

Linjär algebra

TATA16, höstterminen 2026

Martin Křepela

Matematiska institutionen, Linköpings universitet

`martin.krepela@liu.se`

Dokumentversion: 14 september 2026

Linjer, plan och ortogonalprojektioner

Linje i ett högre dimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva en linje i $\mathbb{R}^n$?

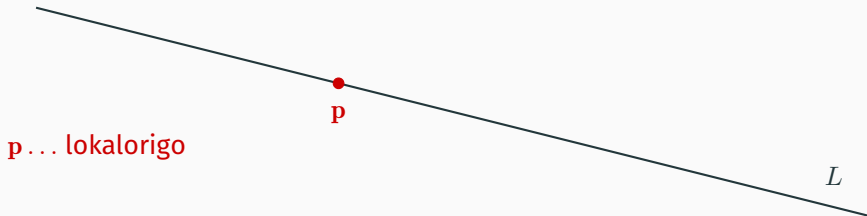
Linje i ett högre dimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva en linje i $\mathbb{R}^n$?



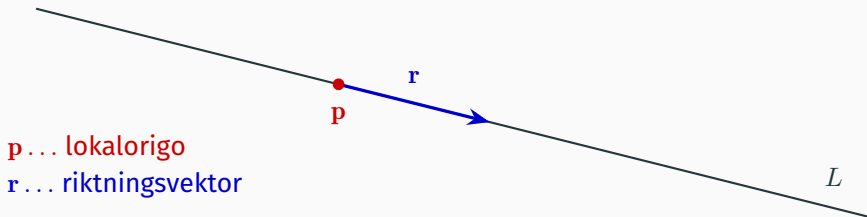
Linje i ett högredimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva en linje i $\mathbb{R}^n$?



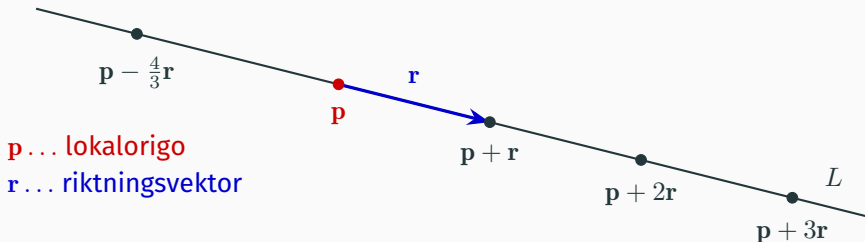
Linje i ett högredimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva en linje i $\mathbb{R}^n$?



Linje i ett högre dimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva en linje i $\mathbb{R}^n$?

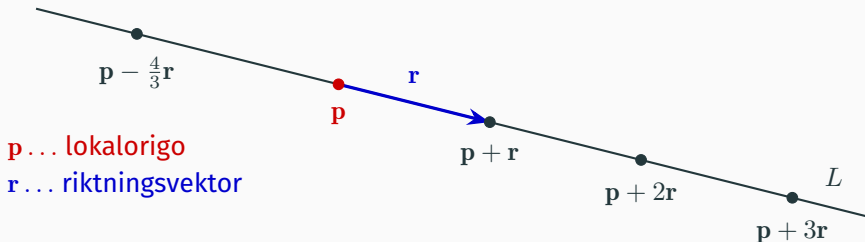


Observera:

Varje punkt x på linjen kan anges i form $x = p + tr$, där $t \in \mathbb{R}$.

Linje i ett högre dimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva en linje i $\mathbb{R}^n$?



$p \dots$ lokolorigo

$r \dots$ riktningsvektor

Observera:

Varje punkt x på linjen kan anges i form $x = p + tr$, där $t \in \mathbb{R}$.

- Kan vi välja ett annat lokolorigo?
Ja, men det måste ligga på linjen.
- Kan vi välja en annan riktningsvektor?
Ja, men den måste vara en nollskild multipel av r .

