Exempelsamling till Janfalk, U: Linjär algebra

Ulf Janfalk
Matematiska institutionen
Linköpings universitet

Innehållsförteckning

1 Linjära ekvationsystem

1.2 Successiv elimination

1.2.1. Verifiera att (sätt in)

(a) $x = 23/32,\ y = 13/32$ är en lösning till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 7x - 5y = 3 \end{cases}$$

(b) $x = 11/4,\ y = 17/4,\ z = 37/4$ är en lösning till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 39 \\ x + 3y + 2z = 34 \\ 3x + 2y + z = 26 \end{cases}$$

1.2.2. Verifiera att

(a) $x = -35 + 19t, \quad y = 25 - 13t, \quad z = t$ är en lösning till

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 5x + 7y - 4z = 0 \end{cases}$$

för alla värden på $t \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1 = 10 + 2s + 6t, \quad x_2 = -3 + s - 3t, \quad , x_3 = -1 - s, \quad x_4 = 1 + t$ är en lösning till

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

för alla värden på $s, t \in \mathbb{R}$.

1.2.3. Uttryck, på parameterform, samtliga lösningar till ekvationerna nedan på minst två sätt:
(a) $2x + y = 4$, (b) $3x + 4y + 5z = 1$, (c) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 6$.

1.2.4. Lös ekvationssystemen nedan med både substitution och successiv elimination (se **Exempel 1.2.1**, sid 1):
(a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 7y = 3 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

1.2.5. Lös nedanstående ekvationssystem:
(a) $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 6 \\ 6x + 9y = 8 \end{cases}$.

1.2.6. Lös med successiv elimination ekvationssystemen (se **Exempel 1.2.2**, sid 2):
(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

1.2.7. Lös med successiv elimination ekvationssystemen (se **exempel 1.2.3**, sid 3 och **exempel 1.2.4**, sid 4):

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$.

1.2.8. Lös ekvationssystemen (se **exempel 1.2.5**, sid 5 och **exempel 1.2.6**, sid 7):

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_5 = -3 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$.

1.2.9. Lös ekvationssystemen:

(a) $\begin{cases} -2x + 3y + 3z = -9 \\ 3x - 4y + z = 5 \\ -5x + 7y + 2z = -14 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ x - y + 3z = 5 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$, (d) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 10 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + y - 2z = 7 \end{cases}$.

1.2.10. Lös ekvationssystemen:

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = -3 \end{cases}$.

1.2.11. Ange villkor på $a, b \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får
(i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

(a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ ax + by = 5 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + by = -1 \\ ax + 2y = 5 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + y = b \end{cases}$.

1.2.12. Ange (om möjligt) villkor på $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får
(i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.
(se **Exempel 1.2.7**, sid 8)

(a) $\begin{cases} 2x + y - z = a \\ 2y + 3z = b \\ x - z = c \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 3x + y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ 5x + 3y - 4z = c \end{cases}$.

1.2.13. Ange (om möjligt) villkor på $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får
(i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

(a) $\begin{cases} 3x - y + az = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = b \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + ay = 0 \\ y + bz = 0 \\ cx + z = 0 \end{cases}$.

1.2.14. Ange (om möjligt) villkor på $a, b \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får
(i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

(a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + az = b \\ x + ay + 2z = -1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} ax + (a-1)y + (a-2)z = b \\ (a-3)y + (a-4)z = 1 \\ (a-5)z = 0 \end{cases}$.

2 Analytisk geometri i planet och rummet

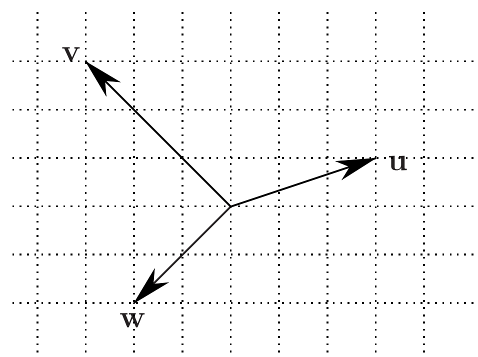
2.2 Vektorer

I uppgifterna 2.2.1–2.2.3, använd vektorerna i nedanstående figur.

