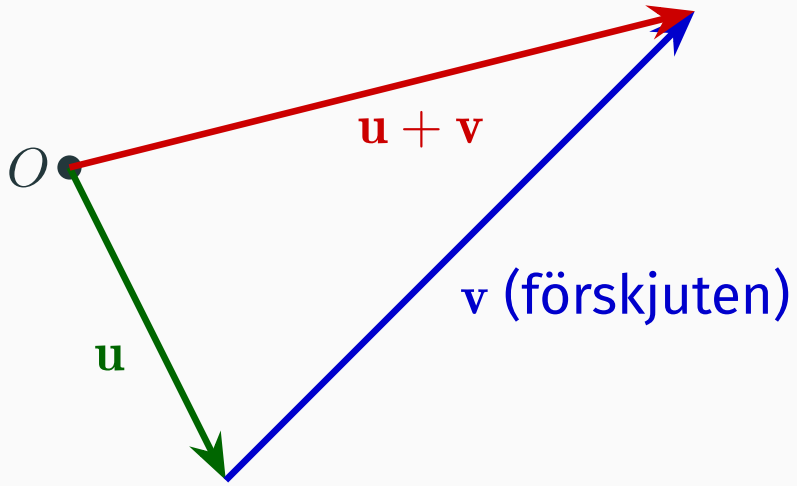
Vektoraddition – geometrisk tolkning

Betrakta ortsvektorer i planet ($n = 2$). Summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ kan uppfattas geometriskt som två konsekutiva rörelser:



Vektoraddition – geometrisk tolkning

Betrakta ortsvektorer i planet ($n = 2$). Summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ kan uppfattas geometriskt som två konsekutiva rörelser:

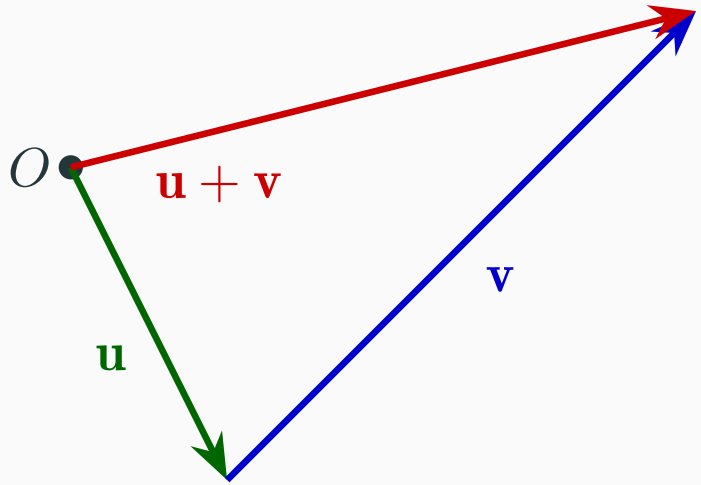


Observera:

- Pilen $\mathbf{v}$ **förskjuts** så att dess fot är $\mathbf{u}$:s spets.
- Resultatet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ blir en **ny ortsvektor** med foten i origo.

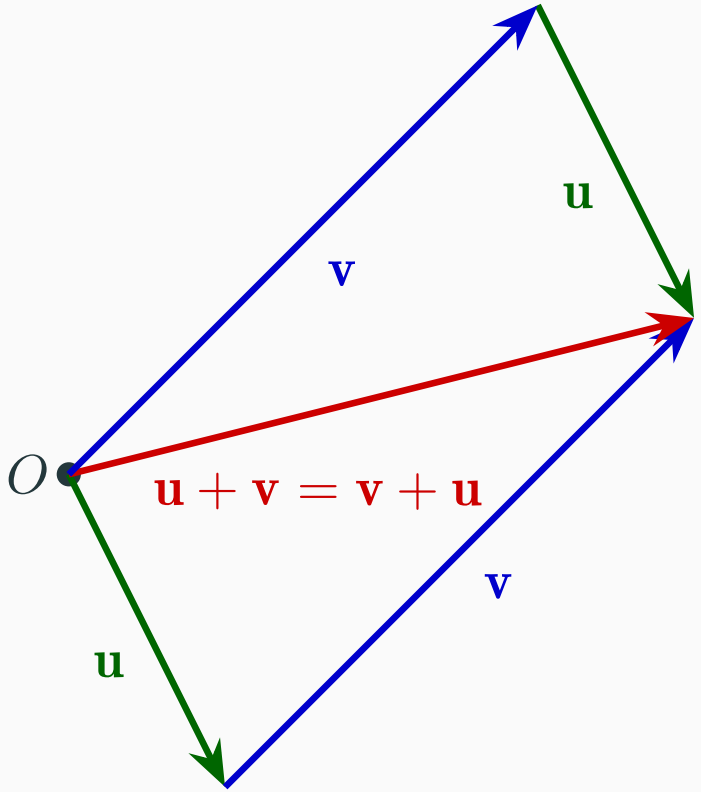
Addition av vektorer

Observera kommutativiteten – alltid gäller $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$:



Addition av vektorer

Observera kommutativiteten – alltid gäller $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$:



Addition av vektorer

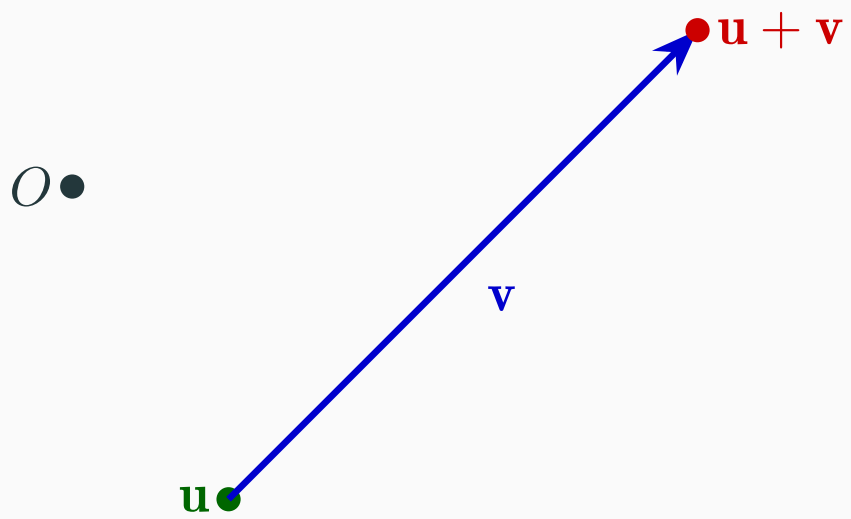
Exempel.
Låt

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Hitta summan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ både geometriskt och genom en direkträkning med koordinatvektorer.

