

Linjär algebra

TATA16, höstterminen 2026

Martin Křepela

Matematiska institutionen, Linköpings universitet

`martin.krepela@liu.se`

Dokumentversion: 23 september 2026

Linjära ekvationssystem

Bra ytterligare källa till detta och vidare kapitel:

<https://textbooks.math.gatech.edu/ila/>

Linjära ekvationer

Fråga 1:

Var finns skärningspunkten mellan linjer med ekvationer $6x + 9y - 16 = 0$, respektive $x + y - 2 = 0$?

Fråga 2:

En lösning innehåller 60% etanol och en annan 90% etanol. Hur mycket av vardera måste blandas för att få 2 liter lösning med 80% etanol?

Fråga 3:

En bil kör en 160 km lång sträcka på totalt 2 timmar. Under en del av tiden kör den i 60 km/h och under resten i 90 km/h. Hur länge körde bilen i respektive hastighet?

Alla tre frågor leder till samma matematiskt problem:
ett system av två linjära ekvationer.

Definition 4.1 (linjärt ekvationssystem)

Låt $m, n \in \mathbb{N}$. Ett system av ekvationer

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

där alla a_{ij}, b_i är reella konstanter, kallas ett **linjärt ekvationssystem** med m ekvationer för n variabler (kort: ett $(m \times n)$ LES). En ordnad n -tupel av reella tal $x_1, \dots, x_n$ som uppfyller alla ekvationer i (1) kallas en **lösning** till systemet (1).

- Lösningen ovan är alltså en **vektor** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Vad behöver vi kunna:

- Hitta lösningar enklare – med hjälp av **matriser**.
- Förstå när systemet har en lösning.
- Förstå när systemet har fler lösningar och vilken struktur de har i så fall.

Sats 4.2 (elementära radoperationer)

Lösningsmängden till systemet (1) ändras inte när man:

- (i) byter två ekvationer mot varandra,
- (ii) multiplicerar en ekvation med ett **nollskilt** reellt tal,
- (iii) multiplicerar en ekvation med ett reellt tal och adderar den till en annan.

- Ovanstående operationer kallas **elementära radoperationer**.
- Två $(m \times n)$ -LES kallas **ekvivalenta** om de har samma lösningsmängd.
- **Matriser** används för att skriva systemet kortare.

Definition 4.3 (matris)

Låt $m, n \in \mathbb{N}$. Ett ordnat fält

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

där alla a_{rk} är reella tal, kallas en **reel** $(m \times n)$ -**matris**. Mängden av alla sådana matriser betecknas med $\mathbb{R}^{m \times n}$.

- Matrisen ovan har m **rader** och n **kolonner**.
- Positionsbeteckning: a_{rk} ...talet i **rad** r och **kolonn** k .

Matrisform på ett LES

För att lösa systemet

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

använder vi en **utökad matris**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Symboliskt betecknar vi den $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ och kallar $\mathbf{b}$ **högerledsvektorn** här.

Trappform

Man säger att följande matriser är på **trappform**:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rad 2 börjar med en nolla.
Rad 3 börjar med 2 nollor.
Osv.
- Reella tal "*" kan vara godtyckliga (även 0).
- Formellt: $a_{rk} = 0$ om $r > k$ (se nästa sida).

Definition 4.4 (matris på trappform)

Vi säger att matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

är på **trappform** om $a_{rk} = 0$ för alla $r \in \{1, \dots, m\}$ och $k \in \{1, \dots, n\}$ sådana att $r > k$.

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11.$$

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11.$$

Observera:

- Varje ekvation beskriver ett **plan** i $\mathbb{R}^3$.
- Räkningen visade att detta system har **exakt en lösning**.
- Lösningen är **skärningspunkten** mellan alla tre plan.

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$4x_1 + 4x_3 = 12.$$

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$4x_1 + 4x_3 = 12.$$

Observera:

- Den 3:e ekvationen är summan av de första två.

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$4x_1 + 4x_3 = 12.$$

Observera:

- **Den 3:e ekvationen är summan av de första två.**
- Varje ekvation beskriver ett **plan** i $\mathbb{R}^3$.
- Räkningen visade att detta system har **oändligt många lösningar**.
- Lösningsmängden är **skärningsmängden** mellan alla tre plan, här en **linje**.

