Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: KTR1

Kontrollskrivning för Linjär algebra
2024-10-31 kl 08-11

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 1 poäng. Minst 11 poäng tillgodoräknas som 3 poäng på tentamen (1:a uppgiften). Minst 16 poäng ger dessutom 1 bonus-poäng på tentamen.
Skriv alla svar på EN sida och lämna in tillsammans MED lösningarna.

Alla baser är ON-baser och alla koordinatsystem är högra och ortonormerade.

1. Låt vektorn $\overline{AB}$ ha koordinater $(-1, 3, 2)$ och punkten A ha koordinater $(1, 2, -2)$. Finn koordinater för punkten B.

   Svar: $B(0, 5, 0)$

2. Låt $A(-1, 2, 0)$, $B(3, 0, 2)$ vara punkter i rummet. Finn koordinater av den punkt M som delar sträckan AB i förhållandet $1 : 2$.

   Svar: $M(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

3. Låt $A(1, 2)$, $B(3, 4), C(1, -1)$ vara punkter i planet. Finn cos av vinkeln ABC (vid hörn B).

   Svar: $\frac{7}{\sqrt{58}}$

4. Finn den ortogonala projektionen av vektor $\overline{u} = (4, -1)$ på linjen $L : 3x - 5y + 2 = 0$.

   Svar: $\frac{1}{2}(5, 3)$

5. Betrakta punkterna $A(1, 2, 10)$, $B(0, 1, 2)$, $C(2, 0, 1)$ i rummet. Finn arean av triangeln ΔABC.

   Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{347}$

6. Vilka av ekvationer beskriver samma linje i planet

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{r} x = -1 + 4t \\ y = 8 - 2t \end{array} \right. , \; L_2 : \left\{ \begin{array}{r} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 2t \end{array} \right. , \; L_3 : \left\{ \begin{array}{r} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{array} \right. .$$

   Svar: $L_1 = L_3$

7. Finn ekv på *parameter* form för den räta linje som går genom punkterna $A(1,2,-1)$ och $B(-2,1,4)$.

   Svar: $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 5t, t \in R \end{cases}$

8. Finn en enhetsvektor som är vinkelrät mot planet $5x + y - 2z - 3 = 0$.

   Svar: $\frac{1}{\sqrt{30}}(5,1,-2)$

9. Finn ekv på normalform för det plan som går genom punkterna $A(1,3,0)$, $B(2,4,-1)$, $C(3,10,1)$.

   Svar: $8x - 3y + 5z + 1 = 0$

10. Finn avståndet från punkten $A(-1,4,2)$ till planet $x + 3y - 2z = 5$.

    Svar: $\frac{2}{\sqrt{14}}$

11. Finn *de standardskalärprodukter* av $\overline{u} \cdot \overline{v}$, $\overline{v} \cdot \overline{w}$ eller $\overline{u} \cdot \overline{w}$ som har mening, där $\overline{u} = (5,2,-2,5,2,1)$ och $\overline{v} = (-1,4,3,7,1)$ och $\overline{w} = (1,-1,0,5,7)$.

    Svar: $\overline{v} \cdot \overline{w} = 37$

12. Betrakta vektorrumet V som består av realvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$ med addition: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, och multiplikation:. $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$ definierade för varje $x \in [0,1]$. Vilka av följande delmängder till V är underrum till V:

    $M_0 = \{f \in V : f(0) = \frac{1}{2}\}, M_{\frac{1}{2}} = \{f \in V : f(\frac{1}{2}) = 0\}$ och $M_1 = \{f \in V : f(1) = 2\}$?

    Svar: $M_{\frac{1}{2}}$

13. Forse vektorrummet V från förra uppgiften med skalärprodukten $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Finn längden av funktionen $f(x) = x^2 - 1$.

    Svar: $|f| = \sqrt{\frac{8}{15}}$

14. Finn cos av vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$ om $|3\overline{u} - 2\overline{v}| = 4$ och $|\overline{u}| = 1$, $|\overline{v}| = 3$.

    Svar: $\frac{29}{36}$

15. Vilka av följande matriser är symmetriska?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

    Svar: B

16. Betrakta matriser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Beräkna de produkter av AB, AC, CA som har mening.

Svar: $CA = \begin{pmatrix} -8 & -14 & -52 \\ 3 & 24 & 27 \end{pmatrix}$

17. Låt O (resp. E) vara nollmatrisen (resp. enhetsmatrisen) av typ (2×2). Ange en real lsg till ekv $X^2 + 2E = O$.

Svar: till ex, $X = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

18. Betrakta den linjära avbildning $f : R^n \to R^m$ som ges av

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_2 - 4x_4 \\ y_2 &= -x_2 + x_3 \\ y_3 &= 3x_1 + 5x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Ange n och m, och finn avbildningsmatrisen.

Svar: $n = 4, m = 3, A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

19. Finn bilden av vektor $\overline{u} = (5, -3)$ under rotationen med 60 grader i origo.

Svar: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 + 3\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} - 3 \end{pmatrix}$

20. Hitta avbildningsmatrisen för avbildningen i x, y-planet som ges av projektionen på y-axeln följd av speglingen i linjen $y = x$.

Svar: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$