Addition av vektorer

Vi kan också blanda punkter och pilar (om vi vet vad vi gör):



OBS!

- Här betecknar vi punkten med dess ortsvektors symbol $\mathbf{u}$.
- En punkt och dess ortsvektor kan **identifieras**, dvs. uppfattas som två tolkningar av samma sak.

Nollvektorn

Definition 1.3 (nollvektorn i $\mathbb{R}^n$.)

Koordinatvektorn

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

kallas **nollvektorn.**

Observera:

Denna är en koordinatvektor från $\mathbb{R}^n$. I kolonnen finns alltså n nollor.

Nollvektorn – geometriskt

Falls vi interpreterar nollvektorn $\mathbf{0}$ som en **punkt,** då är den origo.

Falls som en **ortsvektor,** då har den både sin fot och spets i origo.

Dess storlek är då noll och den saknar riktning (den enda ortsvektorn med dessa två egenskaper).

Multiplikation av en vektor med en skalär

Reella tal kallas för **skalärer.**

Definition 1.4 (skalärmultipel av en vektor)

Låt $c \in \mathbb{R}$. Låt

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

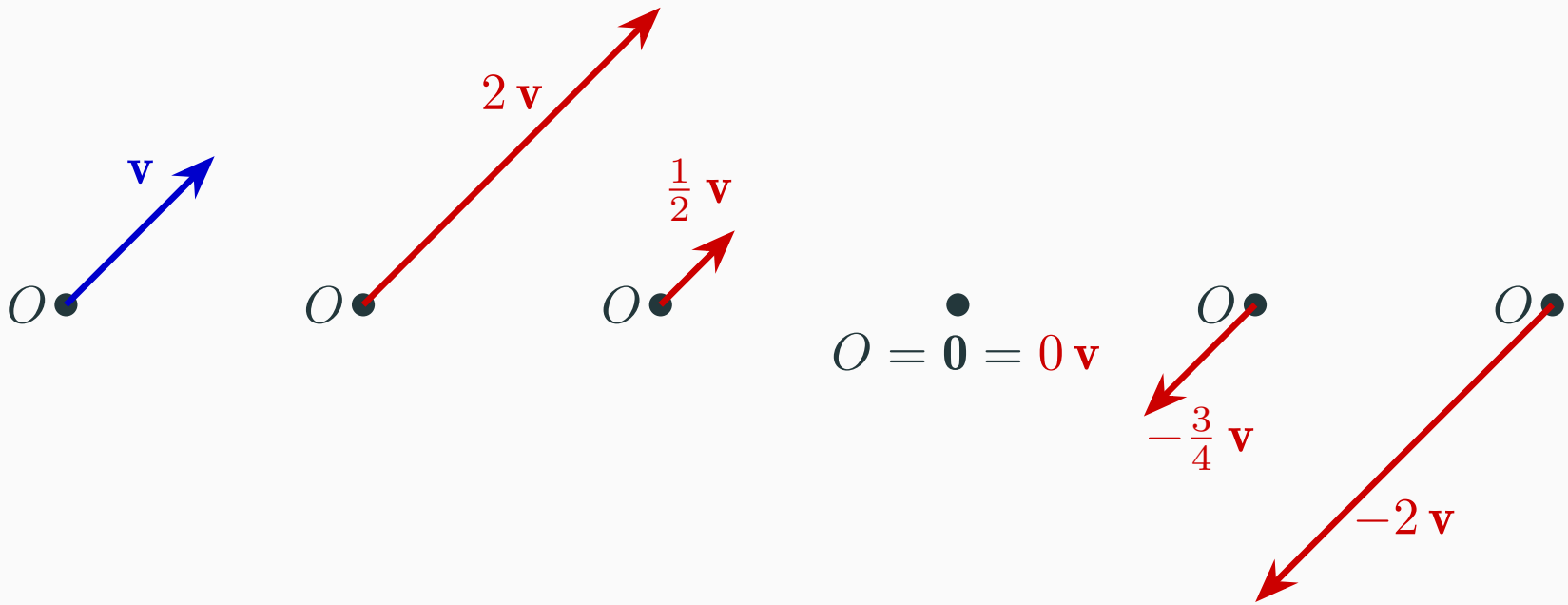
Koordinatvektorn $c\,\mathbf{v}$ definieras som

$$c\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{pmatrix}$$

och kallas **skalärmultipeln** av $\mathbf{v}$ med faktorn c.

Multiplikation av en vektor med en skalär – geometriskt

Låt $\mathbf{v}$ vara en ortsvektor i planet och c vara ett reellt tal (**skalär**). Multiplicering $\mathbf{v}$ med c tolkas geometriskt så här:



Om $c \neq 0$, resultatet är en **ny ortsvektor** med antingen samma eller motsatt riktning och ändrade storlek (i fall att $c \neq \pm 1$).

Skalärmultiplikation av vektorer

Att multiplicera ortsvektorn $\mathbf{v}$ med skalären c betyder att

- skala (förlänga/förkorta) $\mathbf{v}$ med faktor c, om $c > 0$;
- förvandla den till nollvektorn, om $c = 0$.
- skala $\mathbf{v}$ med faktor $|c|$ och spegla den genom origo, om $c < 0$;

Slogan:
”Skalärer skalar.”

Skalärmultiplikation av vektorer

Att multiplicera ortsvektorn $\mathbf{v}$ med skalären c betyder att

- skala (förlänga/förkorta) $\mathbf{v}$ med faktor c, om $c > 0$;
- förvandla den till nollvektorn, om $c = 0$.
- skala $\mathbf{v}$ med faktor $|c|$ och spegla den genom origo, om $c < 0$;

Slogan:
”Skalärer skalar.”

Tips:
Jämför detta samt vektoradditionen med vad vi gjorde med reella tal!

