

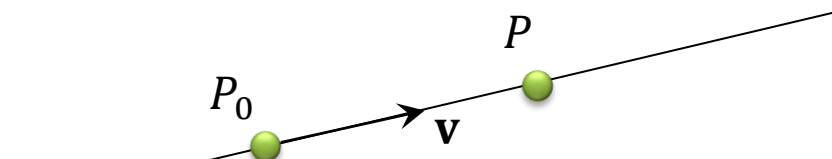
Fredagsmys med linjär algebra TATA16

- Linjer i planet och rummet (repetition)
- Plan i rummet
 - Parameterform
 - Normalform
 - Exempel

Plan i rummet

Vad behöver vi veta?

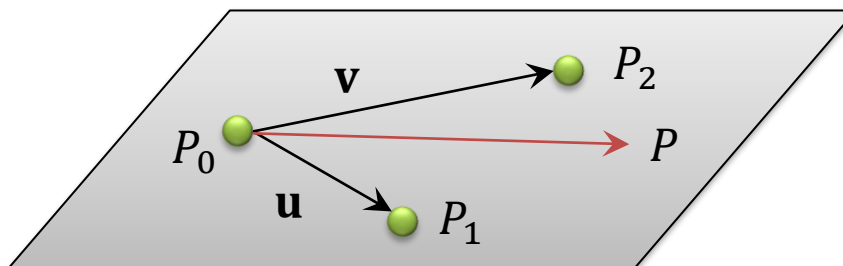
- För en linje räcker det med 2 punkter



$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + t\mathbf{v}$$

Obs! Längden och +/- riktningen av vektorn $\mathbf{v}$ är ointressant

- För ett plan räcker det med 3 punkter (P_0, P_1, P_2 nedan)



$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

(parameterform)

O

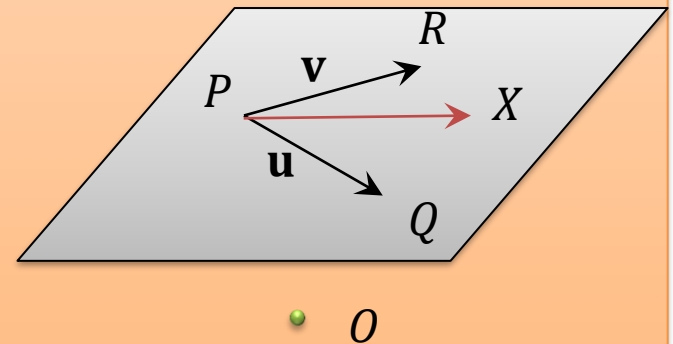
Exempel 1. Ange en ekvation på parameterform för planet som går genom punkter $P(1,2,0)$, $Q(2,2,1)$ och $R(-1,0,0)$.

Lösning. Vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

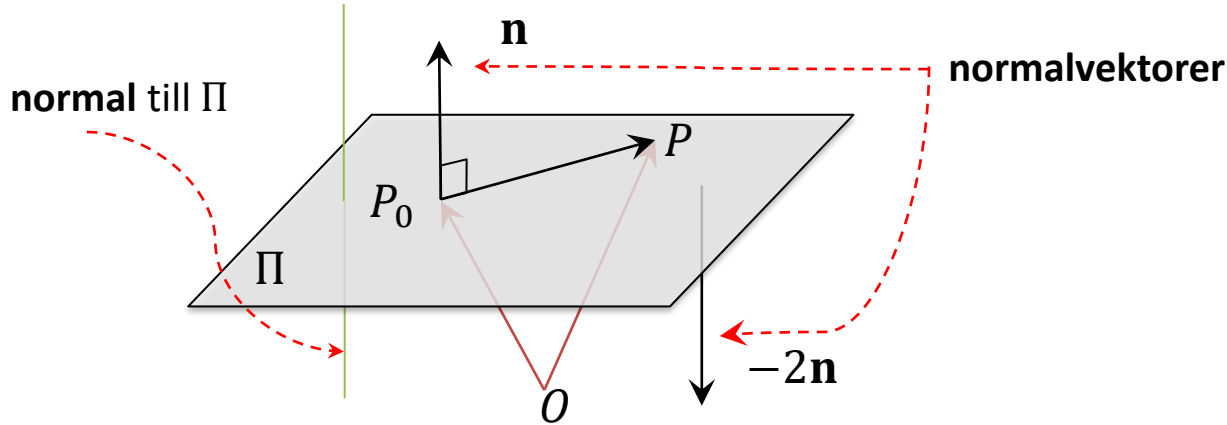
ligger i planet och icke-parallella, alltså planets ekvation är

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OP} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + s - 2t \\ 2 - 2t \\ s \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Planets ekvation på normalform

Till varje plan i rummet hör flera parallella/motsatta normalriktningar, t.ex.:



- $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ är en normalvektor
- $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $P = (x, y, z)$ är godtyckliga punkter i planet

$$\begin{aligned} \overline{PP_0} \perp \mathbf{n} &\Leftrightarrow \mathbf{0} = \overline{PP_0} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = A(x - \mathbf{x}_0) + B(y - \mathbf{y}_0) + C(z - \mathbf{z}_0) = \\ &= Ax + By + Cz + \mathbf{D} \end{aligned}$$

Ekvation för planet Π på **normalform**:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Exempel 2'. Ange en ekvation på *normalform* för planet som går genom punkten $P(1, -1, 2)$ och vinkelrät mot $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösning.