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9.$$

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9.$$

Observera:

- Den 2:a och den 3:e ekvationen kan inte gälla samtidigt.

Exempel.

Lös det linjära ekvationssystemet

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9.$$

Observera:

- **Den 2:a och den 3:e ekvationen kan inte gälla samtidigt.**
- Varje ekvation beskriver ett **plan** i $\mathbb{R}^3$.
- Räkningen visade att detta system **saknar en lösning**.
- Det finns **ingen skärningspunkt** mellan **alla tre** plan.

Gausselimination: sammanfattning

Ett LES löser man med **Gauss eliminationsmetod (GEM)** så här:

- 0) Skriv systemet på matrisform ($A|b$).
- 1.a) Om 1:a kolonnen innehåller en icke-nolla *, byt eventuellt rader så att * står på 1:a raden.
- 1.b) Utför elementära radoperationer (på **hela rader** inkl. HL) för att eliminera alla icke-nollor i 1:a kolonnen under * på 1:a raden.
- 2.a) Om 2:a kolonnen innehåller en icke-nolla * **på rad 2 eller under**, byt eventuellt rader så att * står på 2:a raden.
- 2.b) Eliminera alla icke-nollor i 2:a kolonnen under * på 2:a raden.
- 3) Upprepa tills den resulterande matrisen ($A'|b'$) är på trappform.
- 4) Ta bort alla nollrader (**OBS:** 0 måste finnas även i HL-kolonnen!)
- 5) Hitta lösningar genom bakåtsubstitutionen (eller se att inga finns).

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \right)$$

Systemet på matrisform $(A|b)$.

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & * & * & * & * \\ \circledast & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \circledast & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \right)$$

Radbyte för att få icke-nolla på plats $\circledast$.

Om hela 1:a raden är nollor, gör man ingenting.

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \circledast & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \circledast & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

Elimination av icke-nollor under $\circledast$ i 1:a kolonnen.

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & \textcircled{*} & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & \textcircled{*} & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \right)$$

Radbyte för att få icke-nolla på plats $\textcircled{*}$.

Om $\textcircled{*}$ och allt under det i 2:a kolonnen är noll, gör man ingenting.

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

Elimination av icke-nollor under $\circledast$ i 2:a kolonnen.

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array} \right)$$

Upprepning tills hela matrisen är på trappform.

Observera: 0 kan även uppstå på några (även alla) platser *.

Gausselimination: sammanfattning

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array} \right)$$

Elimination av nollrader.

Möjlig endast om **0** finns även i HL.

Annars stannar raden kvar.

Gausselimination som en sats

Det som vi gjorde kan sammanfattas i följande sats:

Sats 4.5 (systemets överföring till trappform)

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Då finns en matris $\mathbf{A}' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och en vektor $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$ sådana att den utökade matrisen $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$ är på trappform samt både systemen $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ och $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$ har samma lösningsmängd.

Gausselimination som en sats

Det som vi gjorde kan sammanfattas i följande sats:

Sats 4.5 (systemets överföring till trappform)

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Då finns en matris $\mathbf{A}' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och en vektor $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^m$ sådana att den utökade matrisen $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$ är på trappform samt både systemen $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ och $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$ har samma lösningsmängd.

- I GEM överför vi m.h.a. radoperationer matrisen $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ till form $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$.
- När $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$ är på trappform, kan systemet lösas med bakåtsubstitutionen.
- Matrisen $\mathbf{A}'$ och vektorn $\mathbf{b}'$ är **inte entydigt bestämda**. Genom GEM kan vi få olika former $(\mathbf{A}'|\mathbf{b}')$ men alla motsvarande LES har samma lösningsmängd som $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Pivåelement i utökade trappmatriser

Betrakta en utökad matris **på trappform**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \circledast & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * \\ 0 & 0 & \circledast & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & * & * \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \end{array} \right)$$

Det första **nollskilt** element $\circledast$ på varje rad kallas ett **pivåelement**.

Hur många lösningar har LES med en trappmatris?