Vektorsubtraktion

Konvention:

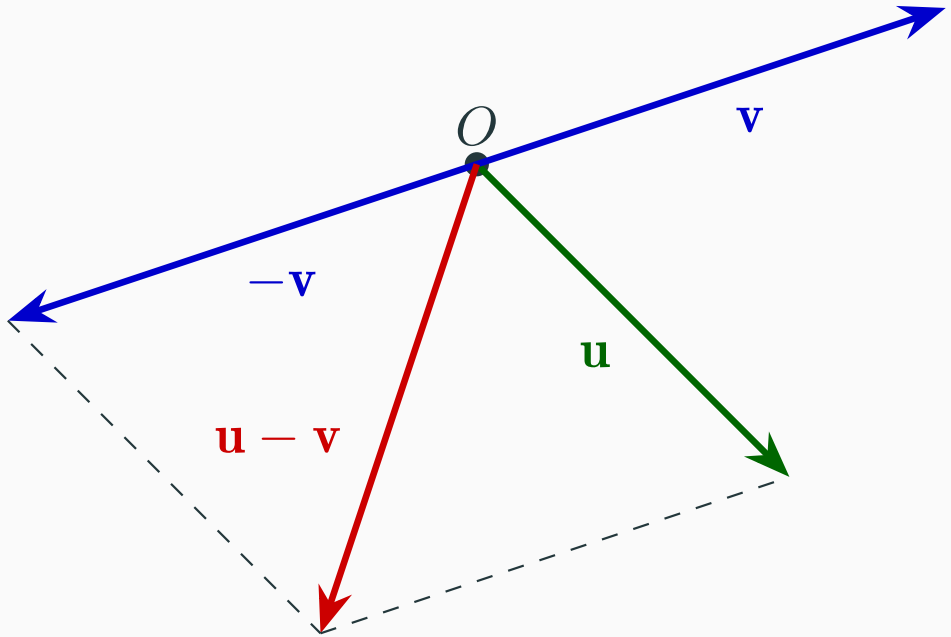
Symbolen $-\mathbf{v}$ betyder $(-1)\mathbf{v}$, både för koordinat- och ortsvektorer.

Vektorn $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är definierad som $\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$.

Vektorsubtraktion

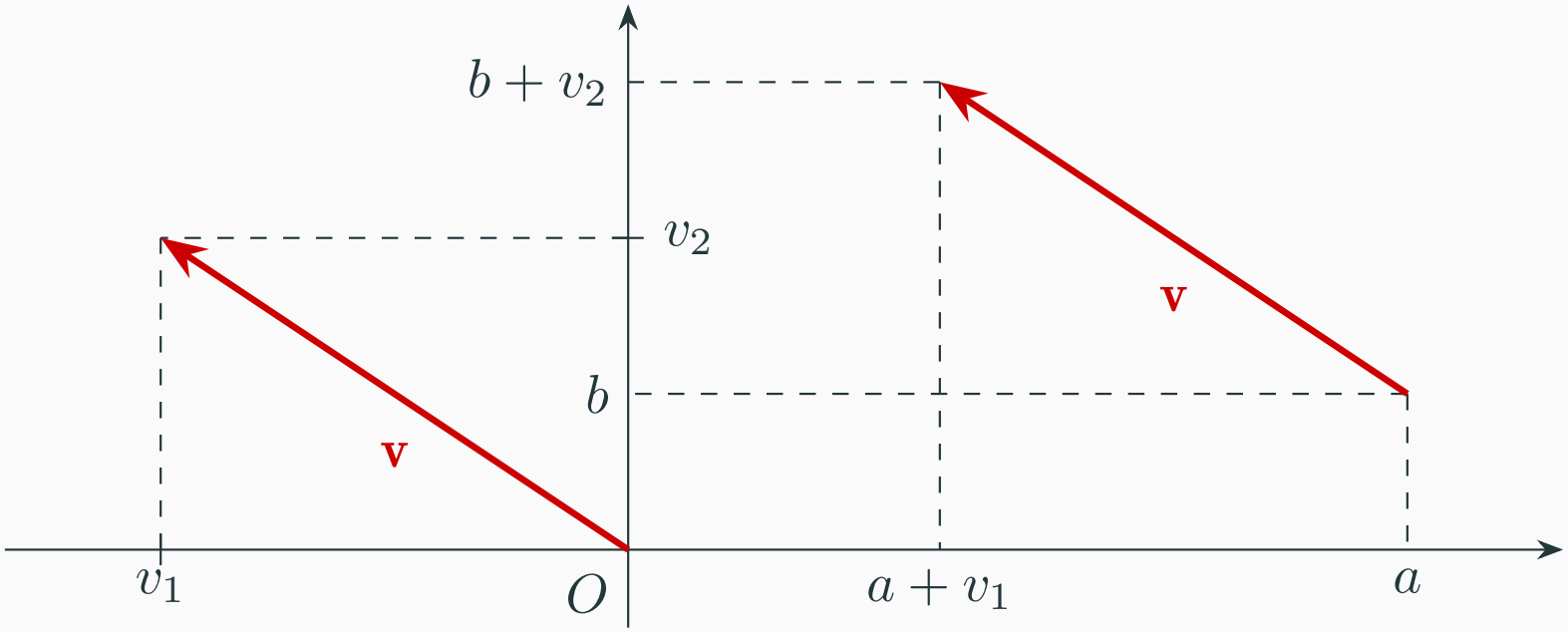
Konvention:
Symbolen $-\mathbf{v}$ betyder $(-1)\mathbf{v}$, både för koordinat- och ortsvektorer.
Vektorn $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är definierad som $\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$.

