

TENTAMEN I LINJÄR ALGEBRA (TATA16)
2025-08-25 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift kan ge 3 poäng. För godkänt krävs 8 poäng, varav minst 2 poäng skall tas på 3 olika uppgifter.

Godkänd på kontrollskivningen med poäng ≤ 15 ger 3 poäng på uppgift 1 och med poäng ≥ 16 får man 1 bonus-poäng till. Skriv 'G' eller 'G+1' i motsvarande rutan på omslaget. Resultatet kommer efter två veckor.

1. Betrakta triangeln med hörn i punkterna $A(1, -1, 3)$, $B(2, 3, 5)$ och $C(0, 1, 7)$.

- (i) Finn koordinaterna för punkten M som ligger i mitten av sträckan AB (1p).
- (ii) Finn ekv på parameterform för linjen L som går genom punkterna C och M (1p).
- (ii) Beräkna arean av triangeln $\triangle BMC$ (1p).

2. Bestäm värde på k för vilket systemet

$$\begin{cases} 3x - 3y + (4 - k)z = -6k - 1 \\ x - y + 2z = -k \\ 2x + (k - 5)y + 7z = 2k - 6 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar. Finn lösningsmängden för detta k .

3. (i) Bestäm den räta linje $y = kx + b$ som bäst approximerar följande data i minstakvadratmening

$$\begin{array}{lcl} x : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y : & 10 & 8 & 5 & 3 & 0 \end{array} \quad (2p)$$

- (ii) Rita figur med *punkterna* och *linjen*. (1p).

Vänd !

4. En smittsam sjukdom bryter ut i en befolkning. Av alla friska blir nio tiondelar sjuka efter en vecka senare, medan resten förblir friska. Av de sjuka tillfriskar hälften på en vecka. Obs *man kan bli sjuk flera gånger*.

(i) Ange ett samband på formen

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

där f_n är friska och s_n är sjuka i slutet av den n -e veckan, $n \geq 0$
(man skall ange A) (1p).

(ii) Om sjukdomen bryter ut i en helt frisk befolkning, bestäm andelen $F = \frac{\text{friska}}{\text{alla}}$ efter 20 veckor (2p).

Tips. Börja med $f_0 = a$ och $s_0 = 0$, observera att $F = \frac{f_{20}}{a}$ och tänk på diagonalisering.

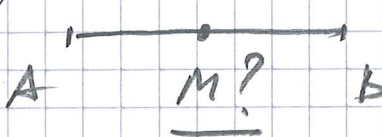
5. (i) Bestäm alla lösningar $x_1(t), x_2(t)$ till differentialekvationssystemet

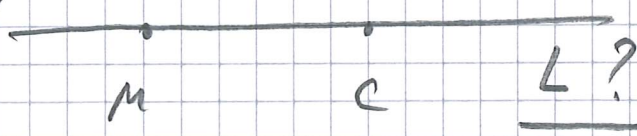
$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$
där A är avbildningsmatrisen för speglingen av planet R^2 i linjen $2x - 3y = 0$. (2p)
- (ii) Finn speciellt den lösning som uppfyller $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$ (1p).

6. Betrakta ekvationen $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 10$.

- (i) Ange en variabelsubstitution $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, där P är en ON-matris, som transformerar den här ekvationen till en ny ekvation i variablerna y_1, y_2 utan termen y_1y_2 . Få fram den nya ekvationen genom insättningen av den här substitutionen i den givna ekvationen. (2p).
- (ii) Rita lösningsmängden till ekvationen i x_1, x_2 -koordinatsystem. (1p)

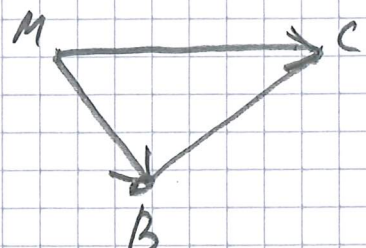
① $A(1, -1, 3), B(2, 3, 5), C(0, 1, 7)$

(i)  $M\left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{2}, 1, 4\right)}}$