Linje – formell definition

Definition 3.1 (linje)

Låt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mängden

$$L = \{\mathbf{p} + t\mathbf{r} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

kallas en **linje**. Ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r} \quad (2)$$

kallas **L :s parameterekvation**. I den kallas $\mathbf{p}$ ett **lokalorigo** och $\mathbf{r}$ en **riktningsvektor** till L .

Linje – formell definition

Definition 3.1 (linje)

Låt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mängden

$$L = \{\mathbf{p} + t\mathbf{r} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

kallas en **linje**. Ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r} \quad (2)$$

kallas **L 's parameterekvation**. I den kallas $\mathbf{p}$ ett **lokalorigo** och $\mathbf{r}$ en **riktningsvektor** till L .

- Linjen L består exakt av alla punkter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller (2).
- Detta kan användas i varje $\mathbb{R}^n$ med $n \geq 2$. Vi fokuserar mest på $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.
- Punkten $\mathbf{p}$ och vektorn $\mathbf{r}$ är **inte entydigt bestämda** (flera parameterekvationer beskriver samma linje).
- Riktningsvektorn $\mathbf{r}$ **får inte vara noll**. Då skulle L bestå av en enda punkt.

Linje i $\mathbb{R}^2$ – notation

Allmän notation i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ekvationen $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r}$ kan alltså skrivas som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Linje i $\mathbb{R}^2$ – notation

Allmän notation i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ekvationen $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r}$ kan alltså skrivas som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Vanligare notation i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ i stället för } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ i stället för } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Linje i $\mathbb{R}^2$ – notation

En parameterekvation för en linje i $\mathbb{R}^2$ kan vi alltså skriva som:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Analogiskt för en linje i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Linje bestämd av två punkter

Exempel.

Hitta linjen (i $\mathbb{R}^3$) som går genom punkterna

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svara genom att skriva endast linjens parameterekvation (jfr. (2)) eller att ange L på mängdform (jfr. (1)). Hitta två olika rätta lösningar.

Linje i $\mathbb{R}^2$ – alternativ beskrivning

Sats 3.2 (normalform av en linje i $\mathbb{R}^2$)

Låt $L \subset \mathbb{R}^2$ vara en linje. Då finns $A, B, C \in \mathbb{R}$ sådana att L består av och endast av punkterna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$Ax + By + C = 0. \quad (3)$$

Denna kallas **L 's normalekvation**.

- **OBS!** Denna beskrivning av en linje är möjlig **endast i $\mathbb{R}^2$** .

Linje i $\mathbb{R}^2$ – alternativ beskrivning

Sats 3.2 (normalform av en linje i $\mathbb{R}^2$)

Låt $L \subset \mathbb{R}^2$ vara en linje. Då finns $A, B, C \in \mathbb{R}$ sådana att L består av och endast av punkterna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$Ax + By + C = 0. \quad (3)$$

Denna kallas **L 's normalekvation**.

- **OBS!** Denna beskrivning av en linje är möjlig **endast i $\mathbb{R}^2$** .
- Om vi byter A, B, C i (5) mot kA, kB, kC , där $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, får vi samma linje.

Linje i $\mathbb{R}^2$ – alternativ beskrivning

Fråga:

Kan vi växla mellan parameter- och normalekvationen på ett bra sätt?

Svar:

Ja, det finns ett enkelt samband.

Normalvektor till en linje i $\mathbb{R}^2$

Definition 3.3 (normalvektor till en linje i $\mathbb{R}^2$)

Låt $L \subset \mathbb{R}^2$ vara en linje med en riktningsvektor $\mathbf{r}$. En godtycklig vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ som uppfyller

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

kallas en **normalvektor** till linjen L .

Normalvektor till en linje i $\mathbb{R}^2$

Definition 3.3 (normalvektor till en linje i $\mathbb{R}^2$)

Låt $L \subset \mathbb{R}^2$ vara en linje med en riktningsvektor $\mathbf{r}$. En godtycklig vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ som uppfyller

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

kallas en **normalvektor** till linjen L .