Geometriskt (i planet):



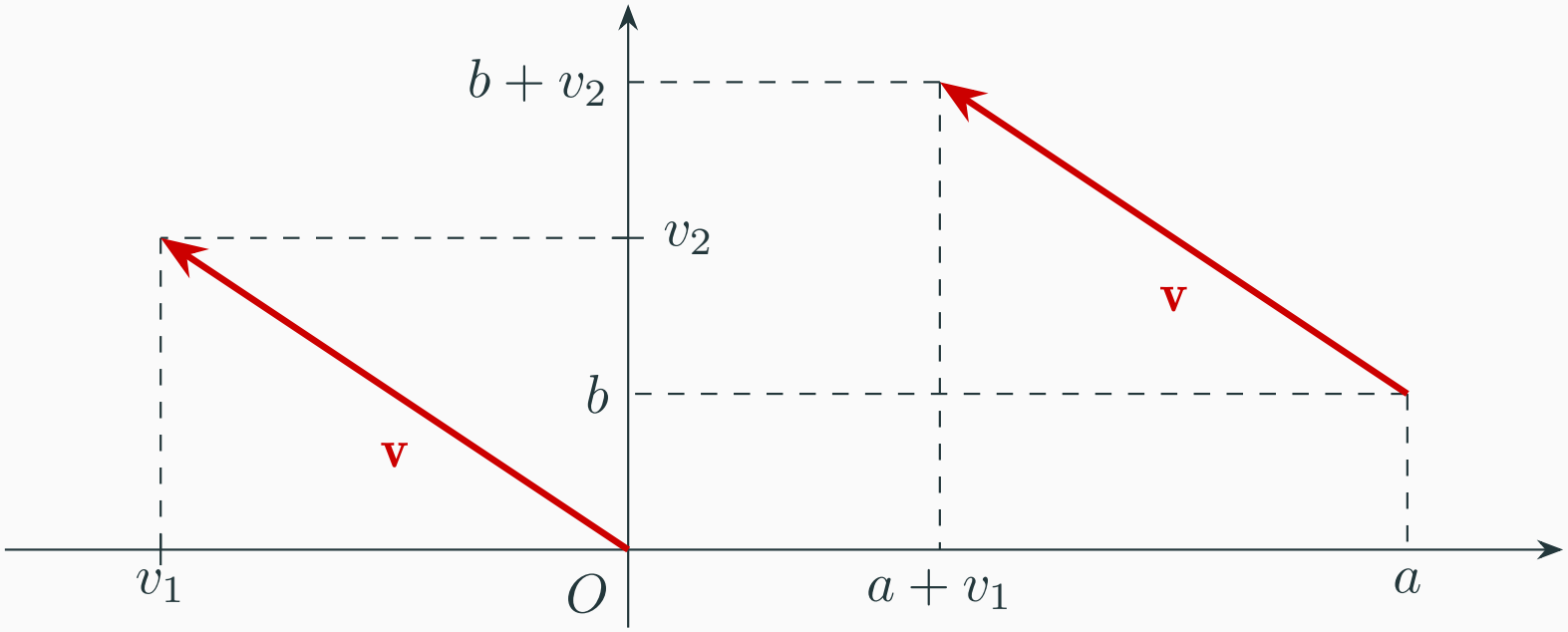
Riktade sträckor

Vi har betraktat (t. ex. vid geometriska additionen) två pilar som lika om de ”är förskjutna i förhållande till varandra”:



Riktade sträckor

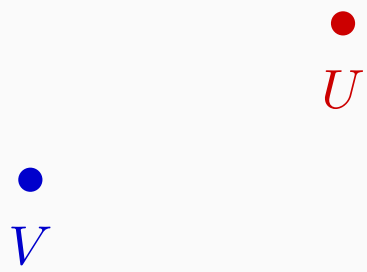
Vi har betraktat (t. ex. vid geometriska additionen) två pilar som lika om de ”är förskjutna i förhållande till varandra”:



Det kan formaliseras lite mer på följande sätt:

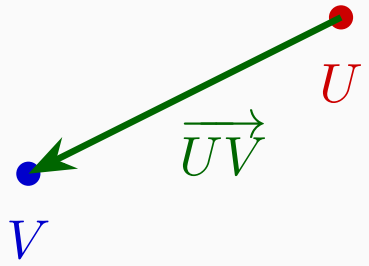
Riktade sträckor

Betrakta punkter U, V i planet och dess ortsvektorer $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$. (Bara här skriver jag olika bokstäver).



Riktade sträckor

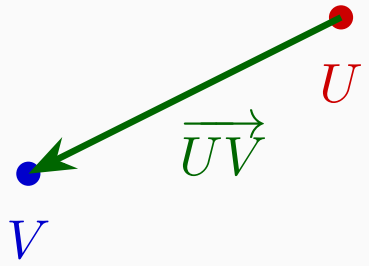
Betrakta punkter U, V i planet och dess ortsvektorer $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$. (Bara här skriver jag olika bokstäver).



Pilen med foten i U och spetsen i V kallas en **riktad sträcka** från U till V. Symboliskt: $\overrightarrow{UV}$.

Riktade sträckor

Betrakta punkter U, V i planet och dess ortsvektorer $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$. (Bara här skriver jag olika bokstäver).

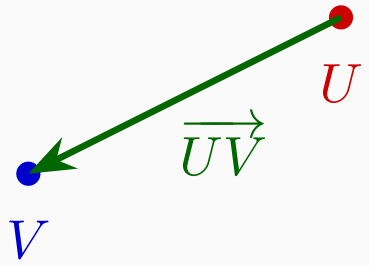


Pilen med foten i U och spetsen i V kallas en **riktad sträcka** från U till V. Symboliskt: $\overrightarrow{UV}$.

Fråga:
Vilken ortsvektor motsvarar ”rörelsen” från U till V?

Riktade sträckor

Betrakta punkter U, V i planet och dess ortsvektorer $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$. (Bara här skriver jag olika bokstäver).



Pilen med foten i U och spetsen i V kallas en **riktad sträcka** från U till V. Symboliskt: $\overrightarrow{UV}$.

Fråga:
Vilken ortsvektor motsvarar ”rörelsen” från U till V?

Svar:
Det är orstvektorn $\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

Vektorer som ekvivalensklasser

Det leder till följande beskrivning:

En **vektor** är en mängd av alla riktade sträckor som uppstår genom en förskjutning av samma ortsvektor.

Vektorer som ekvivalensklasser

Det leder till följande beskrivning:

En **vektor** är en mängd av alla riktade sträckor som uppstår genom en förskjutning av samma ortsvektor.

Alternativt:

En **vektor** är en mängd av alla riktade sträckor med samma riktning och storlek.

Vektorer som ekvivalensklasser

Det leder till följande beskrivning:

En **vektor** är en mängd av alla riktade sträckor som uppstår genom en förskjutning av samma ortsvektor.

Alternativt:

En **vektor** är en mängd av alla riktade sträckor med samma riktning och storlek.