Systemet med en utökade trappmatris

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \circledast & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * \\ 0 & 0 & \circledast & * \end{array} \right)$$

har **en enda lösning**

om och endast om

matrisen $\mathbf{A}$ **är kvadratisk** ($n \times n$) och **varje** dess kolonn innehåller ett pivåelement.

Varje variabel x_i är då entydigt bestämd.

Hur många lösningar har LES med en trappmatris?

Systemet med en utökade trappmatris

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & * & * \end{array} \right)$$

har **oändligt många lösningar**

om och endast om

HL-vektorn b och minst **en kolonn i** A innehåller **inget** pivåelement.

Hur många lösningar har LES med en trappmatris?

Systemet med en utökade trappmatris

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

har **oändligt många lösningar**

om och endast om

HL-vektorn b och minst **en kolonn i** A innehåller **inget** pivåelement.

Variabeln x_i är **fri** om i :e kolonn saknar ett pivåelement.

Denna variabel kan väljas godtyckligt som en **parameter** i lösningen.

Varje lösning x kan skrivas som

$$x = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_k v_k,$$

där t_i är reella tal (parameter), v_i är vissa vektorer och k är antalet fria variabler i systemet.

Hur många lösningar har LES med en trappmatris?

Systemet med en utökade trappmatris

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \circledast & * & * & * & * & * \\ 0 & \circledast & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \circledast & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \circledast \end{array} \right)$$

har **ingen lösning**

om och endast om

HL-vektorn $\mathbf{b}$ innehåller ett pivåelement.

Raden med pivån i HR motsvarar ekvationen $0 = \circledast$ som inte kan uppfyllas.

Linjärt (o)beroende vektorer

Definition 4.6 (linjärt beroende och oberoende vektorer)

Låt $k, n \in \mathbb{N}$. Betrakta vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ från $\mathbb{R}^n$. Dessa vektorer (eller mängden bestående av dem) kallas

- (i) **linjärt beroende** om det finns reella tal $c_1, \dots, c_k$ sådana att

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k \quad (2)$$

och minst ett av talen c_i inte är noll;

- (ii) **linjärt oberoende** om de inte är linjärt beroende, dvs. om ekvationen (2) gäller endast då alla c_i där är lika med noll.

- Man säger: "mängden $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt beroende" eller "vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ är linjärt beroende". Både betyder samma sak.

Sats 4.7 (alternativ beskrivning av LB vektorer)

Låt $k, n \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 2$. Vektorer $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (alla från $\mathbb{R}^n$) är linjärt beroende om och endast om en av dem är en linjärkombination av de andra.

- Att en vektor är en LK av de andra betyder formellt att det finns $j \in \{1, \dots, k\}$ så att

$$\mathbf{v}_j = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_{j-1} \mathbf{v}_{j-1} + c_{j+1} \mathbf{v}_{j+1} + \dots + c_k \mathbf{v}_k,$$

där alla c_i är reella tal (även 0).

Linjärt beroende (LB) vektorer

- En vektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Linjärt beroende (LB) vektorer

- **En** vektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.
- **Två** vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow$ en är en multipel av den andra $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ligger på samma linje i $\mathbb{R}^n$.

Linjärt beroende (LB) vektorer

- **En** vektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.
- **Två** vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow$ en är en multipel av den andra $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ligger på samma linje i $\mathbb{R}^n$.
- **Tre** vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ligger i samma plan i $\mathbb{R}^n$.

Linjärt beroende (LB) vektorer

- **En** vektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.
- **Två** vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow$ en är en multipel av den andra $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ligger på samma linje i $\mathbb{R}^n$.
- **Tre** vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ är LB $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ligger i samma plan i $\mathbb{R}^n$.
- Detaljer på nästa tre sidor.