2.2.1. Rita figurer som illustrerar räknereglerna för vektorer.

2.2.2. Rita, på rutat papper så noggrant som möjligt,
$\mathbf{u}+2\mathbf{v}$, $3\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{w}$,
$3\mathbf{u}-\mathbf{v}+4\mathbf{w}$, $3\mathbf{u}+2\mathbf{v}+3\mathbf{w}$

2.2.3. Rita in $3\mathbf{u}+\mathbf{v}+3\mathbf{w}$. Utnyttja resultatet till att uttrycka $\mathbf{u}$ med hjälp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Uttryck sedan $\mathbf{v}$ med hjälp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ och $\mathbf{w}$ med hjälp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.



Figur 2.1:

2.2.4. Rita på separat papper (RITA STORT och använd linjal!) in två vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (välj själv) och, mellan dessas spetsar, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Rita sedan, i samma figur, följande vektorer:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}+\frac{1}{2}\mathbf{v},\quad \frac{1}{3}\mathbf{u}+\frac{2}{3}\mathbf{v},\quad \frac{2}{3}\mathbf{u}+\frac{1}{3}\mathbf{v},\quad \frac{2}{5}\mathbf{u}+\frac{3}{5}\mathbf{v}.$$

Vad ser du? Förklara din iakttagelse. Generalisera.

2.2.5. Ange ett villkor för att avgöra om tre givna vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är kantvektorer i en triangel.

2.3 Bas och koordinater

2.3.1. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en bas för rummet. Vad får $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ för koordinatmatriser om de själva används som bas? (se **Exempel 2.3.8**, sid 21)

2.3.2. Låt $\mathbf{u}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$. Bestäm (se **Exempel 2.3.7**, sid 21)

(a) $2\mathbf{u}+\mathbf{v}$, (b) $\mathbf{u}-3\mathbf{v}$, (c) $\mathbf{u}+\mathbf{e}_1$, (d) $\frac{1}{2}\mathbf{u}+\frac{3}{2}\mathbf{v}$.

2.3.3. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara som i (se Figur 2.1, sid 3) ovan. Vad blir koordinatmatrisen för $\mathbf{u}$ då vi använder $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som bas (använd uppgift 2.2.3)? Hur blir koordinaterna för $\mathbf{v}$ med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ som bas? Koordinaterna för $\mathbf{w}$ med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som bas?

2.3.4. Vad blir koordinatmatrisen för $\mathbf{u}$ resp $\mathbf{v}$ då vi använder $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som bas? För $\mathbf{v}$ resp $\mathbf{w}$ då vi använder $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som bas?

2.3.5. (a) Rita vektorerna

$$\mathbf{u}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Är de kantvektorer i en triangel (se uppgift 2.2.5)?

(b) Är vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

kantvektorer i en triangel?

2.3.6. Undersök om nedanstående vektorer är parallella (läs **Definition 2.2.3**, sid 13):
(a) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.3.7. Bestäm, om möjligt, talet t så att nedanstående vektorer blir parallella (se **Definition 2.2.3**, sid 13):
(a) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ t \\ 3/2 \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4 \\ t-5 \end{pmatrix}$.

2.3.8. Skriv $\mathbf{u}$ som linjärkombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ då

(a) $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.3.9. Ligger vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

i samma plan?

2.3.10. Visa att vektorerna

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

är en bas i rummet. Ange koordinaterna för $\mathbf{u} = 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Hur påverkas koordinaterna om vi byter ordning på $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ (d v s nya $\mathbf{f}_1$ = gamla $\mathbf{f}_2$ och nya $\mathbf{f}_2$ = gamla $\mathbf{f}_1$

2.4 Ortsvektorer, punkter och koordinatsystem

2.4.1. Låt O, A, B, C, D vara punkter i rummet. Förenkla följande vektorsummor:
(a) $\overline{OB}+\overline{BD}+\overline{DC}$, (b) $\overline{AC}+\overline{CO}+\overline{OB}$, (c) $\overline{AB}+\overline{OA}+\overline{BD}$, (d) $\overline{BD}-\overline{BA}+\overline{DC}$.

2.4.2. Låt P, Q och O vara tre punkter i rummet. Låt M vara mittpunkten på sträckan PQ. Uttryck $\overline{OM}$ med hjälp av $\overline{OP}$ och $\overline{OQ}$.

