

Linjär algebra

TATA16, höstterminen 2026

Martin Křepela

Matematiska institutionen, Linköpings universitet

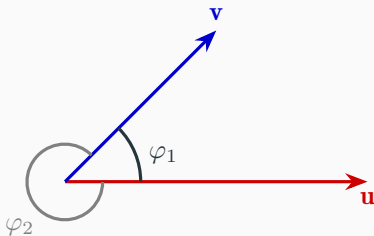
`martin.krepela@liu.se`

Dokumentversion: 7 september 2026

Skalärprodukt och vektorprodukt

Vinkel i planet – illustration

I planet uppfattar vi **vinkeln mellan pilarna u, v** som den **mindre** av vinklarna φ_1, φ_2 på bilden:



Observera:

- Vi tar alltså den φ som uppfyller $0 \leq \varphi \leq \pi$. Här är det φ_1 .
- Det här är bara ett intuitivt koncept. Vi behöver en matematisk definition av begreppet "vinkel".

"intuitiv uppfattning" av begreppet "vinkel" i planet (2D)



en funktion som "räknar ut" vinkel från koordinater i planet



generalisering av funktionen i högre dimension (**skalärprodukt**)



matematisk definition av "vinkeln" i $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, även $\mathbb{R}^n$.

Inledande exempel i planet

Problem 1:

Anta två **enhetsvektorer** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Räkna ut vinkeln mellan dem beroende på deras **koordinater**.

Inledande exempel i planet

Problem 1:

Anta två **enhetsvektorer** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Räkna ut vinkeln mellan dem beroende på deras **koordinater**.

Svar 1:

$$\cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (\text{dvs. } \varphi = \arccos(a_1 b_1 + a_2 b_2)).$$

Inledande exempel i planet

Problem 1:

Anta två **enhetsvektorer** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Räkna ut vinkeln mellan dem beroende på deras **koordinater**.

Svar 1:

$$\cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (\text{dvs. } \varphi = \arccos(a_1 b_1 + a_2 b_2)).$$

Problem 2:

Anta två allmänna vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ och utför samma sak.

Inledande exempel i planet

Problem 1:

Anta två **enhetsvektorer** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Räkna ut vinkeln mellan dem beroende på deras **koordinater**.

Svar 1:

$$\cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (\text{dvs. } \varphi = \arccos(a_1 b_1 + a_2 b_2)).$$

Problem 2:

Anta två allmänna vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ och utför samma sak.

Svar 2:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \quad \left(\text{dvs. } \varphi = \arccos \left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \right) \right).$$

Definition 2.1 (skalärprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Deras **skalärprodukt** definieras som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Definition 2.1 (skalärprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Deras **skalärprodukt** definieras som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

- Skalärprodukten av två vektorer är en **skalär** (ett **reellt tal**).

Definition 2.1 (skalärprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Deras **skalärprodukt** definieras som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

- Skalärprodukten av två vektorer är en **skalär** (ett **reellt tal**).
- **OBS:** skalärprodukt $\neq$ skalärmultipel!

Definition 2.1 (skalärprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Deras **skalärprodukt** definieras som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

- Skalärprodukten av två vektorer är en **skalär** (ett **reellt tal**).
- **OBS:** skalärprodukt $\neq$ skalärmultipel!
- Alternativa namn: **standardskalärprodukt**, (standard-) **inre produkt**.

Skalärprodukt och 2D-geometri

En annan **geometrisk tolkning** av skalärprodukten i $\mathbb{R}^2$ (bild på tavlan):

Skalärprodukt och 2D-geometri

En annan **geometrisk tolkning** av skalärprodukten i $\mathbb{R}^2$ (bild på tavlan):

- Fatta $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ som Ortsvektorer, nämligen pilar.
- Utför den **ortogonala projektionen** av $\mathbf{v}$ mot den linje som innehåller pilen $\mathbf{u}$. Multiplicera resultatets storlek med storleken av $\mathbf{u}$. Så får du talet $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$.

Skalarprodukt och 2D-geometri

En annan **geometrisk tolkning** av skalärprodukten i $\mathbb{R}^2$ (bild på tavlan):

- Fatta $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ som Ortsvektorer, nämligen pilar.
- Utför den **ortogonala projektionen** av $\mathbf{v}$ mot den linje som innehåller pilen $\mathbf{u}$. Multiplicera resultatets storlek med storleken av $\mathbf{u}$. Så får du talet $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$.
- Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$, pekar pilarna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ "principiellt åt samma håll".
- Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, pekar pilarna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ "principiellt åt motsatt håll".
- Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, är pilarna vinkelräta.

Analogiskt kan man tänka i $\mathbb{R}^3$, även i $\mathbb{R}^n$.

Vad är en vinkel i ett godtyckligt euklidiskt rum?

Sats 2.2 (Cauchy–Schwarz olikhet)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Då gäller

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Vad är en vinkel i ett godtyckligt euklidiskt rum?