OBS!
Tills vidare ska vi säga bara ”vektor” om det inte behövs att explicit skilja mellan orts-, koordinatvektorer och vektorer i ovan angivna mening (som mängder av riktade sträckor).

Egenskaper av addition och skalärmultiplikation

Sats 1.5 (egenskaper av aritmetiska vektoroperationer)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *och låt* $a, b \in \mathbb{R}$. *Då gäller det följande:*

(i) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$;

(ii) $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$;

(iii) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$;

(iv) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

(v) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$;

(vi) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$;

(vii) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

- Samma som de klassiska räknereglerna för reella tal (fallet $n = 1$).
- Klart att det gäller för koordinatvektorer (använd Def. 1.2 och Def. 1.4).

Egenskaper av addition och skalärmultiplikation

Exempel.
Illustrera geometriskt att regeln (v) från Sats 1.5 gäller.

Linjärkombinationer

Definition 1.6 (linjärkombination)

Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vara koordinatvektorer från $\mathbb{R}^n$. Låt $c_1, c_2, \ldots, c_k$ vara reella tal. Vektorn

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

kallas en **linjärkombination** (LK) av vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

OBS!

- Talen k (antalet vektorer) och n (antalet komponenter i varje vektor) har inget samband. Man kan kombinera godtyckligt många vektorer.
- Summa-symbolen används:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\mathbf{v}_j = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k.$$

Linjärkombinationer

Exempel.

Låt

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Rita deras följande LK:

$$-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v},$$

$$-2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathbf{w}.$$

Linjärkombinationer

Exempel.

Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. (Vi ska rita illustrationen i $\mathbb{R}^2$, men problemet har samma lösning i alla $\mathbb{R}^n$.)

Exempel.
Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. (Vi ska rita illustrationen i $\mathbb{R}^2$, men problemet har samma lösning i alla $\mathbb{R}^n$.)

- Låt $\mathbf{m}$ vara punkten som ligger i mitten på segmentet (räta sträckan) mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Uttryck $\mathbf{m}$ med hjälp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

Linjärkombinationer

Exempel.
Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. (Vi ska rita illustrationen i $\mathbb{R}^2$, men problemet har samma lösning i alla $\mathbb{R}^n$.)

- Låt $\mathbf{m}$ vara punkten som ligger i mitten på segmentet (räta sträckan) mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Uttryck $\mathbf{m}$ med hjälp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.
- Låt $\mathbf{c}$ vara punkten som ligger på segmentet mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ och delar det i förhållandet α/β (här $\alpha, \beta > 0$). Uttryck $\mathbf{c}$ med hjälp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

Kanonisk bas

I planet (2D) definierar vi dessa speciella vektorer:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kanonisk bas

I planet (2D) definierar vi dessa speciella vektorer:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I (3D-) rummet:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

OBS!

- Samma beteckning! Man måste säga om det handlar om 2D-planet ($\mathbb{R}^2$) eller 3D-rummet ($\mathbb{R}^3$).

Kanonisk bas

I planet (2D) definierar vi dessa speciella vektorer:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I (3D-) rummet:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

OBS!

- Samma beteckning! Man måste säga om det handlar om 2D-planet ($\mathbb{R}^2$) eller 3D-rummet ($\mathbb{R}^3$).
- Fysiker (och andra) skriver ofta $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ istället för $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Kanonisk bas

I planet (2D) definierar vi dessa speciella vektorer:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I (3D-) rummet:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

OBS!

- Samma beteckning! Man måste säga om det handlar om 2D-planet ($\mathbb{R}^2$) eller 3D-rummet ($\mathbb{R}^3$).
- Fysiker (och andra) skriver ofta $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ istället för $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
- Kursboken använder symboler $\mathbf{e}_i$ också för andra vektorer (kätteri!).

Kanonisk bas

Definition 1.7 (kanoniska basvektorer)

Låt $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vektorn $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ definieras som

$$\mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{:e position}$$

där ”1” står på k:e positionen räknad uppifrån. Den kallas för den **k:e kanoniska basvektorn.**

Kanonisk bas

Definition 1.8 (kanonisk bas)

Låt $n \in \mathbb{N}$. Mängden

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

kallas den **kanoniska basen** för $\mathbb{R}^n$.

Kanonisk bas

Definition 1.8 (kanonisk bas)

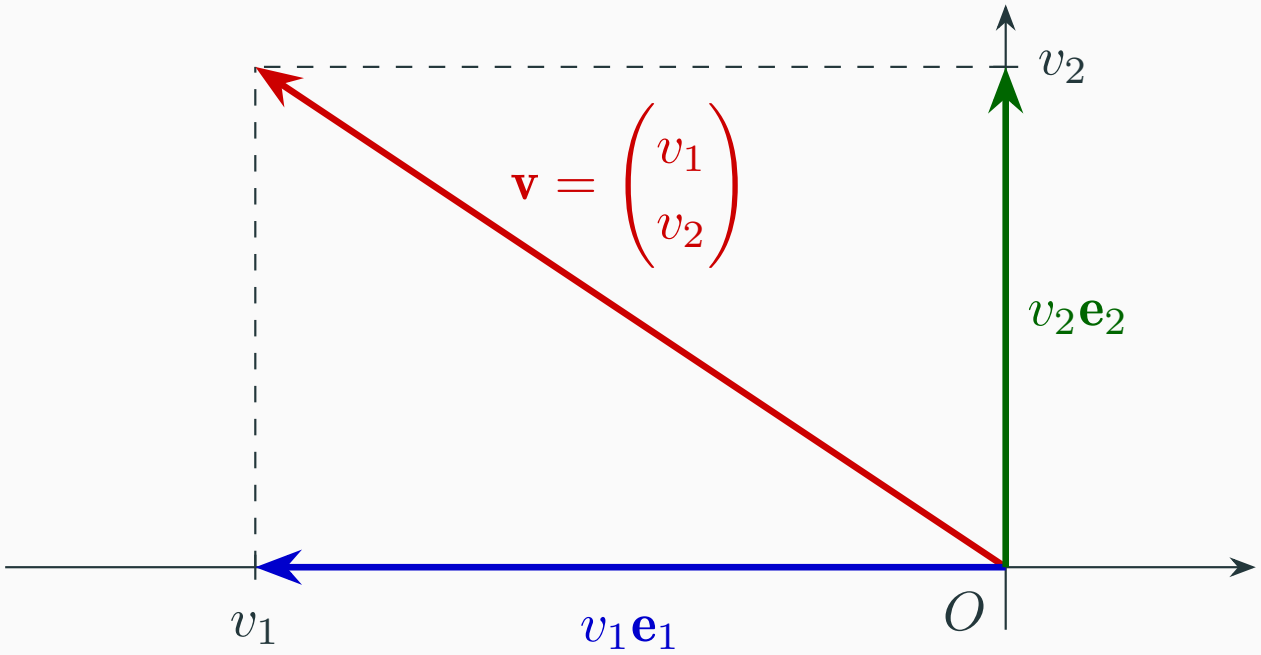
Låt $n \in \mathbb{N}$. Mängden

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

kallas den **kanoniska basen** för $\mathbb{R}^n$.