2.4.3. Låt $O, \underline{\mathbf{u}}$ vara ett ”vanligt” rätvinkligt koordinatsystem i planet och markera punkterna

$$A = (3, 2), \quad B = (2, -3), \quad C = (-2, 1)$$

i koordinatsystemet (fyra rutor per enhet för dig som använder rutat papper).

(a) Rita in vektorerna

$$\overline{OA}, \quad \overline{OB}, \quad \overline{OC}, \quad \overline{AB}, \quad \overline{BC} \quad \text{och} \quad \overline{AC}$$

i koordinatsystemet och bestäm deras koordinater (se **Exempel 2.4.2**, sid 22).

(b) Beräkna $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ (jämför med uppgift 2.2.5).

(c) Sätt $\overline{OP} = \dfrac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$. Beräkna koordinaterna för $\overline{OP}$ och rita in P i koordinatsystemet. Vad kan sägas om P?

(d) Beräkna mittpunkterna P, Q, R på triangelns sidor och verifiera påståendet i uppgift 2.4.5.

2.4.4. Låt $O, \underline{\mathbf{u}}$ vara ett koordinatsystem i rummet och

$$A = (1, 3, 2), \quad B = (2, 1, -3), \quad C = (4, -2, 1).$$

(a) Bestäm koordinaterna för vektorerna (se **Exempel 2.4.3**, sid 23)

$$\overline{OA}, \quad \overline{OB}, \quad \overline{OC}, \quad \overline{AB}, \quad \overline{BC} \quad \text{och} \quad \overline{AC}$$

(b) Beräkna $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.

(c) Beräkna mittpunkterna P, Q, R på triangelns sidor och verifiera påståendet i uppgift 2.4.5.

2.4.5. Låt P, Q och R vara mittpunkterna på sidorna i triangeln ABC. Visa att

$$\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

2.5 Skalär- och vektorprodukt

2.5.1. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara tre vektorer i planet sådana att $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{w}| = 5$, vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\dfrac{\pi}{3}$ och vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är $\dfrac{5\pi}{6}$ (RITA FIGUR!).

Bestäm (se **Exempel 2.5.2**, sid 25) (a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$, (c) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$, (d) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

2.5.2. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer sådana att

$$|\mathbf{u}| = 4, \ |\mathbf{v}| = 2 \text{ och vinkeln mellan } \mathbf{u} \text{ och } \mathbf{v} \text{ är } \frac{2\pi}{3}.$$

Bestäm längden av (a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, (b) $3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$.

2.5.3. Visa skalärproduktens motsvarigheter till kvadrerings- och konjugatregeln, d v s

(a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$

(b) $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$

(c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$

2.5.4. Bevisa *parallellogramlagen*, d v s

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2\left(|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2\right).$$

Förklara varför parallellogramlagen är ett bra namn på detta samband.

2.5.5. Vad kan sägas om en parallellogram där diagonalerna är vinkelräta mot varann?

2.5.6. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara som i uppgift 2.5.1. Beräkna (se **Exempel 2.5.6**, sid 29) (a) $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}$, (b) $\mathbf{u}_{\|\mathbf{w}}$.

2.5.7. Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ vara två enhetsvektorer som är vinkelräta mot varann och orienterade så att om $\mathbf{e}_1$ pekar åt höger så pekar $\mathbf{e}_2$ uppåt. Uttryck enhetsvektorn $\mathbf{w}$ i $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ då (se **Exempel 2.5.6**, sid 29)

(a) $\mathbf{w}$ bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$ med både $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

(b) $\mathbf{w}$ bildar vinkeln $\frac{\pi}{6}$ med $\mathbf{e}_1$ och $\frac{2\pi}{3}$ med $\mathbf{e}_2$.

RITA!

2.5.8. Uttryck $\mathbf{w}$ i $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (RITA!) då (se **Exempel 2.5.7**, sid 30)

(a) $|\mathbf{u}|=2$, $|\mathbf{v}|=1$, $|\mathbf{w}|=1$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ bildar vinkeln $\frac{\pi}{4}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ vinkeln $\frac{\pi}{4}$ och $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vinkeln $\frac{\pi}{2}$.