- Riktningsvektorn $\mathbf{r}$ och normalvektorn $\mathbf{n}$ är bestämda bara upp till en skalärmultiplik. De är dock **alltid ortogonala mot varandra**.
- När vi känner $\mathbf{r}$, hittar vi en normalvektor enkelt, till exempel:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

(Kontrollera att $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$.)

Sats 3.4 (normalekvation vs. normalvektor till en linje i $\mathbb{R}^2$)

En linje $L \subset \mathbb{R}^2$ har en normalekvation

$$Ax + By + C = 0$$

om och endast om $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ är en normalvektor till L .

Exempel.

Hitta en ekvation på normalform för linjen (i $\mathbb{R}^2$) som går genom punkterna

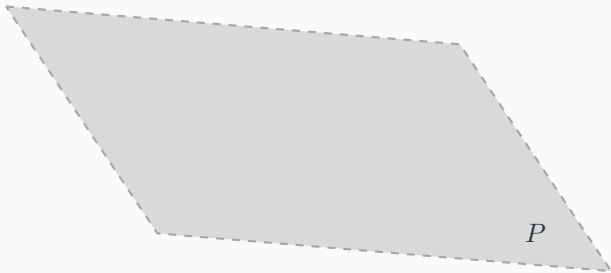
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Plan i ett högredimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva ett plan i $\mathbb{R}^n$?

Plan i ett högredimensionellt rum

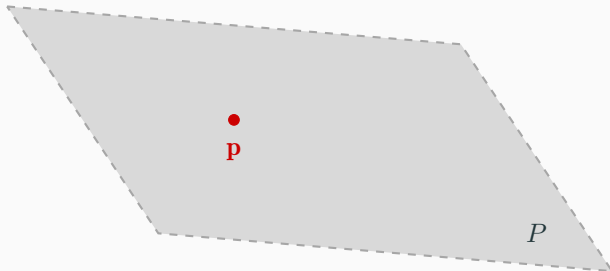
Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva ett plan i $\mathbb{R}^n$?



Plan i ett högredimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva ett plan i $\mathbb{R}^n$?

$p \dots$ lokalorigo



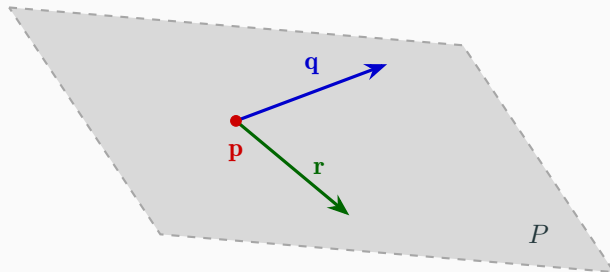
Plan i ett högredimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva ett plan i $\mathbb{R}^n$?

p ... lokalorigo

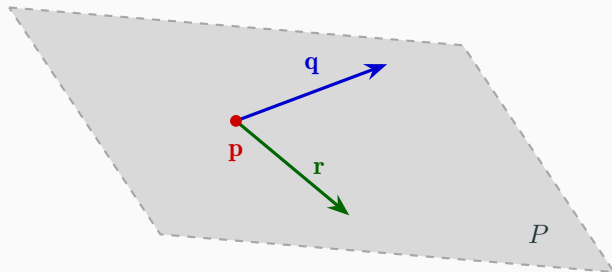
q ... riktningsvektor 1

r ... riktningsvektor 2



Plan i ett högredimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva ett plan i $\mathbb{R}^n$?



p ... lokalorigo

q ... riktningsvektor 1

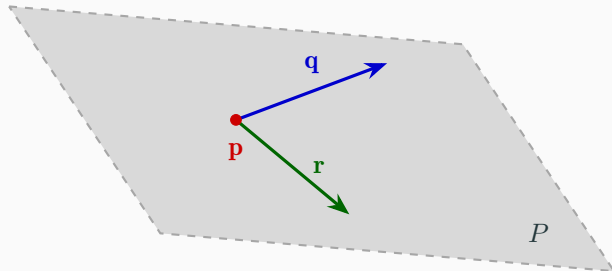
r ... riktningsvektor 2

Observera:

Varje punkt x i planet kan anges i form $x = p + sq + tr$, där $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Plan i ett högedimensionellt rum

Problem: Hur kan vi matematiskt beskriva ett plan i $\mathbb{R}^n$?



p ... lokolorigo

q ... riktningsvektor 1

r ... riktningsvektor 2

Observera:

Varje punkt x i planet kan anges i form $x = p + sq + tr$, där $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

- Kan vi välja ett annat lokolorigo?

