

Linjär algebra

TATA16, höstterminen 2026

Martin Křepela

Matematiska institutionen, Linköpings universitet

`martin.krepela@liu.se`

Dokumentversion: 12 oktober 2026

Linjära avbildningar

Avbildningar

Låt X, Y vara två mängder.

En **avbildning** (funktion, transform) f är en regel som till **varje** element $x \in X$ tilldelar **precis** ett element $y \in Y$.

Notation:

$$\begin{array}{ccc} f : & X & \longrightarrow & Y \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & \text{definitions-} & & \text{mål-} \\ & \text{mängd} & & \text{mängd} \end{array}$$

$f(x)$... element tilldelat till x .

Här kallas $x \in X$ **argumentet**; $f(x) \in Y$ kallas f :s **värde** (i argumentet x).

Om $y = f(x)$, kallas y **bilden** av x och x kallas **urbliden** av y .

Låt $f : X \longrightarrow Y$.

Värdemängden av avbildningen f är mängden

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Denna är mängden av **samtliga värden** $f(x)$. Det gäller $f(X) \subseteq Y$.

OBS!

Värdemängden kan vara **strikt mindre** än målmängden.

Det finns många avbildningar mellan många mängder.

Vi ska nu fokusera på avbildningar **mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$** , alltså på

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

De ska även vara **linjära**, som är en ytterligare egenskap.

Definition 6.1 (linjär avbildning mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$)

Avbildningen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om för **varje** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ och **varje** $c \in \mathbb{R}$ gäller

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

och

$$f(c\mathbf{x}) = c f(\mathbf{x}).$$

Definition 6.1 (linjär avbildning mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$)

Avbildningen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om för **varje** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ och **varje** $c \in \mathbb{R}$ gäller

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

och

$$f(c\mathbf{x}) = c f(\mathbf{x}).$$

- Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, är dess bild $f(\mathbf{x})$ en **vektor från $\mathbb{R}^m$** .

Definition 6.1 (linjär avbildning mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$)

Avbildningen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om för **varje** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ och **varje** $c \in \mathbb{R}$ gäller

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

och

$$f(c\mathbf{x}) = c f(\mathbf{x}).$$

- Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, är dess bild $f(\mathbf{x})$ en **vektor från $\mathbb{R}^m$** .
- Varianter $n = 1$ eller $m = 1$ är också tillåtna.

Definition 6.1 (linjär avbildning mellan $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}^m$)

Avbildningen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas **linjär** om för **varje** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ och **varje** $c \in \mathbb{R}$ gäller

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

och

$$f(c\mathbf{x}) = c f(\mathbf{x}).$$

- Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, är dess bild $f(\mathbf{x})$ en **vektor från $\mathbb{R}^m$** .
- Varianter $n = 1$ eller $m = 1$ är också tillåtna.
- Alternativ benämning: **linjära transformer**.

Inte allt är linjärt

Exempel.

Avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ angiven genom

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

är linjär.

Inte allt är linjärt

Exempel.

Avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ angiven genom

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

är linjär.

Exempel.

Visa att avbildningen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ angiven genom

$$g(x) = x^2$$

inte är linjär genom att hitta motexempel till villkoren från Def. 6.1.

Hur ser linjära avbildningar ut?

Sats 6.2 (geometriska egenskaper av linjära avbildningar)

Om $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, då har den de följande egenskaperna:

- (i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- (ii) Varje linje i $\mathbb{R}^n$ avbildas med f till en linje eller punkt i $\mathbb{R}^m$.

Hur ser linjära avbildningar ut?

Sats 6.2 (geometriska egenskaper av linjära avbildningar)

Om $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, då har den de följande egenskaperna:

- (i) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- (ii) Varje linje i $\mathbb{R}^n$ avbildas med f till en linje eller punkt i $\mathbb{R}^m$.

OBS!

Dessa villkor är endast **nödvändiga** för att f ska vara linjär.

Linjära avbildningar vs. linjära kombinationer

Kom ihåg:

Den **kanoniska basen** till $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Linjära avbildningar vs. linjära kombinationer

Låt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig vektor. Den uppfyller

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Linjära avbildningar vs. linjära kombinationer

Låt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig vektor. Den uppfyller

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Eftersom f är linjär, följer det (hur?) att

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j).$$

Linjära avbildningar vs. linjära kombinationer

Låt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig vektor. Den uppfyller

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Eftersom f är linjär, följer det (hur?) att

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j).$$

Observera:

För att räkna ut värdet $f(\mathbf{x})$ i en **godtycklig** punkt $\mathbf{x}$ räcker det att känna värden $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ (dessa tillhör $\mathbb{R}^m$).