(b) $|\mathbf{u}|=6$, $|\mathbf{v}|=8$, $|\mathbf{w}|=7$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ bildar vinkeln $\frac{\pi}{6}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ vinkeln $\frac{\pi}{2}$ och $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vinkeln $\frac{2\pi}{3}$.

Ledning: Utnyttja 2.5.7.

2.5.9. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en bas i rummet. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3.$$

Beräkna $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ då

(a) $|\mathbf{e}_1|=3$, $|\mathbf{e}_2|=4$, $|\mathbf{e}_3|=2$, $\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_2=-6$, $\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_3=4$ och $\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_3=4$,

(b) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är parvis ortogonala, $|\mathbf{e}_1|=3$, $|\mathbf{e}_2|=2$ och $|\mathbf{e}_3|=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

(c) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är en ON-bas.

2.5.10. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara tre nollskilda vektorer i rummet. Vad kan sägas om dem ifall

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ och $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v}$?

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$?

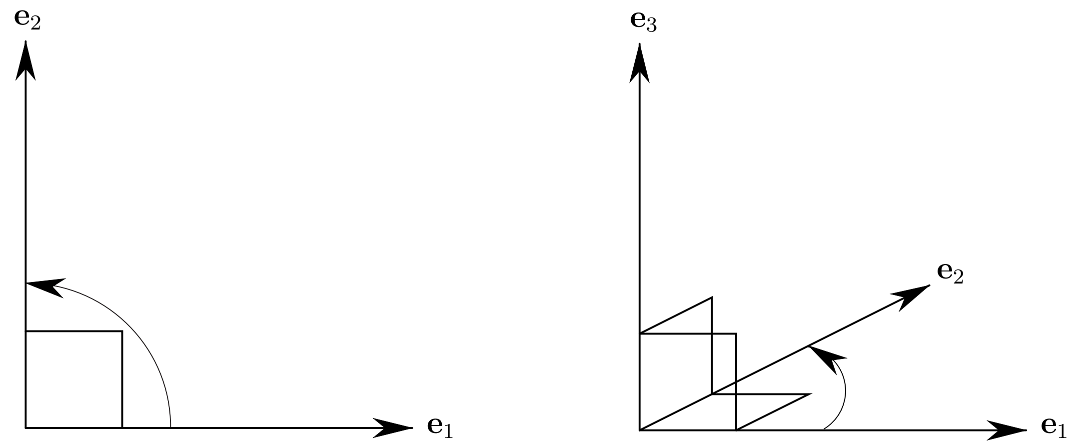
2.5.11. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vara tre nollskilda vektorer i rummet sådana att $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Visa att då är

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\mathbf{w} = \mathbf{w}\times\mathbf{u}$$

2.6 ON-baser och beräkning av skalär- och vektorprodukt

Från och med nu förutsätter vi, om inget annat sägs, att alla koordinater är givna relativt en högerorienterad ON-bas. Detta betyder (se figur)

- i planet: vridning $\dfrac{\pi}{2}$ moturs överför $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$,
- i rummet: vridning $\dfrac{\pi}{2}$ moturs, sett från toppen av $\mathbf{e}_3$, överför $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.



Figur 2.2: Positivt orienterade ON-system i planet och rummet

2.6.1. Beräkna alla skalärprodukter som kan bildas med två av vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

2.6.2. Beräkna längden av vektorerna i uppgift 2.6.1 (se **Exempel 2.6.2**, sid 36).

2.6.3. Beräkna vinkeln mellan vektorerna i uppgift 2.6.1 (se **Exempel 2.6.2**, sid 36).

2.6.4. Beräkna alla skalärprodukter som kan bildas med två av vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\7\\-2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}9\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

2.6.5. Beräkna längden av vektorerna i uppgift 2.6.4 (se **Exempel 2.6.2**, sid 36).

2.6.6. Beräkna vinkeln mellan vektorerna i uppgift 2.6.4 (se **Exempel 2.6.2**, sid 36).

2.6.7. (a) Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(b) Ange, genom att tänka (inte räkna), hur många enhetsvektorer det finns som bildar 45° vinkel med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(c) Bestäm de i (b) efterfrågade vektorerna.

(d) Finns det någon vektor som bildar $22,5^\circ$ vinkel med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$?