En linjärt beroende vektor

En vektor $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om

$$\mathbf{0} = c \mathbf{v}_1$$

där $c \neq 0$. Det betyder dock att $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

Alltså

$$\mathbf{v}_1 \text{ är LB} \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

Två linjärt beroende vektorer

Två vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om en av dem kan uttryckas som en multipel av den andra, t. ex.

$$\mathbf{v}_1 = c \mathbf{v}_2.$$

Då gäller:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0 \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} + c \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} + 1 \mathbf{v}_2.$$

Linjens parameterekvation: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t \mathbf{r}.$

(här: $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \mathbf{r} = \mathbf{v}_2$)

Alltså:

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är LB $\Leftrightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är parallella $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ligger på samma linje.

Obs: Det kan även hända att $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Då är dock $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{0}$ samma punkt och därför ligger alla på samma linje ändå.

Tre linjärt beroende vektorer

Tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ är linjär beroende om en av dem kan uttryckas som en LK av de andra, t. ex.

$$\mathbf{v}_1 = c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3.$$

Då gäller:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0 \mathbf{v}_2 + 0 \mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} + 1 \mathbf{v}_2 + 0 \mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} + 0 \mathbf{v}_2 + 1 \mathbf{v}_3.$$

Planets parameterekvation: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s \mathbf{q} + t \mathbf{r}.$

(här: $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \mathbf{q} = \mathbf{v}_2, \mathbf{r} = \mathbf{v}_3$)

Alltså:

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är LB $\Leftrightarrow$ punkter $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ligger i samma plan.

Obs: Det kan även hända att $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. eller $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Då ligger $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ till och med på samma linje eller är även alla lika med $\mathbf{0}$.

Linjärt oberoende vektorer: exempel

Exempel.

Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är linjärt **oberoende**.

Linjärt oberoende vektorer: exempel

Exempel.

Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

är linjärt **oberoende**.

Observera:

Ingen av dem kan uttryckas som en LK av de andra – nollorna skulle inte stämma.

Linjärt beroende vektorer: exempel

Exempel.

Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

är linjärt **beroende**.

Observera:

$$\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1, \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{0} = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Linjärt beroende vektorer: exempel

Exempel.

Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

är linjärt **beroende**.

Observera:

$$\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \quad \text{dvs.} \quad \mathbf{0} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

Definition 4.8 (underrum av $\mathbb{R}^n$)

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas ett **underrum** om den har båda följande egenskaper:

- (i) För **varje** två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ som hör till V hör deras summa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ också till V ;
- (ii) För **varje** vektor $\mathbf{u}$ som hör till V och **varje** skalär $c \in \mathbb{R}$ hör multi-peln $c\mathbf{u}$ också till V .

Definition 4.8 (underrum av $\mathbb{R}^n$)

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas ett **underrum** om den har båda följande egenskaper:

- (i) För **varje** två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ som hör till V hör deras summa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ också till V ;
- (ii) För **varje** vektor $\mathbf{u}$ som hör till V och **varje** skalär $c \in \mathbb{R}$ hör multi-peln $c\mathbf{u}$ också till V .

- Underrummet är **slutet under addition och skalärmultiplikation**:

$$(\mathbf{u} \in V \ \& \ \mathbf{v} \in V) \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V,$$

$$(\mathbf{u} \in V \ \& \ c \in \mathbb{R}) \implies c\mathbf{u} \in V.$$

Definition 4.8 (underrum av $\mathbb{R}^n$)

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas ett **underrum** om den har båda följande egenskaper:

- (i) För **varje** två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ som hör till V hör deras summa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ också till V ;
- (ii) För **varje** vektor $\mathbf{u}$ som hör till V och **varje** skalär $c \in \mathbb{R}$ hör multi-peln $c\mathbf{u}$ också till V .

- Underrummet är **slutet under addition och skalärmultiplikation**:

$$(\mathbf{u} \in V \ \& \ \mathbf{v} \in V) \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V,$$

$$(\mathbf{u} \in V \ \& \ c \in \mathbb{R}) \implies c\mathbf{u} \in V.$$

Slogan:

"What happens in Vegas, stays in Vegas."

Underrum – egenskaper och exempel

Observera:

- Både den tomma mängden $\emptyset$ och mängden $\{0\}$ är underrum av $\mathbb{R}^n$ (s.k. **triviala underrum**).

