Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TATA16
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra (TATA16)
2024-08-26 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Bestäm ekv för det plan som går genom punkten $A(1,2,3)$ och aȑ vinkelrät mot linjen $L: x = 2+t, y = 3t, z = 1-5t$ (1p).
   Svar: $x + 3y - 5z + 8 = 0$.

   (ii) Finn skärningspunkten B av linjen och planet (1p).
   Svar: $B(\frac{13}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{12}{7})$

   (iii) Bestäm avståndet mellan punkterna A och B (1p).
   Svar: $\frac{\sqrt{406}}{7}$

2. (i) Finn minsta kvadratlösningen $\overline{x}^*$ till systemet $A\overline{x} = \overline{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2p).$$

   Svar: $\overline{x}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (ii) Kontrollera svaret med normalekvationerna (1p).
   Svar: Gör kontroll av likheten $A^tA\overline{x}^* = A^t\overline{b}$.

3. Betrakta differentialekvationssystemet $X' = AX$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

   (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet $X' = AX$ (2p).
   Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2, t \in R$.

   (ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = 3,\ x_2(0) = 4$ (1p).

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{7}{3}e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in R$.

4. (i) Bestäm avbildningsmatrisen A för speglingen i planet $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ (2p)

Svar: $A = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

(ii) Finn $A^{19} \cdot \overline{v}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1p).

Svar: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Låt $F(x_1, x_2) = \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} + 1 = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 1$, där $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och A är en symmetrisk matris. Gör följande.

(i) Bestäm A (1p).

Svar: $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) Finn största och minsta värde av F då $|\overline{x}| = 1$ (1p).

Svar: max $= 8$, min $= 3$

(iii) Finn en matris B sådan att $A = B^3$ (1p).

Svar: $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{7}) & (-2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{7}) \\ (-2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{7}) & (4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}) \end{pmatrix}$

6. Gäller följande påståenden? Bevis eller motexempel.

(i) Det finns en (3×3)-matris A med $\det A \neq 0$ sådan att $\det(3A) = 3 \cdot \det A$ (1p).

Svar: Nej, ty $VL = 3^3 \det A$ och $HL = 3 \det A$

(ii) Låt $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ vara linjärt oberoende vektorer i vektorrummet V och $\overline{v}$ en godtycklig vektor i V. Då är vektorerna $\overline{v}_1 + \overline{v}, \overline{v}_2 + \overline{v}, \overline{v}_3 + \overline{v}$ också linjärt oberoende (1p).

Svar: Nej, om vi väljer $\overline{v} = -\overline{v}_1$ så är $\overline{v}_1 + \overline{v} = \overline{0}$ och vektorerna $\overline{0}, \overline{v}_2 - \overline{v}_1, \overline{v}_3 - \overline{v}_1$ är linjärt beroende.

(iii) Låt A vara en (3×3)-kvadratisk matris och $A^2 + 2A + E = O$, där E är enhetsmatrisen och O är nollmatrisen av typ (3×3). Då är A inverterbar (1p).
Svar: ja, $A^{-1} = -(A + 2E)$.