Ja, men det måste ligga i planet.

- Kan vi välja andra riktningsvektorer?

Ja, men de måste vara nollskilda **linjärkombinationer** av q och r samt inte parallella med varandra.

Definition 3.5 (plan)

Låt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ och $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ vara icke-parallella. Mängden

$$P = \{\mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

kallas ett **plan**. Ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r} \tag{4}$$

kallas **P 's parameterekvation**. I den kallas $\mathbf{p}$ ett **lokalorigo** och $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ kallas **riktningsvektorer** till P .

Definition 3.5 (plan)

Låt $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ och $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ vara icke-parallella. Mängden

$$P = \{\mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

kallas ett **plan**. Ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{q} + t\mathbf{r} \tag{4}$$

kallas **P 's parameterekvation**. I den kallas $\mathbf{p}$ ett **lokalorigo** och $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ kallas **riktningsvektorer** till P .

- Planet P består exakt av alla punkter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller (4).
- Detta kan användas i varje $\mathbb{R}^n$ med $n \geq 3$. Vi ska fokusera på $\mathbb{R}^3$.
- Lokalorigo och riktningsvektorerna är **inte entydigt bestämda** (flera parameterekvationer beskriver samma plan).
- Riktningsvektorerna $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ **får inte vara noll**. Då skulle P vara endast en punkt eller en linje.

Plan angivet genom tre punkter

Exempel.

Finn en parameterekvation till planet $P \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Plan angivet genom tre punkter

Exempel.

Finn en parameterekvation till planet $P \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Skulle uppgiften ha en entydig lösning om vi hade ersatt $\mathbf{c}$ med

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}?$$

Plan i $\mathbb{R}^3$ – alternativ beskrivning

Sats 3.6 (normalform av ett plan i $\mathbb{R}^3$)

Låt $P \subset \mathbb{R}^3$ vara ett plan. Då finns $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sådana att P består av och endast av punkterna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5)$$

Denna kallas **P :s normalekvation**.

- **OBS!** Denna beskrivning av ett plan är möjlig **endast i $\mathbb{R}^3$** .

Plan i $\mathbb{R}^3$ – alternativ beskrivning

Sats 3.6 (normalform av ett plan i $\mathbb{R}^3$)

Låt $P \subset \mathbb{R}^3$ vara ett plan. Då finns $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sådana att P består av och endast av punkterna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5)$$

Denna kallas **P :s normalekvation**.

- **OBS!** Denna beskrivning av ett plan är möjlig **endast i $\mathbb{R}^3$** .
- Om vi byter A, B, C, D i (5) mot kA, kB, kC, kD , där $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, får vi samma plan.

Normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$

Definition 3.7 (normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$)

Låt $P \subset \mathbb{R}^3$ vara ett plan med riktningsvektorer $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. En godtycklig vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ som uppfyller

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{sam} \mathbf{t} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

kallas en **normalvektor** till planet P .

Normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$

Definition 3.7 (normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$)

Låt $P \subset \mathbb{R}^3$ vara ett plan med riktningsvektorer $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. En godtycklig vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ som uppfyller

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{sam} \mathbf{t} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

kallas en **normalvektor** till planet P .

- Riktningsvektorerna och normalvektorn är inte entydigt bestämda. En normalvektor $\mathbf{n}$ är dock **alltid ortogonal mot en riktningsvektor**, oavsett hur vi väljer riktningsvektorn i planet P .

Normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$

Definition 3.7 (normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$)

Låt $P \subset \mathbb{R}^3$ vara ett plan med riktningsvektorer $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. En godtycklig vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ som uppfyller

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{sam} \mathbf{t} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

kallas en **normalvektor** till planet P .