Sats 2.2 (Cauchy–Schwarz olikhet)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Då gäller

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Definition 2.3 (vinkel)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. **Vinkeln** mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras som talet

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right).$$

Vad är en vinkel i ett godtyckligt euklidiskt rum?

Sats 2.2 (Cauchy–Schwarz olikhet)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Då gäller

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Definition 2.3 (vinkel)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. **Vinkeln** mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras som talet

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right).$$

- Tack vare Cauchy–Schwarz gäller $-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$, därför är $\arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)$ definierat.
- Vinkeln φ ligger då i intervallet $[0, \varphi]$.

Skalärprodukt och vinkel en gång till

Observera:

Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ och φ är vinkeln* mellan dem, då gäller:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi.$$

*Definierat genom Def. 2.3.

Sats 2.4 (skalärproduktens egenskaper)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$ och låt $c \in \mathbb{R}$. Då gäller det följande:

- (i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$;
- (ii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;
- (iii) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$;
- (iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 \geq 0$.

Exempel.

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara vektorer sådana att $|\mathbf{u}| = 2$ och $|\mathbf{v}| = 3$ och vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{3}$. Finn värdet

$$(2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

Exempel

Exempel.

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara vektorer sådana att $|\mathbf{u}| = 2$ och $|\mathbf{v}| = 3$ och vinkeln mellan dem är $\frac{\pi}{3}$. Finn värdet

$$(2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}.$$

Exempel.

Finn vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Parallella och ortogonala vektorer

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$.

Vi säger att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är **ortogonala** (vinkelräta) om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Notation: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Parallella och ortogonala vektorer

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$.

Vi säger att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är **ortogonal** (vinkelräta) om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Notation: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Vi säger att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är **parallella** om det finns en skalär $c \in \mathbb{R}$ så att

$$\mathbf{u} = c \mathbf{v}.$$

De är alltså fallet då både två Ortsvektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ har samma eller motsatt riktning.

Notation: $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Parallella och ortogonala vektorer

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$.

Vi säger att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är **ortogonal** (vinkelräta) om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Notation: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Vi säger att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är **parallella** om det finns en skalär $c \in \mathbb{R}$ så att

$$\mathbf{u} = c \mathbf{v}.$$

De är alltså fallet då både två Ortsvektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ har samma eller motsatt riktning.

Notation: $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

Observera:

Nollvektorn är både parallell med och ortogonal mot varje vektor i $\mathbb{R}^n$.

Sats 2.5 (Pythagoras)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Då är de följande påståenden ekvivalenta:

- (i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$.

- Vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}$ (som pilar) utformar sidorna i en triangel.
- Pythagoras sats säger att (ii) gäller om och endast om triangeln är rätvinklig med kateterna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
- Satsen gäller inte bara i $\mathbb{R}^2$ -planet, utan i alla $\mathbb{R}^n$.
- Bevisa satsen genom att använda Sats 2.4(iv).

OBS!

Det som vi kommer att göra nu funkar **endast i $\mathbb{R}^3$** .

Tre oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$

Mål:

Anta två **icke-parallella** vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Vi vill konstruera en tredje vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ som är **ortogonal både mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$** .

Tre oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$

Mål:

Anta två **icke-parallella** vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Vi vill konstruera en tredje vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ som är **ortogonal både mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$** .

Observera:

Om pilarna $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ligger i tavlans plan, ska $\mathbf{w}$ peka antingen "mot salen" eller "mot väggen".

Orientering av en vektortrippel

Anta tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sådana att de inte ligger i samma plan om vi uppfattar dem som Ortsvektorer, dvs. pilar.

Orientering av en vektortrippel

Anta tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sådana att de inte ligger i samma plan om vi uppfattar dem som ortsvektorer, dvs. pilar.

Den ordnade trippeln $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ kallas ett **högersystem** om den minsta vridningen som överför vektorn $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$'s riktning ses moturs från spetsen av $\mathbf{w}$.

Annars kallas $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ett **vänstersystem**.

Orientering av en vektortrippel

Anta tre vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sådana att de inte ligger i samma plan
om vi uppfattar dem som ortsvektorer, dvs. pilar.

Den ordnade trippeln $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ kallas ett **högersystem** om den minsta vridningen som överför vektorn $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$:s riktning ses moturs från spetsen av $\mathbf{w}$.

Annars kallas $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ett **vänstersystem**.