(ii)  $\overline{MC} = C - M = (0, 1, 7) - \left(\frac{3}{2}, 1, 4\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{3}{2}, 0, 3\right)}}$

$$L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M + t \cdot \overline{MC} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

oder
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \cdot \frac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = 4 + 3t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(iii)  Area of $\triangle BMC = S'$

$$\overline{MB} = B - M = (2, 3, 5) - \left(\frac{3}{2}, 1, 4\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)}}$$

$$S' = \frac{1}{2} |\overline{MB} \times \overline{MC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |(6, -3, 3)| = \frac{3}{2} |(2, -1, 1)| = \frac{3}{2} \sqrt{2^2 + 1 + 1} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{6}}{2}}}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 3x - 3y + (4-k)z = -6k-1 \\ x - y + 2z = -k \\ 2x + (k-5)y + 7z = 2k-6 \end{cases}$$

(i) $k = ?$ många lösningar

(ii) lösningsmängden?
för detta k .

$$(i) \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & (4-k) \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & (k-5) & 7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4-k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & (k-3) & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eller} \quad (k-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & (4-k) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{eller} \quad (k-3)(2+k) = 0 \Leftrightarrow \underline{k_1 = -2, k_2 = 3}$$

$$\underline{k_1 = -2:} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -7 & 7 & -10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 11 \\ 2 & -7 & 7 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times (-3) \cdot (-2) \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \neq 0 \\ 0 & -5 & 3 & -14 \end{array} \right] \quad \emptyset$$

(3)

$K_2 = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & -19 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -19 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right] \Rightarrow x = y - 2z - 3$$

$$\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t \\ z = z, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3) $y = kx + b$?

x	0	1	2	3	4
y	10	8	5	3	0

$$\begin{cases} 10 = k \cdot 0 + b \\ 8 = k \cdot 1 + b \\ 5 = k \cdot 2 + b \\ 3 = k \cdot 3 + b \\ 0 = k \cdot 4 + b \end{cases}$$

$$AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(*) $A^T A X = A^T B$ (selanjutnya cek)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

(9)

$$A^T B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+10+9 \\ 10+8+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 26 \end{bmatrix}$$

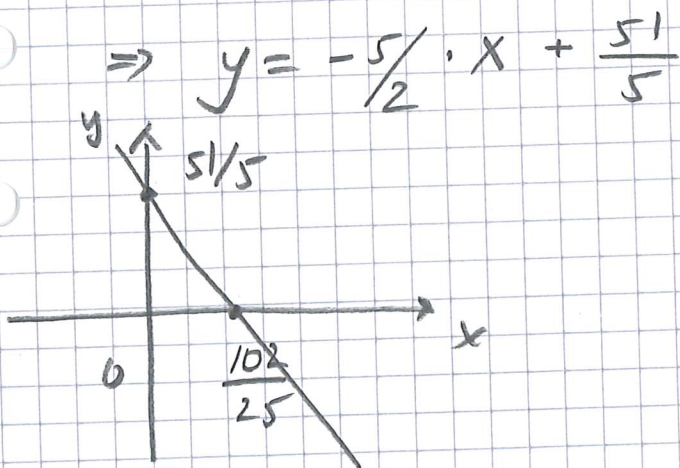
$$(*) : \begin{bmatrix} 30 & 10 & | & 27 \\ 10 & 5 & | & 26 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 150 - 100 = 50$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 27 & 10 \\ 26 & 5 \end{vmatrix} = 135 - 260 = -125$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 30 & 27 \\ 10 & 26 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 3(27) \\ 1(26) \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \cdot (78 - 27) = 10 \cdot 51 = 510$$

$$\Rightarrow K = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-125}{50} = -\frac{5}{2}, \quad b = \frac{510}{50} = \frac{51}{5}$$



$$(4) \quad (i) \quad \begin{pmatrix} s_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} s_n \\ f_n \end{pmatrix} ?$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{2} s_n + \frac{9}{10} f_n, \quad f_{n+1} = \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{10} f_n \Rightarrow$$

(5)

$$\begin{pmatrix} s_{h+1} \\ f_{h+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_h \\ f_h \end{pmatrix}, \quad \underline{n \geq 0}$$

