

Linjär algebra

TATA16, höstterminen 2026

Martin Křepela

Matematiska institutionen, Linköpings universitet

`martin.krepela@liu.se`

Dokumentversion: 29 september 2026

Matriser

Kom ihåg: En $(m \times n)$ -matris har form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

- m rader, n kolonner.
- a_{ij} ...talet i rad i och kolonn j .
- Ordningen är alltid: "rad, kollon".

Typer av matriser

En $(n \times 1)$ -matris är en **kolonnvektor** (eller **kolonnmatris**).

Det är samma sak som en vektor från $\mathbb{R}^n$.

Exempel:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observera: (1×1) -matriser är rella tal.

Typer av matriser

En $(1 \times n)$ -matris är en **radvektor** (eller **radmatris**).

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad (1, 0, 7, -5)$$

(I matrisräkningens kontext skriver man utan kommatecken.)

Kom ihåg: Vektorer från $\mathbb{R}^n$ uppfattar vi automatiskt som **kolonnvektorer**.

Om $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ och vi vill tolka den som en radvektor, skriver vi $\mathbf{v}^T$.

En $(n \times n)$ -matris kallas **kvadratisk**.

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonalen i en kvadratisk matris bildas av element $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Typer av kvadratiska matriser

En $(n \times n)$ -matris kallas **diagonal** om

$$a_{ij} = 0 \text{ för alla } i, j \text{ sådana att } i \neq j.$$

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Typer av kvadratiska matriser

En **enhetsmatris** (eller **identitetsmatris**) är en diagonal $(n \times n)$ -matris där $a_{ii} = 1$ för alla i .

Exempel:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enhetsmatriser betecknas med $\mathbf{I}$ eller $\mathbf{I}_n$ om man vill förtydliga storleken (ovan: $\mathbf{I}_4$).

Observera: Några källor använder beteckning $\mathbf{E}$ i stället för $\mathbf{I}$.

Typer av kvadratiska matriser

En $(n \times n)$ -matris kallas **övertriangulär** om

$$a_{ij} = 0 \text{ för alla } i, j \text{ sådana att } i > j.$$

Det är ett annat namn för kvadratiska matriser på **trappform**.

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Typer av kvadratiska matriser

En $(n \times n)$ -matris kallas **symmetrisk** om

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ för alla } i, j.$$

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriselement är då "symmetriska kring diagonalen".

Definition 5.1 (typer av kvadratiska matriser)

En $(n \times n)$ -matris kallas

- (i) **diagonal** om $a_{ij} = 0$ för alla i, j sådana att $i \neq j$;
- (ii) **övertriangulär** om $a_{ij} = 0$ för alla i, j sådana att $i > j$;
- (iii) **symmetrisk** om $a_{ij} = a_{ji}$ för alla i, j ;
- (iv) **enhetsmatris** om den är diagonal och $a_{ii} = 1$ för alla i . Enhetsmatrisen betecknas med I eller I_n för att förtydliga storleken.

Transponerad matris

Definition 5.2 (transponerad matris)

Låt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Den motsvarande **transponerade matrisen** definieras som

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

- Vid transponering **blir rader kolonner och vice versa.**

Transponerad matris

Exempel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Observera:

- Alltid gäller $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.
- Matrisen $\mathbf{A}$ är **symmetrisk** om och endast om $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Addition och skalärmultiplikation på matriser

Definition 5.3 (addition och skalärmultiplikation på matriser)

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $c \in \mathbb{R}$. Då definieras

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$c\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c a_{11} & \cdots & c a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c a_{m1} & \cdots & c a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **OBS!** $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ måste ha **samma storlek** för att kunna adderas.
- **Subtraktion:** $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$ som vanligt.
- Allt funkar precis som för vektorer.

Addition och skalärmultiplikation på matriser

Exempel.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}$$

Addition och skalärmultiplikation på matriser

Sats 5.4 (additionens och skalärmultiplikationens egenskaper)

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $c, d \in \mathbb{R}$. Låt $\mathbf{O}$ beteckna den $(m \times n)$ -matris med alla element lika noll. Då gäller:

- (i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
- (ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$;
- (iii) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$;
- (iv) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$;
- (v) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$;
- (vi) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$;
- (vii) $c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$.

- Allt funkar som vid motsvarande operationer på vektorer eller reella tal.

Produkt av två matriser

Nu ska vi definiera en **produkt av två matriser**.

Matrismultiplikationen har ingen allmän analogi hos vektorer.

Blanda inte med andra typer av produkter!

Produkt av två matriser

Definition 5.5 (matrisprodukt)

Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$ och $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Deras **produkt** AB , i denna ordning, definieras som matrisen

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

dess komponenter har form

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^k a_{iq} b_{qj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

för varje $i \in \{1, \dots, m\}$ (rad) och $j \in \{1, \dots, n\}$ (kolonn).

Produkt av två matriser

Produkten AB är definierad **endast om** matriserna A och B har **kompatibla storlekar** i denna mening:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}} \right\} m \text{ rader}$$

k kolonner

$$B = \left(\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{array}} \right\} k \text{ rader}$$

n kol.