OBS!

For **icke-linjära** avbildningar skulle detta **inte funka**.

Linjära avbildningar vs. linjära kombinationer

Kom ihåg:

Den linjära kombinationen

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j)$$

kan skapas genom **matrismultiplikation**:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{e}_j) = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(\mathbf{e}_1) & f(\mathbf{e}_2) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Observera:

Matrisen $\mathbf{A}$'s **kolonner** är vektorerna $f(\mathbf{e}_j)$.

Linjära avbildningar vs. matriser

Föregående observationen sammanfattas i denna sats.

Sats 6.3 (matris för en linjär avbildning)

Låt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Då är följande ekvivalenta:

- (i) f är linjär;
- (ii) Det finns en matris $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sådan att

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

gäller för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Matrisen $\mathbf{A}$ är **entydigt bestämd** och kallas **avbildningsmatrisen** för f .
- Dess **kolonner** är vektorer $f(\mathbf{e}_j)$, dvs. **bilder** av kanoniska basvektorer $\mathbf{e}_j$ under avbildningen f .

Linjära avbildningar vs. matriser

Föregående observationen sammanfattas i denna sats.

Sats 6.3 (matris för en linjär avbildning)

Låt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en avbildning. Då är följande ekvivalenta:

- (i) f är linjär;
- (ii) Det finns en matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sådan att

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

gäller för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Matrisen A är **entydigt bestämd** och kallas **avbildningsmatrisen** för f .
- Dess **kolonner** är vektorer $f(\mathbf{e}_j)$, dvs. **bilder** av kanoniska basvektorer $\mathbf{e}_j$ under avbildningen f .

Slogan:

"En matris är en kod för en linjär avbildning".

Att hitta avbildningsmatrisen

Exempel.

Hitta avbildningsmatrisen för $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ angiven genom

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Att hitta avbildningsmatrisen

Exempel.

Hitta avbildningsmatrisen för $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ angiven genom

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Observera:

Matrisens storlek motsvarar definitions- och målrummets dimensioner.

Enkla linjära avbildningar

Exempel.

På tavlan hittar vi matriser för dessa linjära avbildningar mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^2$:

- **dilatation** i koordinataxelns riktning
- **spegling** (genom en angiven axel)
- **vridning (rotation)** kring origo
- **skjuvning**
- **OG projektion** mot en angiven linje innehållande 0

Kom ihåg:

För att hitta avbildningsmatrisen, räkna ut bilder av basvektorerna och använd dem som kolonner.

Definition 6.4 (sammansatt linjär avbildning i $\mathbb{R}^n$)

Låt $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ och $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara linjära avbildningar. Avbildningen $g \circ f$ som till varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tilldelar elementet $g(f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$ kallas **sammansättningen** av avbildningarna g och f .

Sammansatta avbildningar

Definition 6.4 (sammansatt linjär avbildning i $\mathbb{R}^n$)

Låt $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ och $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara linjära avbildningar. Avbildningen $g \circ f$ som till varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tilldelar elementet $g(f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$ kallas **sammansättningen** av avbildningarna g och f .

Sats 6.5 (matrisen till en sammansatt linjär avbildning)

Låt $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ och $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara linjära avbildningar med avbildningsmatriserna $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times m}$, respektive $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Då är den sammansatta avbildningen $g \circ f$ också linjär och dess avbildningsmatris är $\mathbf{BA}$.

Sammansättning är inte kommutativ

Exempel.

Hitta avbildningsmatrisen för:

- speglingen genom vertikala axeln i $\mathbb{R}^2$ följt med vridningen om $\pi/4$ kring origo i $\mathbb{R}^2$;
- följden av dessa två avbildningar i omsatt ordning.

Sammansättning är inte kommutativ

Exempel.

Hitta avbildningsmatrisen för:

- speglingen genom vertikala axeln i $\mathbb{R}^2$ följt med vridningen om $\pi/4$ kring origo i $\mathbb{R}^2$;
- följderna av dessa två avbildningar i omsatt ordning.

Observera:

Detta visar på ett annat sätt att matriser inte behöver vara kommutativa med avseende på multiplikation.