- Riktningsvektorerna och normalvektorn är inte entydigt bestämda. En normalvektor $\mathbf{n}$ är dock **alltid ortogonal mot en riktningsvektor**, oavsett hur vi väljer riktningsvektorn i planet P .
- Om $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ är icke-parallella riktningsvektorer, då är en möjlig normalvektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{q} \times \mathbf{r}.$$

(Kom ihåg: vektorprodukten är ortogonal mot både $\mathbf{q}$ och $\mathbf{r}$.)

Samband mellan parameter- och normalformen (plan)

Sats 3.8 (normalekvation vs. normalvektor till ett plan i $\mathbb{R}^3$)

Ett plan $P \subset \mathbb{R}^3$ har en normalekvation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

om och endast om vektorn

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

är en normalvektor till P .

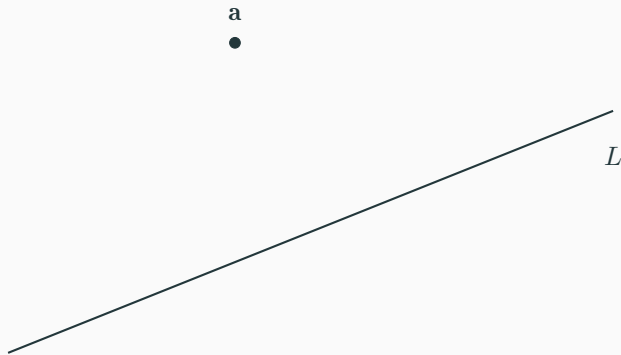
Exempel

Finn en normalekvation till planet $P \subset \mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

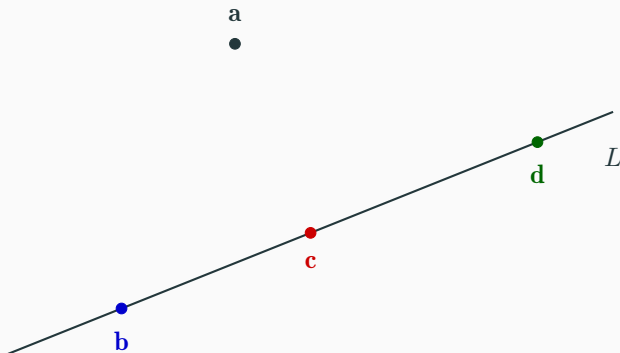
Projektion mot en linje

Problem: En punkt $a \in \mathbb{R}^n$ och en linje $L \subset \mathbb{R}^n$ är angivna. Vilken punkt på L ligger närmast till a ?



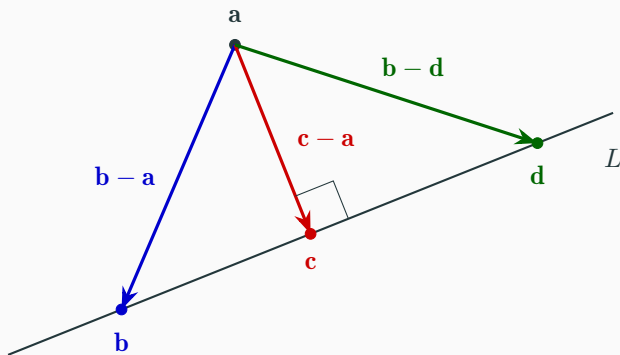
Projektion mot en linje

Problem: En punkt $a \in \mathbb{R}^n$ och en linje $L \subset \mathbb{R}^n$ är angivna. Vilken punkt på L ligger närmast till a ?



Projektion mot en linje

Problem: En punkt $a \in \mathbb{R}^n$ och en linje $L \subset \mathbb{R}^n$ är angivna. Vilken punkt på L ligger närmast till a ?



Observera:

Det blir punkten $c \in L$ för vilken är vektorn $c - a$ **ortogonal mot linjen L** (dvs. mot dess riktningsvektor).