2.6.8. Bestäm vinklarna och sidlängderna i triangeln ABC där $A = (-2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 2, 1)$. Kontrollera dina svar med hjälp av cosinussatsen.

2.6.9. Låt $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$.

(a) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ resp $\mathbf{v}$ på $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$.

RITA!

(c) Dela upp $\mathbf{u}$ i komposanter; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ där $\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}}$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

2.6.10. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Dela upp i komposanter: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} + \mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}$ (se 2.6.9(c)).

2.6.11. Punkterna $(2, 2, 3)$ och $(3, 1, 4)$ är ändpunkter till hypotenusan i en rätvinklig triangel. Den ena katetens kantvektor är parallell med vektorn $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$. Bestäm det tredje hörnet.

2.6.12. Utgå från sambandet (2.6.3), sid 37, i boken och beräkna

(a) $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

(b) $(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$

Beräkna sedan ovanstående vektorprodukter med hjälp av minnesregeln (2.6.4), sid 37 och verifiera slutligen att reslutaten är ortogonala mot vektorerna som kryssas.

2.6.13. Beräkna nedanstående vektorprodukter (se **Exempel 2.6.3**, sid 38):

(a) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$, (b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-4\\7\\0\end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$, (c) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

Kontrollera i vart och ett av fallen att resultatet är ortogonalt mot de ingående faktorerna.

2.6.14. Låt $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{w} = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$. Beräkna

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ dels genom att räkna ut $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ och sedan beräkna kryssprodukten på vanligt sätt, dels genom att utnyttja resultaten i (a) och räknelagarna för kryssprodukt.

2.6.15. Verifiera att vektorerna

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$$

är parvis ortogonala. Normera dem, d v s bestäm *enhetsvektorer* (längd 1) parallella med de givna så att vi får en ON-bas.

2.6.16. Verifiera att vektorerna $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ är ortogonala. Normera dem och lägg till en tredje vektor sådan att de tre utgör en *högerorienterad* ON-bas.

2.7 Area och volym

2.7.1. Beräkna arean av triangeln med hörn i (se **Exempel 2.7.1**, sid 39)

$$(2, 1),\ (-3, 2) \quad \text{och} \quad (1, -3)$$

2.7.2. Beräkna arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna (se **Exempel 2.7.3** (a), sid 40)

$$\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3.$$

2.7.3. Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $(-2, 4, 1)$, $(1, 3, 7)$ och $(2, -3, 0)$.

2.7.4. En fyrhörning har hörnen i punkterna $(1, 2, 3)$, $(7, 1, 3)$, $(-2, 4, 1)$ och $(4, 3, 1)$. Visa att den är en parallellogram och bestäm dess area.

2.7.5. Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i $(-2, 4, 1)$, $(1, 3, 7)$, $(2, -3, 0)$ och $(3, 1, -1)$.

2.7.6. Beräkna volymen av den parallellepiped som har parallellogrammen i uppgift 2.7.4 som basyta och $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ som kantvektor (se **Exempel 2.7.3** (b), sid 40).

2.8 Linjer och plan

2.8.1. Bestäm den linje genom $(2, 7)$ som är

(a) parallell med linjen $3x - y = 5$,

(b) vinkelrät mot linjen $3x - y = 5$.

2.8.2. Ange, på parameter-, normal- och riktningskoefficientform linjen genom punkterna (se **Exempel 2.8.5**, sid 47)

(a) $(2, 1)$ och $(3, 3)$

(b) $(0, 2)$ och $(5, 1)$

(c) $(-3,-1)$ och $(3,1)$

2.8.3. Ange, på parameter-, normal- och riktningskoefficientform den normal till

(a) linjen i uppgift 2.8.2 (a) som går genom punkten $(2,1)$,

(b) linjen i uppgift 2.8.2 (b) som går genom punkten $(0,2)$,

(c) linjen i uppgift 2.8.2 (c) som går genom punkten $(3,1)$.