Produkt av två matriser

Produkten AB är definierad **endast om** matriserna A och B har **kompatibla storlekar** i denna mening:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}} \right\} m \text{ rader}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ kolonner}}$

$$B = \left(\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{array}} \right\} k \text{ rader}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ kol.}}$

Resultande matris AB har **A:s höjd** och **B:s bredd**.

$$AB = \left(\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & * \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} * & * \\ * & * \\ * & * \end{array}} \right\} m \text{ rader}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ kol.}}$

Produkt av två matriser

På platsen i **rad** i och **kolonn** j i produktmatrisen AB står **skalärprodukten** av **A:s** i :e **rad** och **B:s** j :e **kolonn**.

$$\begin{matrix} & & \text{k1} & & & \text{k1} \\ \text{r1} & \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{r1} \\ & \text{A} & \text{B} & & \text{AB} \end{matrix}$$

$$4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0$$

Produkt av två matriser

På platsen i **rad** i och **kolonn** j i produktmatrisen AB står **skalärprodukten** av **A:s** i :e **rad** och **B:s** j :e **kolonn**.

$$\begin{matrix} r1 \\ \left(\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array} \right) \end{matrix} \begin{matrix} k2 \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{array} \right) \end{matrix} = \begin{matrix} k2 \\ \left(\begin{array}{cc} 0 & -14 \\ 5 & 2 \\ 2 & -2 \end{array} \right) \end{matrix} \begin{matrix} r1 \\ \end{matrix}$$

$\begin{matrix} & A & B & AB \end{matrix}$

$$4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 = -14$$

Produkt av två matriser

På platsen i **rad** i och **kolonn** j i produktmatrisen AB står **skalärprodukten** av **A:s i :e rad** och **B:s j :e kolonn**.

$$\begin{matrix} & & \text{k1} & & & \text{k1} \\ \text{r2} & \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & 5 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ \mathbf{5} & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{r2} \\ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & & \mathbf{AB} \end{matrix}$$

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$$

Produkt av två matriser

På platsen i **rad** i och **kolonn** j i produktmatrisen AB står **skalärprodukten** av **A:s** i :e **rad** och **B:s** j :e **kolonn**.

$$\begin{matrix} & & k2 \\ r2 & \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 5 & \mathbf{2} \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & r2 \\ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{matrix}$$

$$3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 2$$

Produkt av två matriser

På platsen i **rad** i och **kolonn** j i produktmatrisen AB står **skalärprodukten** av **A:s** i :e **rad** och **B:s** j :e **kolonn**.

$$\begin{matrix} & & \text{k1} & & & \text{k1} \\ \text{r3} & \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & 5 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 5 & 2 \\ \mathbf{2} & -2 \end{pmatrix} & \text{r3} \\ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & & \mathbf{AB} \end{matrix}$$

$$2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

Produkt av två matriser

På platsen i **rad** i och **kolonn** j i produktmatrisen AB står **skalärprodukten** av **A:s** i :e **rad** och **B:s** j :e **kolonn**.

$$\begin{matrix} & & k2 \\ r3 & \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 5 & 2 \\ 2 & -\mathbf{2} \end{pmatrix} r3 \\ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{matrix}$$

$$2 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 = -2$$

Sats 5.6 (egenskaper av matrisaddition och multiplikation)

Låt A, B, C vara matriser av kompatibla typer och låt $c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

- (i) $(AB)C = A(BC)$;
- (ii) $(cA)B = c(AB)$;
- (iii) $(A + B)C = AC + BC$;
- (iv) $A(B + C) = AB + AC$;
- (v) om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, då $AI_n = I_m A = A$.

Transponatens egenskaper

Vi kan även definiera **matrispotenser**, dock **endast för kvadratiska** matriser.

Definition 5.7 (matrispotens)

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man definierar

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$$

och

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}.$$

Allmänna naturliga potenser med $k \in \mathbb{N}$ definieras induktivt som

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A}.$$

- Alltså: $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}$ osv.

Sats 5.8 (transponering vs. andra operationer)

Låt $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vara matriser av kompatibla typer och låt $c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

- (i) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
- (ii) $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$;
- (iii) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

OBS!

Ordningen ändras vid produktens transponering i (iii)!

Matrismultiplikation är ingen vanlig multiplikation

OBS!

Matrismultiplikation är **inte kommutativ**. Det kan hända:

$$AB \neq BA.$$

Exempel.

Beräkna AB och BA för

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrismultiplikation är ingen vanlig multiplikation

Observera:

Det finns **exakt två** reella tal x som uppfyller ekvationen

$$x^2 = 1,$$

nämligen $x = 1$ och $x = -1$.

Matrismultiplikation är ingen vanlig multiplikation

Observera:

Det finns **exakt två** reella tal x som uppfyller ekvationen

$$x^2 = 1,$$

nämligen $x = 1$ och $x = -1$.