- Bild på tavlan.
- Inom $\mathbb{R}^2$ består denna bas av 2 vektorer, inom $\mathbb{R}^3$ av 3, osv. Inom $\mathbb{R}^n$ innehåller den n vektorer.

Koordinater mot kanoniska basen



$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2.$$

Observera:

Varje vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som en LK av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

I $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ osv. funkar det analogiskt.

Allmän bas i planet

Fråga:

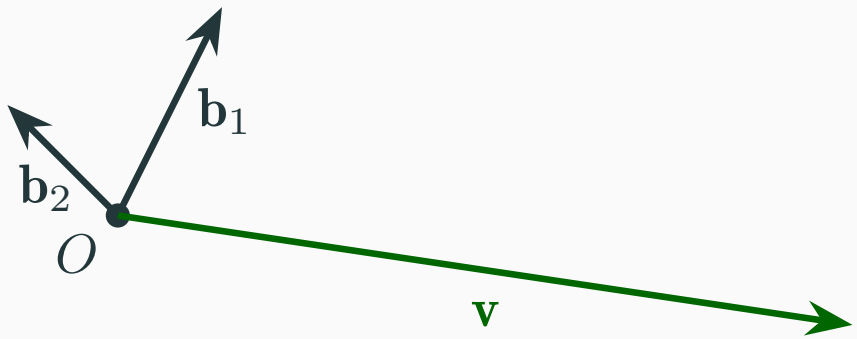
Om vi antar två godtyckliga vektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$, kan vi också uttrycka varje vektor i $\mathbb{R}^2$ som en LK av dessa två?

Allmän bas i planet

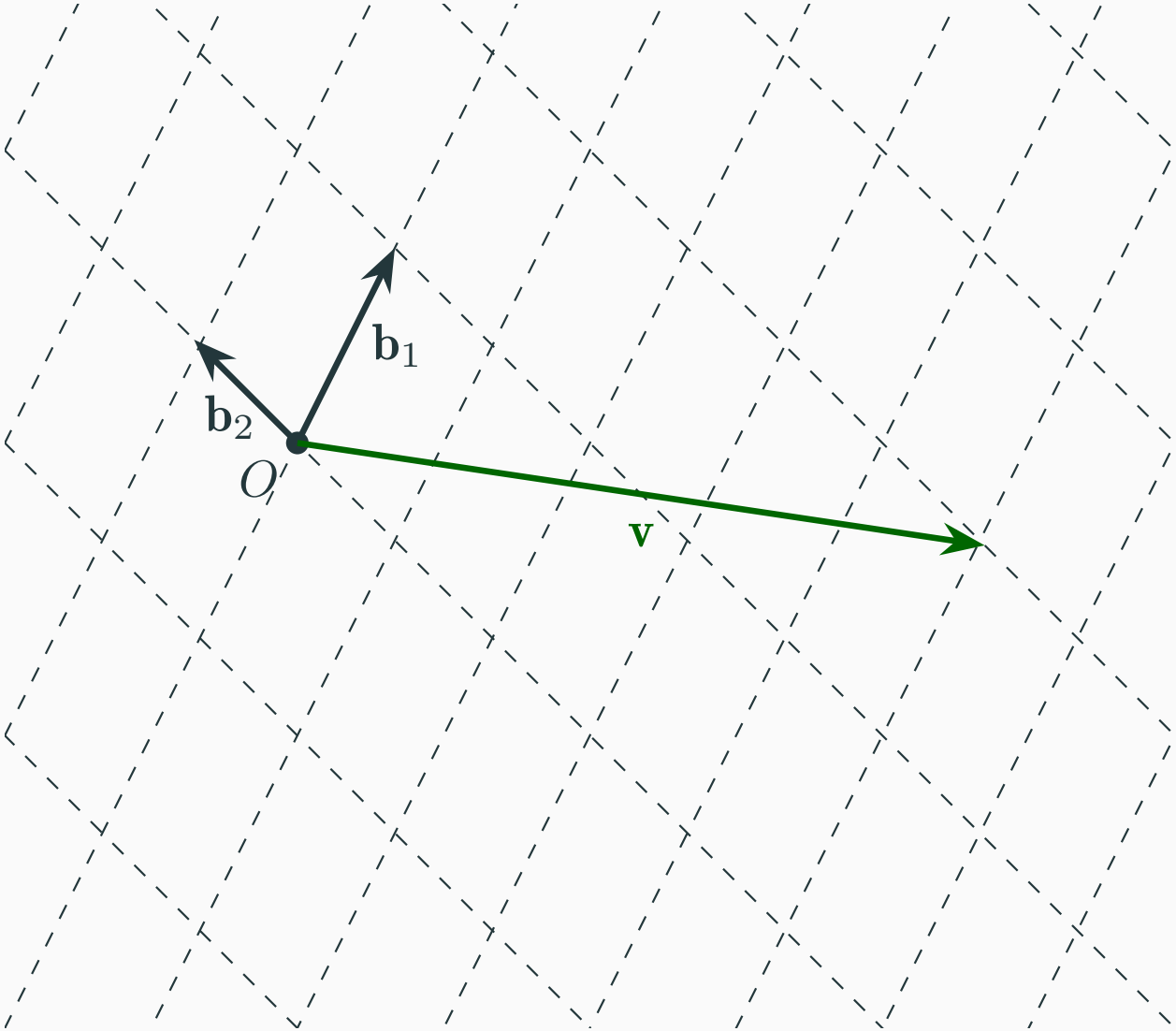
Fråga:
Om vi antar två godtyckliga vektorer $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$, kan vi också uttrycka varje vektor i $\mathbb{R}^2$ som en LK av dessa två?