Sats 3.9 (ortogonalprojektion mot en linje)

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) och låt $L \subset \mathbb{R}^n$ vara en linje med riktningsvektorn $\mathbf{r}$.
Det finns exakt en punkt $\mathbf{c} \in L$ som uppfyller

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Denna punkt $\mathbf{c}$ kallas **ortogonalprojektion** av $\mathbf{a}$ mot L och kan betecknas med symbolen

$$\text{pr}_L \mathbf{a}.$$

Den ligger närmast $\mathbf{a}$ av alla punkter på linjen L , alltså

$$|\text{pr}_L \mathbf{a} - \mathbf{a}| = \min\{|\mathbf{b} - \mathbf{a}| \mid \mathbf{b} \in L\}.$$

Sats 3.9 (ortogonalprojektion mot en linje)

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) och låt $L \subset \mathbb{R}^n$ vara en linje med riktningsvektorn $\mathbf{r}$.
Det finns exakt en punkt $\mathbf{c} \in L$ som uppfyller

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Denna punkt $\mathbf{c}$ kallas **ortogonalprojektion** av $\mathbf{a}$ mot L och kan betecknas med symbolen

$$\text{pr}_L \mathbf{a}.$$

Den ligger närmast $\mathbf{a}$ av alla punkter på linjen L , alltså

$$|\text{pr}_L \mathbf{a} - \mathbf{a}| = \min\{|\mathbf{b} - \mathbf{a}| \mid \mathbf{b} \in L\}.$$

- **OBS:** Om $\mathbf{a}$ redan ligger på L , då är $\text{pr}_L \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- Satsen gäller i varje $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Vi ska helst tillämpa den i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Projektion mot ett plan

Problem: En punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) och ett plan $P \subset \mathbb{R}^n$ är angivna. Vilken punkt i P ligger närmast till $\mathbf{a}$?

Projektion mot ett plan

Problem: En punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) och ett plan $P \subset \mathbb{R}^n$ är angivna. Vilken punkt i P ligger närmast till $\mathbf{a}$?

Analogiskt som tidigare: vi söker en sådan punkt $\mathbf{c} \in P$ att vektorn $(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ är **ortogonal** mot planet.

Det betyder att

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{sam} \mathbf{t} \quad (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0,$$

där $\mathbf{q}, \mathbf{r}$ är P 's två icke-parallella riktningsvektorer.

Det finns igen en enda punkt $\mathbf{c} \in P$ som uppfyller det.

Sats 3.10 (ortogonalprojektion mot ett plan)

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) och låt $P \subset \mathbb{R}^n$ vara ett med icke-parallella riktningsvektorer $\mathbf{q}, \mathbf{r}$. Det finns exakt en punkt $\mathbf{c} \in P$ som uppfyller

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Denna punkt $\mathbf{c}$ kallas **ortogonalprojektion** av $\mathbf{a}$ mot P och kan betecknas med symbolen

$$\text{pr}_P \mathbf{a}.$$

Den ligger närmast $\mathbf{a}$ av alla punkter i planet P , alltså

$$|\text{pr}_P \mathbf{a} - \mathbf{a}| = \min\{|\mathbf{b} - \mathbf{a}| \mid \mathbf{b} \in P\}.$$

Sats 3.10 (ortogonalprojektion mot ett plan)

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) och låt $P \subset \mathbb{R}^n$ vara ett med icke-parallella riktningsvektorer $\mathbf{q}, \mathbf{r}$. Det finns exakt en punkt $\mathbf{c} \in P$ som uppfyller

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0.$$

Denna punkt $\mathbf{c}$ kallas **ortogonalprojektion** av $\mathbf{a}$ mot P och kan betecknas med symbolen

$$\text{pr}_P \mathbf{a}.$$

Den ligger närmast $\mathbf{a}$ av alla punkter i planet P , alltså

$$|\text{pr}_P \mathbf{a} - \mathbf{a}| = \min\{|\mathbf{b} - \mathbf{a}| \mid \mathbf{b} \in P\}.$$

- **OBS:** Om $\mathbf{a}$ redan ligger i P , då är $\text{pr}_P \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- Satsen gäller i varje $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Vi ska helst tillämpa den i $\mathbb{R}^3$.