Ett annat sätt: **högerhandsregeln**

Pekfingret: första vektor $\mathbf{u}$

Långfingret: andra vektor $\mathbf{v}$

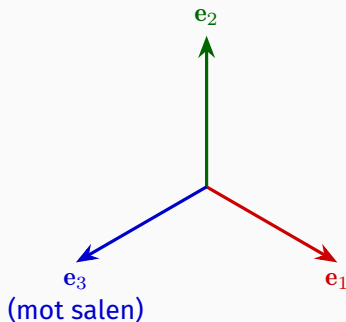
Tummen: tredje vektor $\mathbf{w}$

Orientering av en vektortrippel

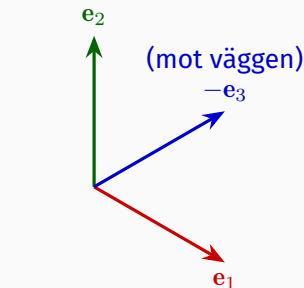
Ett annat sätt: det "naturliga ordningen" på (e_1, e_2, e_3) :

e_1 ... horisontellt åt höger i tavlans plan

e_2 ... vertikalt uppåt i tavlans plan



(e_1, e_2, e_3)
högersystem



$(e_1, e_2, -e_3)$
vänstersystem

Tillbaka till problemet

Anta icke-parallella $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Vi vill få en ny vektor betecknad $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, kallad **vektorprodukten** av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, med dem följande egenskaperna:

Tillbaka till problemet

Anta icke-parallella $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Vi vill få en ny vektor betecknad $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, kallad **vektorprodukten** av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, med dem följande egenskaperna:

- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{u}$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{v}$;
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är ett högersystem;
- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \varphi$, där φ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Tillbaka till problemet

Anta icke-parallella $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Vi vill få en ny vektor betecknad $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, kallad **vektorprodukten** av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, med dem följande egenskaperna:

- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{u}$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{v}$;
alternativt: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ är ett högersystem;
- $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \varphi$, där φ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
alternativt: $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

Definition 2.6 (vektorprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Då definieras **vektorprodukten** av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som vektorn

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Definition 2.6 (vektorprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Då definieras **vektorprodukten** av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som vektorn

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- Detta går **endast i $\mathbb{R}^3$** . I andra $\mathbb{R}^n$ finns ingen vektorprodukt.
- Vektorprodukten av två vektorer från $\mathbb{R}^3$ är en **vektor från $\mathbb{R}^3$** .
- Alternativt namn: **kryssprodukt**.

Vektorprodukt – minnesregel

Exempel.

Låt

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hitta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Tips:

Ett sätt att minnas vektorproduktens definition: s. k. **Sarrus regel**.

(Samband med **determinant** – vi ska se det senare.)

Vektorprodukt – minnesregel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \\ \hline \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

Vektorprodukt – minnesregel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & \textcolor{red}{v_2} \\ \mathbf{e}_3 & \textcolor{red}{u_3} & v_3 \\ \hline \textcolor{red}{\mathbf{e}_1} & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - \textcolor{red}{u_3 v_2} \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - \textcolor{red}{u_3 v_2}) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

Vektorprodukt – minnesregel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \\ \hline \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

Vektorprodukt – minnesregel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & \textcolor{red}{v_3} \\ \hline \mathbf{e}_1 & \textcolor{red}{u_1} & v_1 \\ \textcolor{red}{\mathbf{e}_2} & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - \textcolor{red}{u_1 v_3} \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - \textcolor{red}{u_1 v_3}) \textcolor{red}{\mathbf{e}_2} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

Vektorprodukt – minnesregel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \\ \hline \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

Vektorprodukt – minnesregel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \\ \hline \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3$$

Vektorprodukt – egenskaper

Vektorprodukten definierad genom Def. 2.6 har verkligen de önskade egenskaperna. Vi kan presentera dem inom en sats.

Sats 2.7 (vektorproduktens egenskaper)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Då gäller:

- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$.

Vektorprodukt – egenskaper

Vektorprodukten definierad genom Def. 2.6 har verkligen de önskade egenskaperna. Vi kan presentera dem inom en sats.

Sats 2.7 (vektorproduktens egenskaper)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Då gäller:

- (i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$;
- (ii) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$.

Exempel.

Bevisa att egenskapen (ii) i Sats 2.7 är ekvivalent till påståendet:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \varphi, \text{ där } \varphi \text{ är vinkeln mellan } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v}.$$

Vektorprodukt – geometrisk tolkning

Observera:

Värdet $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\varphi$ är **arean** A av **parallelogrammen** med sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (uppfattade som Ortsvektorer).

Vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är därför en vektor ortogonal mot parallelogrammen och dess storlek är A .

Sats 2.8 (vektorproduktens egenskaper)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ och $c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

- (i) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$;
- (ii) $(c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$;
- (iii) $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{v}$.

Definition 2.9 (trippelprodukt)

Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Då kallas talet

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

trippelprodukten av vektorerna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

- Trippelprodukten är en **skalär**, dvs. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \in \mathbb{R}$.

Trippelprodukt – geometrisk tolkning

Exempel.

Visa att värdet

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

är volymen av **parallelepipeden** med sidorna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (uppfattade som ortsvektorer).

Exempel.

Bestäm om **ortsvektorerna**

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ligger i samma plan.

Ekvivalent formulering: Bestäm om **punkterna** $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{0}$ ligger i samma plan.