Underrum – egenskaper och exempel

Observera:

- Både den tomma mängden $\emptyset$ och mängden $\{0\}$ är underrum av $\mathbb{R}^n$ (s.k. **triviala underrum**).
- Varje linje som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Observera:

- Både den tomma mängden $\emptyset$ och mängden $\{0\}$ är underrum av $\mathbb{R}^n$ (s.k. **triviala underrum**).
- Varje linje som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.
- Varje plan som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Observera:

- Både den tomma mängden $\emptyset$ och mängden $\{0\}$ är underrum av $\mathbb{R}^n$ (s.k. **triviala underrum**).
- Varje linje som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.
- Varje plan som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).
- Hela rummet $\mathbb{R}^n$ är sitt eget underrum.

Underrum – egenskaper och exempel

Observera:

- Både den tomma mängden $\emptyset$ och mängden $\{0\}$ är underrum av $\mathbb{R}^n$ (s.k. **triviala underrum**).
- Varje linje som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.
- Varje plan som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).
- Hela rummet $\mathbb{R}^n$ är sitt eget underrum.
- Varje icke-trivialt underrum **måste innehålla 0** .

Underrum – egenskaper och exempel

Observera:

- Både den tomma mängden $\emptyset$ och mängden $\{0\}$ är underrum av $\mathbb{R}^n$ (s.k. **triviala underrum**).
- Varje linje som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.
- Varje plan som innehåller 0 är ett underrum av $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).
- Hela rummet $\mathbb{R}^n$ är sitt eget underrum.
- Varje icke-trivialt underrum **måste innehålla 0** .
- Icke-triviala underrum av $\mathbb{R}^n$ är **alltid oändliga** mängder.

Definition 4.9 (bas)

Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Låt $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ vara vektorer från V . Dessa vektorer bildar en **bas** till underrummet V , om de har båda följande egenskaper:

- (i) $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ är linjärt oberoende;
 - (ii) **Varje** vektor $\mathbf{v} \in V$ är en linjärkombination av $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$.
- Ekvivalent formulering till (ii): Varje $\mathbf{v} \in V$ kan uttryckas som
$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{b}_i = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_k \mathbf{b}_k,$$
där $c_1, \dots, c_k$ är reella tal.
 - Vektorer kallas **basvektorer** (till V) om de bildar en bas (till V).

Exempel.

Vi vet redan att $\mathbb{R}^3$ är ett underrum till $\mathbb{R}^3$. Vektorer

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildar en bas av $\mathbb{R}^3$ (den **kanoniska basen** - har vi redan sett!)

Det finns oändligt många andra baser till $\mathbb{R}^3$. Varje består dock **exakt av tre vektorer**.

Hur många vektorer kan en bas innehålla?

Obs: En bas är en **mängd av vektorer**.

Sats 4.10 (antal basvektorer)

Låt V vara ett underrum till $\mathbb{R}^n$. Alla baser till V innehåller samma antal basvektorer. Detta antal kallas **dimensionen** av V .

Exempel.

- Varje **linje som innehåller 0** är ett underrum. Dess dimension är 1.
- Varje **plan som innehåller 0** är ett underrum. Dess dimension är 2.

Sats 4.11 (bas till $\mathbb{R}^n$)

Varje linjärt oberoende mängd bestående av n vektorer från $\mathbb{R}^n$ bildar en bas till $\mathbb{R}^n$.

Linjärt oberoende vektorer: exempel

Exempel.

Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bildar en bas till $\mathbb{R}^3$ eftersom de är linjärt oberoende och tre.

Observera:

- Om $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt **oberoende**, då är $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ också linjärt oberoende.

Observera:

- Om $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt **oberoende**, då är $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ också linjärt oberoende.
- Om vi däremot lägger till en vektor $\mathbf{v}_{k+1}$, **kan** $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ bli linjärt **beroende**.

Egenskaper av LO-mängder

Observera:

- Om $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ är linjärt **oberoende**, då är $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ också linjärt oberoende.
- Om vi däremot lägger till en vektor $\mathbf{v}_{k+1}$, **kan** $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ bli linjärt **beroende**.
- Mängden av **fler än** n vektorer från $\mathbb{R}^n$ **måste** vara linjärt **beroende**.

Slogan:

"Fler vektorer, större risk av beroende."