Avstånd från en linje eller ett plan

Låt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vara en punkt och $K \subset \mathbb{R}^n$ en linje eller ett plan.

Avståndet mellan $\mathbf{a}$ och K betyder då $|\mathbf{a} - \text{pr}_K \mathbf{a}|$.

Exempel.

Hitta avståndet mellan punkten

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

och planet $P \subset \mathbb{R}^3$ med normalekvationen

$$x + 4y - 2z + 1 = 0.$$

Avstånd från en linje eller ett plan

Exempel.

Hitta avståndet mellan punkten

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

och linjen $L \subset \mathbb{R}^3$ med parameterekvationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vidare objekt i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Följande sidor innehåller en lista på viktiga kurvor (**kägelsnitt**) i $\mathbb{R}^2$ och **andragradsytor** $\mathbb{R}^3$.

Läs detaljer i kursboken. En sammanfattning finns t. ex. också på:

<https://nmd.web.illinois.edu/quadrics>

<https://sv.wikipedia.org/wiki/Kägelsnitt>

<https://sv.wikipedia.org/wiki/Andragradsyta>

OBS: Se bilder i boken eller de externa källorna! Utan dem är listan inte mycket bra.

Kägelsnitt i $\mathbb{R}^2$

Ellipsen (eller cirkeln), **hyperbeln** och **parabeln** är **kurvor** i $\mathbb{R}^2$.

De kallas **kägelsnitt** (uppstår som en skärning mellan en kon och ett plan) eller **andragradskurvor** i $\mathbb{R}^2$.

OBS!

De är objekt i $\mathbb{R}^2$, alltså i **2D**-planet.

Cirkel och ellips

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formar en **cirkel** om $a = b$, eller en **ellips** om $a \neq b$.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ger samma kurvan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Hyperbel

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formar en **hyperbel**.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ger samma kurvan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Parabel

Låt $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Alla punkter $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$$

formar en **parabel**.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - (y - y_0) = 0$$

ger samma kurvan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Andragradsytor

Objekten som följer är **ytor** i $\mathbb{R}^3$.

De kallas **andragradsytor** (deras ekvationer innehåller andragradspolynom).

OBS!

De är objekt i $\mathbb{R}^3$, alltså i **3D**-rummet.

Sfär och ellipsoid

Låt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

formar en **ellipsoid**. Om $a = b = c$, är den en **sfär**.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

ger samma ytan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Enmantlad elliptisk hyperboloid

Låt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

formar en **enmantlad elliptisk hyperboloid**. Den kallas även en enmantlad **rotationshyperboloid** om $a = b$.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

ger samma ytan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Tvåmantlad elliptisk hyperboloid

Låt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

formar en **tvåmantlad elliptisk hyperboloid**. Den kallas även en tvåmantlad **rotationshyperboloid** om $a = b$.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1$$

ger samma ytan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Elliptisk paraboloid

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

formar en **elliptisk paraboloid**. Den kallas även en **rotationsparaboloid** om $a = b$.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - (z - z_0) = 0$$

ger samma ytan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Elliptisk hyperboloid

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

formar en **elliptisk hyperboloid**. Den kallas även en **rotationshyperboloid** om $a = b$.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - (z - z_0) = 0$$

ger samma ytan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Elliptisk cylinder

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formar en **elliptisk cylinder**. Den kallas även en **rotationscylinder** om $a = b$.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ger samma kurvan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Hyperbolisk cylinder

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formar en **hyperbolisk cylinder**.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ger samma kurvan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Parabolisk cylinder

Låt $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$$

formar en **parabolisk cylinder**.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - (y - y_0) = 0$$

ger samma kurvan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Kon

Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Alla punkter $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$$

formar en **elliptisk kon**. Om $a = b$, kallas den endast kon eller **rotationskon**.

Ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + (z - z_0)^2 = 0$$

ger samma ytan förskjuten längst vektorn $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.