Det finns dock **oändligt många** (2×2) -matriser $\mathbf{X}$ som uppfyller ekvationen

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{I},$$

där $\mathbf{I}$ ($= \mathbf{I}_2$) är (2×2) -enhetsmatrisen. Anta t.ex.:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

med ett godtyckligt $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Matriser och linjära ekvationssystem

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Då

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Matriser och linjära ekvationssystem

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Då

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Därför löser vektorn $\mathbf{x}$ det linjära ekvationssystemet

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

om och endast om det gäller:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Matrismultiplikation och linjära kombinationer

Viktig observation:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n,\end{aligned}$$

där $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ är **kolonner i matrisen** $\mathbf{A}$.

Matrismultiplikation och linjära kombinationer

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n.$$

Att **multiplisera** en matris med en **kolonnvektor från höger**

betyder

att skapa en **linjärkombination** av matrisens **kolonner**.

Koefficienterna i LK är $\mathbf{x}$'s komponenter $x_1, \dots, x_n$.

Matrismultiplikation och linjära kombinationer

Likadant, för $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \mathbf{c}_1^T \text{---} \\ \text{---} \mathbf{c}_2^T \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \mathbf{c}_m^T \text{---} \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{c}_1^T + x_2 \mathbf{c}_2^T + \cdots + x_m \mathbf{c}_m^T.$$

Att **multiplitera** en matris med en **radvektor från vänster**

betyder

att skapa en **linjärkombination** av matrisens **rader**.

Koefficienterna i LK är $\mathbf{x}$:s komponenter $x_1, \dots, x_m$.

Sats 5.9 (lösning till LES som en linjärkombination)

Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $b \in \mathbb{R}^n$. Då är de följande påståenden ekvivalenta:

- (i) Det finns minst en lösning $x \in \mathbb{R}^n$ till systemet $Ax = b$.
- (ii) Vektorn b är en linjärkombination av kolonner i matrisen A .

Sats 5.9 (lösning till LES som en linjärkombination)

Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $b \in \mathbb{R}^n$. Då är de följande påståenden ekvivalenta:

- (i) Det finns minst en lösning $x \in \mathbb{R}^n$ till systemet $Ax = b$.
 - (ii) Vektorn b är en linjärkombination av kolonner i matrisen A .
- Om systemet $Ax = b$ har **fler** lösningar, kan b skrivas som **olika** LK av A 's kolonner. Varje lösning x motsvarar koefficienter i en sådan möjlig LK.

Linjära höljet (spann)

Definition 5.10 (linjära höljet)

Låt $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Deras **linjära hölje (spann)** definieras som

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i \mid c_i \in \mathbb{R} \text{ för alla } i \right\}.$$

Linjära höljet (spänn)

Definition 5.10 (linjära höljet)

Låt $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vara vektorer från $\mathbb{R}^n$. Deras **linjära hölje (spänn)** definieras som

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i \mid c_i \in \mathbb{R} \text{ för alla } i \right\}.$$

- Spannet är **mängden av samtliga linjärkombinationer** av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.
- Det innehåller alltså alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som kan uttryckas som

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k,$$

där alla c_i är godtyckliga reella tal.

- Spannet är en **undermängd** av $\mathbb{R}^n$, dvs. $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Linjära höljet – exempel

Exempel.

Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1\} = \{t\mathbf{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

som är en **linje** inom $\mathbb{R}^3$ med parameterekvationen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observera: Linjen innehåller 0.

Linjära höljet – exempel

Exempel.

Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} = \{s \mathbf{v}_1 + t \mathbf{v}_3 \mid s, t \in \mathbb{R}\},$$

som är ett **plan** inom $\mathbb{R}^3$ med parameterekvationen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Observera:

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ är **linjärt oberoende**. Då spänner de ett plan.
- Linjen innehåller 0.

Linjära höljet – exempel

Exempel.

Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{t \mathbf{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

som är en **linje** inom $\mathbb{R}^3$ med parameterekvationen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Observera:

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är **linjärt beroende**. Att lägga till "+s $\mathbf{v}_2$ " skulle inte påverka linjen.
- Linjen innehåller 0.

Linjära höljet – exempel

Exempel.

Anta vektorerna från föregående exemplen igen:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

För dem gäller (tänk igenom själv!)

$$\begin{aligned} \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\} &= \operatorname{span}\{\mathbf{v}_2\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \\ \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} &= \operatorname{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \\ \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1\} &\subsetneq \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}, \quad \operatorname{span}\{\mathbf{v}_3\} \subsetneq \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} \end{aligned}$$

OBS!

Dessa relationer kan **ändras** om vi väljer **andra vektorer** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$!

Definition 5.11 (kolonnrummet)

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. **Kolonnrummet** till matrisen $\mathbf{A}$, betecknat $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, definieras som

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\},$$

där $\mathbf{a}_i$ är kolonner i $\mathbf{A}$.

- Kolonnrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ innehåller samtliga **linjärkombinationer av $\mathbf{A}$'s kolonner**.
- Alternativa beteckningar i litteraturen:

$$\text{rng}(\mathbf{A}), \quad \text{img}(\mathbf{A}), \quad \text{col}(\mathbf{A}) \quad \text{osv.}$$

Symbolen $\mathcal{R}$ = "*range*".