(ii) $F = \frac{\text{friska}}{\text{alla}}$ after 20 vector

a är befolkning, $F = \frac{f_{20}}{a}$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{10} - \lambda\right) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda - \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{5}$$

$A^{20} = ?$

$$\lambda_1 = 1: \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{10} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2}{5}: \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_2 = (1 \ -1)$$

$$\Rightarrow A = P \Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(-14)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(6)

$$A^{20} = P \otimes P^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 9 & \left(\frac{2}{5}\right)^{20} \\ 5 & -\left(\frac{2}{5}\right)^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} \left(9 + 5\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\right) & \left(9 - 9\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\right) \\ \left(5 - 5\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\right) & \left(5 + 9\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{20} \\ f_{20} \end{pmatrix} = A^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ \underbrace{\frac{1}{14} \left(5 + 9\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\right)}_{f_{20}} \cdot a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F = \frac{\text{frisken}}{\text{alla}} \quad \text{efter 20 veckor}$$

$$= \frac{1}{14} \left(5 + 9\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\right)$$

(5) $X' = A \cdot X$, A avbild. matris för

Spegling är plan i linjen $2x - 3y = 0$

$\uparrow$ $\vec{n}(2, -3)$

$\vec{v}(3, 2)$ L

OBS egenvärde för spegling är $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

Egenvektorer $\vec{p}_1 = (2, -3) \sim \lambda_1 = -1$

$\vec{p}_2 = (3, 2) \sim \lambda_2 = 1$

(7)

Der allgemeine Lsgen:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(22) Finde $\bar{x}(t)$ sodass $x_1(0) = -1, x_2(0) = 1$

Einsetzung:
$$\begin{cases} -1 = 2c_1 + 3c_2 \\ 1 = -3c_1 + 2c_2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \Delta = 13, \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{13}, c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1}{13}$$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(6)

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 10$$

(i) Ange $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, das P ist eine ON matrix!
 nutzen können y_1, y_2

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, (A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6}$$

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\bar{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)}$$

$$\underline{\lambda_2 = 6}: \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\bar{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)}$$

$$\Rightarrow \underline{P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) \end{cases}$$

$$\underline{\text{Insertung i elw: } \frac{5}{5}(-y_1 + 2y_2)^2 + \frac{4}{5}(-y_1 + 2y_2)(2y_1 + y_2)}$$

$$+ \frac{2}{5}(2y_1 + y_2)^2 = 10 \quad \text{oder}$$

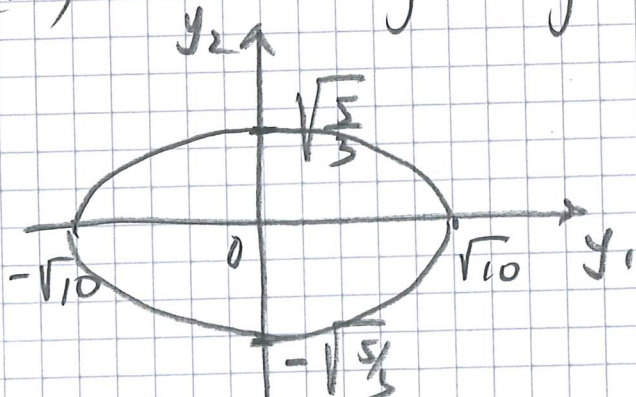
$$5(y_1^2 - 4y_1y_2 + 4y_2^2) + 4(-2y_1^2 + 3y_1y_2 + 2y_2^2) +$$

$$+ 2(4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2) = 50 \quad \text{oder}$$

$$(5 - 8 + 8)y_1^2 + (-20 + 12 + 8)y_1y_2 + (20 + 8 + 2)y_2^2 = 50$$

$$5y_1^2 + 30y_2^2 = 50 \quad \text{oder} \quad \boxed{y_1^2 + 6y_2^2 = 10}$$

(ii) Ritz 1 Ss macht: x_1, x_2 -koordinat system



$$\frac{y_1^2}{(\sqrt{10})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{\frac{5}{3}})^2} = 1$$

9