Svar:
Ja, om dessa inte är ”parallella”.

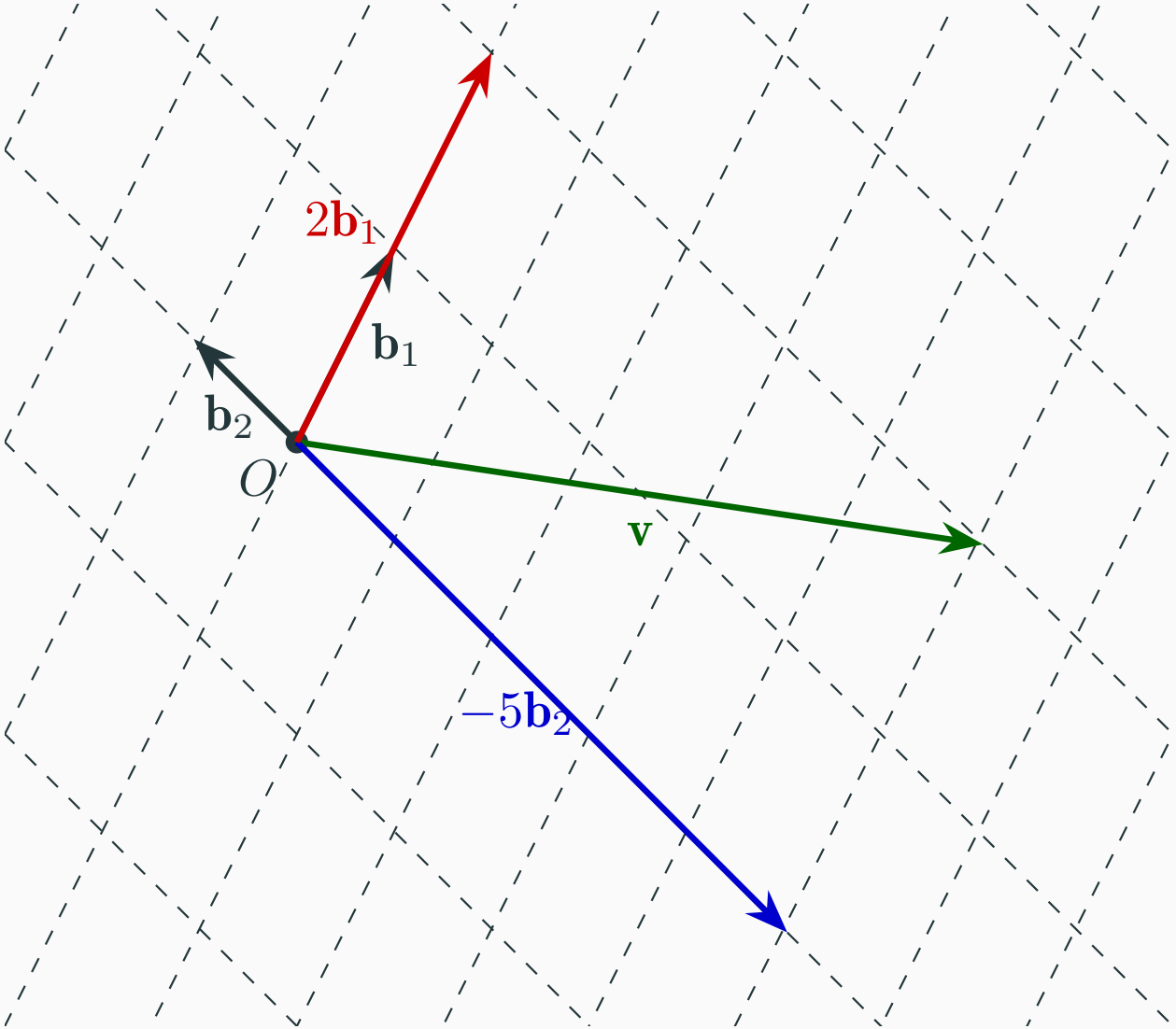
Allmän bas i planet



Allmän bas i planet



Allmän bas i planet



$$\mathbf{v} = 2\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2$$

Allmän bas i planet

Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ vara två vektorer sådana att $\mathbf{b}_2$ **inte** är en skalärmultipel av $\mathbf{b}_1$ (dvs. ”ej parallella”).

Allmän bas i planet

Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ vara två vektorer sådana att $\mathbf{b}_2$ **inte** är en skalärmultipel av $\mathbf{b}_1$ (dvs. ”ej parallella”).

Mängden $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ kallas då en **bas** av $\mathbb{R}^2$.

Allmän bas i planet

Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ vara två vektorer sådana att $\mathbf{b}_2$ **inte** är en skalärmultipel av $\mathbf{b}_1$ (dvs. ”ej parallella”).

Mängden $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ kallas då en **bas** av $\mathbb{R}^2$.

Då kan **varje** vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ uttryckas som en linjärkombination av $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$, dvs. det finns (skalära) konstanter $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2.$$

Allmän bas i planet

Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ vara två vektorer sådana att $\mathbf{b}_2$ **inte** är en skalärmultipel av $\mathbf{b}_1$ (dvs. ”ej parallella”).

Mängden $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ kallas då en **bas** av $\mathbb{R}^2$.

Då kan **varje** vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ uttryckas som en linjärkombination av $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$, dvs. det finns (skalära) konstanter $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2.$$

Vektorn $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ kallas då **$\mathbf{v}$:s koordinater mot basen $\mathcal{B}$.**

Allmän bas i planet

Låt $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ vara två vektorer sådana att $\mathbf{b}_2$ **inte** är en skalärmultipel av $\mathbf{b}_1$ (dvs. ”ej parallella”).

Mängden $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ kallas då en **bas** av $\mathbb{R}^2$.

