LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TATA16
Provkod: TEN1

# TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2025-03-18 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.
Godkänd på kontrollskivningen med poäng $\leq 15$ ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng $\geq 16$ får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. (i) Låt

$$A = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

vara avbildningsmatrisen för speglingen $S$ av rummet $R^3$ i ett plan $\pi$ som går genom origo $O$. Finn planets ekvation. (1p)

Tips. Tänk geometriskt.

Svar: Betrakta en punkt $M(9,0,0)$. Spegla vektorn $\overline{OM}$ (punkten $M$) i planet. Spegelbilden $S(M) = (1, 8, -4)$ (multiplicera matrisen $A$ med vektorn $\overline{OM}$) av punkten $M$ beteckna med $N$. Obs vektorn $\overline{MN} = (-8, 8, -4)$ är vinkelrät mot planet $\pi$. Så är planets ekv: $2x - 2y + z = 0$.

(ii) Linjen $L$ är vinkelrät mot planet $\pi$, och $L$ går genom punkten $P(1, 2, 5)$. Finn skärningspunkten $Q$ av $L$ och $\pi$. (1p)

Svar: Obs att punkten $Q$ är slutpunkten av vektorn $\frac{1}{2}(\overline{OP}+\overline{OR}) = (\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{14}{3})$, där $\overline{OR}$ är spegelbilden av vektorn $\overline{OP}$ (se (i) som man gör). Så är $Q(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{14}{3})$.

(iii) Bestäm arean $A$ av triangeln $\Delta OPQ$. (1p)

Svar: Arean är $\frac{1}{2}|\overline{OP} \times \overline{OQ}| = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

2. (i) Avgör för vilket värde på konstanten $k$ har det här linjära systemet

$$\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + 2x_3 = k + 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = k \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$$

precis en lösning; inga lösningar; många lösningar (ange även den allmänna lösningen i fallet). (2p)

Tips. Man kan använda determinant.

Svar: Låt $A$ vara systemsmatrisen. Observera att $A$ är kvadratisk. Betrakta ekv $\det(A) = 0$ m a p $k$. Det finns två lsgar $k_1 = 1$ och $k_2 = 4$. Så har systemet precis en lsng då $\alpha \neq 1; 4$.

Gauss elimination visar att för $k_1$ saknar systemet lsningar och för $k_2$ har systemet många lsngar, nämligen: $x_1 = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{3}, x_2 = t, x_3 = -\frac{2}{3}, t \in R$.

(ii) Bestäm minsta-kvadratlösningen till systemet för det värde på $k$ för vilket systemet saknar ordinaria lösningar. (1p)

Svar: Använd normal ekvationerna: $(A^t A)X = A^t B$. Då får man $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{17}{6} - t, x_3 = t,\ t \in R$.

3. Låt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(i) Beräkna $\det T$ (1p)

Svar: Använd en av metoderna av motsvarande föreläsning, till ex. utveckla determinanten efter 1 :a raden, $\det T = 12$.

(ii) Finn $T^{-1}$

Svar:

$$T^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -33 & -9 & 21 \\ -3 & -3 & 3 \\ 17 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Gärna gör kontroll: $T \cdot S = E$.

(iii) Vad är $\det(T^{-1})$? (1p)

Svar: Observera att $\det T^{-1} = \frac{1}{\det T} = \frac{1}{12}$

4. (i) Bestäm alla lösningar till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 5x_2. \end{cases} \qquad (2p)$$

Svar: Låt systemsmatrisen vara $A$. Lös ekv $|A - \lambda E| = 0$. Vi har två lsningar: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$. Motsvarande egenvektorer: $t(-3, 2)$ och $t(1, 1), t \neq 0$. Välja en bas av egenvektorer: till ex. $(-3, 2)$ och $(1, 1)$. Så är den allmänna lsngen:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t, c_1, c_2 \in R$$

(ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(1) = -2,\ x_2(1) = 3$ (1p)

Svar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{2t-2} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{7t-7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R$$

5. (i) Visa att om $\overline{v}$ är en egenvektor för en matris $B$ med egenvärde $\lambda$ så är $\overline{v}$ även en egenvektor för matrisen $A = B^7$. Ange också motsvarande egenvärde. (1p)

Svar: $A\overline{v} = B^7\overline{v} = B^6(B\overline{v}) = B^6(\lambda\overline{v}) = \lambda B^6(\overline{v}) = \ldots = \lambda^7\overline{v}$. Det medför att vektorn $\overline{v}$ är en egenvektor för en matris $A$ med egenvärdet är $\lambda^7$.

(ii) Ge ett exempel på en matris $B$ s. a. $B$ har inga egenvektorer medan matrisen $A = B^7$ har egenvektorer. (1p)

Tips. Tänk geometriskt.

Svar: Låt $B$ vara avbildningsmatrisen för vridning moturs vinkeln $\frac{2\pi}{7}$. Obs $B$ saknar egenvektorer. Därmot $B^7 = E$ har egenvektorer (vilken nollskilld vektor som helst är en egenvektor till $E$ med egenvärde 1).

(iii) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finn en matris $B$ s. a. $B^7 = A$. (1p)

Svar: Låt $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obs att alla egenvektorer till matrisen A är $t(1,0), t \in R \setminus \{0\}$, och de har egenvärde 1. Om $B$ har egenvektorer så är de $t(1,0), t \in R \setminus \{0\}$, också med egenvärde 1 (se (i)). Chansa, anta att $B$ har egenvektorer, bl. a. $\overline{v} = (1,0)$. Då är $a = 1, c = 0$. Resonera med $B^2, B^3, B^4, B^5, B^6, B^7$. Obs att $d^7 = 1$. Så är $d = 1$ och $b = \frac{1}{7}$. Då är => $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. (i) Avgör karaktär av den här kvadratiska formen $Q(\overline{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ (1p).

Svar: egenvärde är $-1, 3$. Så är formen indefinit.

(ii) Sök maximum och minimum av $Q(\overline{x})$ under bivillkoret $|\overline{x}| = 2$ (1p).

Svar: $\min = -1 \cdot 2^2 = -4$ och $\max = 3 \cdot 2^2 = 12$.

(iii) Ange de $\overline{x}$ på vilka restriktionen av $Q$ på cirkeln $|\overline{x}| = 2$ antar minsta värde. (1p)
Svar: $\pm\sqrt{2}(1, -1)$.