Planets ekvation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\Downarrow$

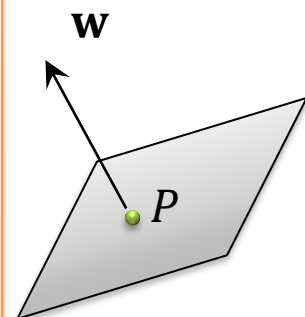
$$x + 2y + 3z + D = 0$$

Bestämmer D genom att kräva att punkten $P(1, -1, 2)$ tillhör planet, d v s dess koordinater uppfyller ekvationen ovan:

$$1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + D = 0$$

Ekvationen på normalform blir alltså

$$x + 2y + 3z - 5 = 0$$



Exempel 3. Låt $\Pi_1: x - 2y - z = 0$ och $\Pi_2: 2x + y - z = 4$. Bestäm och beskriv geometriskt den punktmängd som tillhör båda planen.

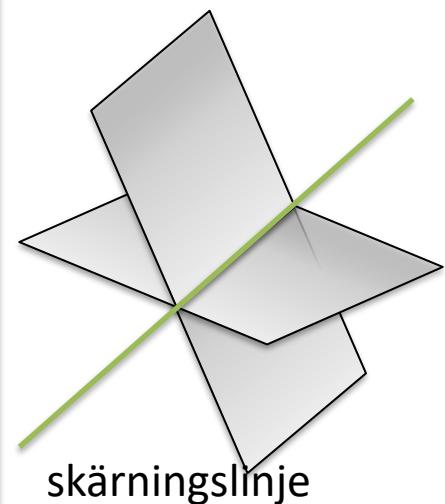
Lösning. De punkter som tillhör båda planen uppfyller systemet

$$\begin{array}{c} \textcircled{-2} \\ \downarrow \end{array} \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 5y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z \\ z = 4 - 5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

(sätt $y = t$)

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Skärningsmängd är en linje.

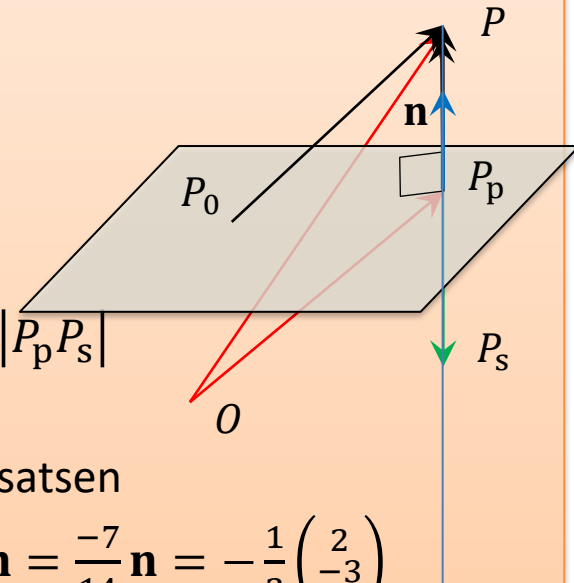


Ortogonal projektion och spegling i plan

Exempel 4. Låt $\Pi: 2x - 3y - z = 6$ och $P(1,1,0)$. Bestäm avståndet mellan Π och P . Bestäm även den punkt P_p i Π som ligger **närmast** P samt P :s **spegelpunkt** P_s i Π .

Lösning.

- Välj en 'startpunkt' P_0 (dess läge spelar ingen roll)
- Drag den normal N till Π som går genom P
- Dess skärningspunkt med Π blir den sökta P_p
- Avståndet mellan Π och P är $|PP_p| = |\overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{n}}|$
- Spegelpunkten P_s är då spegelbilden av P i Π , d v s $|PP_p| = |P_pP_s|$



Väljer $P_0 = (1, -1, -1)$. Då fås

Projektionssatsen

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{PP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{P_pP} = \overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{n}} = \frac{\overline{PP_0} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \frac{-7}{14} \mathbf{n} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Avståndet: $|PP_p| = |\overline{P_0P}_{\parallel \mathbf{n}}| = \frac{\sqrt{14}}{2}$
- $\overline{OP_p} = \overline{OP} - \overline{P_pP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+2 \\ 2-3 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Speglingen ('en $\overline{P_pP}$ ner'): $\overline{OP_s} = \overline{OP_p} - \overline{P_pP} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Till era 'fredags'- frågor!