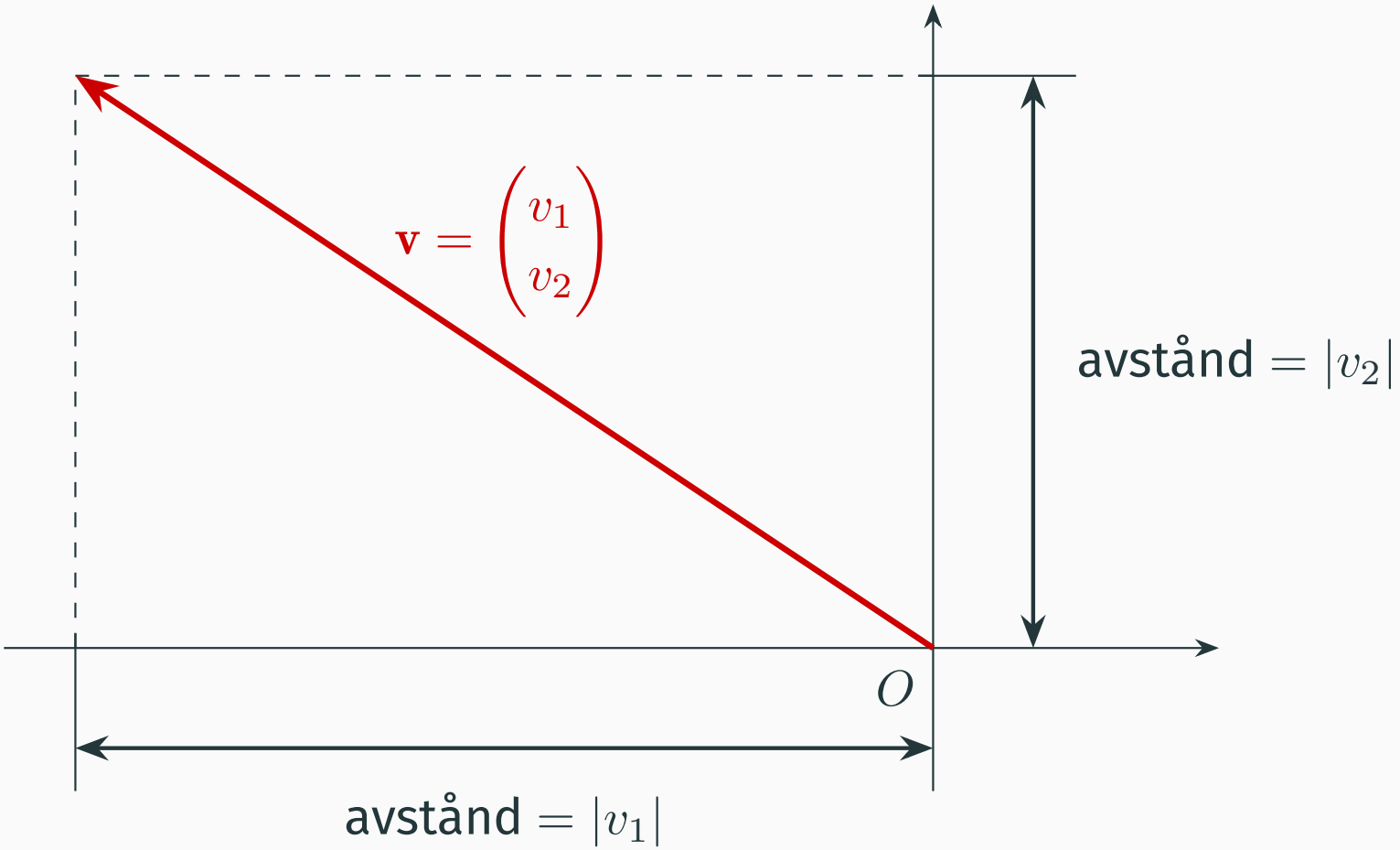
Då kan **varje** vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ uttryckas som en linjärkombination av $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$, dvs. det finns (skalära) konstanter $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2.$$

Vektorn $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ kallas då **$\mathbf{v}$:s koordinater mot basen $\mathcal{B}$.**

Slogan:
”Basvektorer bestämmer rutnätet.”

Storlek av en vektor



Fråga:

Vilken är den röda pilens längd?

Storlek av en vektor

Definition 1.9 (storlek av en vektor)

Låt

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dess **storlek** definieras som

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}.$$

Storlek av en vektor

Definition 1.9 (storlek av en vektor)

Låt

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dess **storlek** definieras som

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}.$$

- Tänk på Pythagoras sats i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.

Storlek av en vektor

Definition 1.9 (storlek av en vektor)

Låt

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dess **storlek** definieras som

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}.$$

- Tänk på Pythagoras sats i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.
- Storleken är ett **icke-negativt reellt tal.**

Storlek av en vektor

Definition 1.9 (storlek av en vektor)

Låt

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dess **storlek** definieras som

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}.$$

- Tänk på Pythagoras sats i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.
- Storleken är ett **icke-negativt reellt tal.**
- Man kan säga ”längd” i stället för ”storlek” (kan vara vilseledande).

Storlek av en vektor

Definition 1.10 (enhetsvektor)

Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Vektorn $\mathbf{v}$ kallas för en **enhetsvektor** om

$$|\mathbf{v}| = 1.$$

- En enhetsvektor kan ha vilken riktning som helst. Dess storlek måste dock vara 1.

Storlek av en vektor

Exempel.

Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Hitta enhetsvektorn $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ som har samma riktning som $\mathbf{v}$.

Storlek av en vektor

Exempel.

Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Hitta enhetsvektorn $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ som har samma riktning som $\mathbf{v}$.

Svar:

Det blir

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}.$$

Ingen annan vektor uppfyller det.

Storlek av en vektor

Exempel.

Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$. Hitta enhetsvektorn $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ som har samma riktning som $\mathbf{v}$.

Svar:

Det blir

$$\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}.$$

Ingen annan vektor uppfyller det.

Exempel.

Nu gör samma sak för det konkreta fallet:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Räkneregler för storleken

Sats 1.11 (storlekens egenskaper)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. *Då gäller* ***triangelolikheten:***

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Om $c \in \mathbb{R}$, *då gäller*

$$|\,c\,\mathbf{v}\,| = |\,c\,||\mathbf{v}|.$$

Avstånd

Anta $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (tolka dem som **punkter** nu). Deras **(euklidiskt) avstånd** betyder storleken av vektorn $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, alltså

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}| \qquad (= |\mathbf{u} - \mathbf{v}|).$$

Avstånd

Exempel.

Bestäm avståndet mellan punkterna (i $\mathbb{R}^3$):

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$