2.8.4. Låt L vara linjen i uppgift 2.8.2 (a). Bestäm den punkt på L som ligger närmast punkten $(6,-1)$ samt avståndet mellan L och $(6,-1)$. Bestäm också spegelbilden av $(6,-1)$ i L. Rita figur! (se **Exempel 2.8.6**, sid 47)

2.8.5. Ange en ekvation på parameterform för linjen L genom punkterna (se **Exempel 2.8.1**, sid 42)

(a) $(1,-1,4)$ och $(2,3,6)$

(b) $(122,353,599)$ och $(-48,-157,-251)$

(c) $(6\pi,-3\pi,12\pi)$ och $(-2\pi,\pi,-4\pi)$

2.8.6. Ange en ekvation på parameterform för linjen genom punkterna $(1,0,2)$ och $(-3,2,4)$. Ligger någon av punkterna $(3,-1,1)$ och $(5,-3,0)$ på linjen?

2.8.7. En partikel rör sig i planet, med konstant hastighet, längs en rät linje. Vid tiden $t=1$ befinner den sig i punkten $(-3,2)$ och vid tiden $t=3$ i $(3,4)$. Var befann den sig vid tiden $t=0$? Kommer den att gå genom punkterna $(9,6)$ resp $(12,8)$ och, om så är fallet, vid vilken tidpunkt?

2.8.8. Avgör huruvida linjerna L_1 och L_2 nedan skär varann, är parallella, identiska eller inget av föregående (se **Exempel 2.8.2**, sid 42):

(a) $L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

(b) $L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}15\\-21\\33\end{pmatrix},\quad L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}6\\-11\\16\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-65\\91\\-143\end{pmatrix}$

(c) $L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}$

(d) $L_1\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad L_2\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}+t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

2.8.9. Låt L vara linjen genom punkten $(-1,2,1)$ med riktningsvektor $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ange den normal till L som går genom $(-2,0,1)$.

2.8.10. Vilken punkt på linjen

$$L\colon\ \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

ligger närmast (se **Exempel 2.8.3**, sid 44)

(a) origo?

(b) $(2, 2, 3)$

Bestäm även avståndet mellan resp punkt och linjen.

2.8.11. Låt L vara linjen genom origo med riktningsvektor $-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3$ och låt $P = (3, -6, 2)$. Ange vilken punkt på L som ligger närmast P samt avståndet mellan P och denna punkt (se **Exempel 2.8.3**, sid 44).

2.8.12. Samma uppgift som 2.8.11 men L går genom punkten $(3, -1, 4)$ istället för origo (se **Exempel 2.8.3**, sid 44).

2.8.13. Bestäm ekvationen på normalform för det plan som innehåller punkten $(2, -1, 3)$ och

(a) har normalriktning parallell med $3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(b) är parallellt med vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.8.14. Ange ekvationen på parameterform och normalform för planet genom punkterna (se **Exempel 2.8.7**, sid 50)

(a) $(1, 1, 3)$, $(0, 0, 4)$ och $(-10, 5, 1)$

(b) $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 0)$ och $(1, 2, 3)$

(c) $(-2, 1, 2)$, $(-1, 1, 1)$ och $(0, 3, 2)$

2.8.15. Ange, på normalform, ekvationen för nedanstående plan samt deras normalvektorer och skärningspunkter med koordinataxlarna.

(a) xy-planet,

(b) planet parallellt med yz-planet genom punkten $(2, 4, -7)$

2.8.16. Ange nedanstående plans normalvektorer och skärningspunkter med koordinataxlarna. Gör också en enkel skiss av planen.

(a) $x + y = 1$,

(b) $x + y = 0$,

(c) $x + y + z = 1$.

2.8.17. Bestäm skärningslinjen L mellan planen (se **Exempel 2.8.7**, sid 50)

(a) $2x + 3y + z = 5$ och $5x + 7y - 4z = 0$

(b) $2x + 5y + 9z = -1$ och $x + 2y + 4z = 0$

Verifiera i båda fallen att skärningslinjens riktningsvektor är parallell med kryssprodukten mellan normalerna.

2.8.18. Bestäm skärningslinjen L mellan planen

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -5 \end{cases}$$

och avgör om L är parallell med planet Π: $5x + y + 4z = 0$.

2.8.19. Låt $P = (3, 2, 1)$ och Π: $x + 2y - 3z = 0$.
Bestäm

(a) P:s ortogonala projektion i Π,

(b) P:s spegelbild,

(c) P:s avstånd till Π.

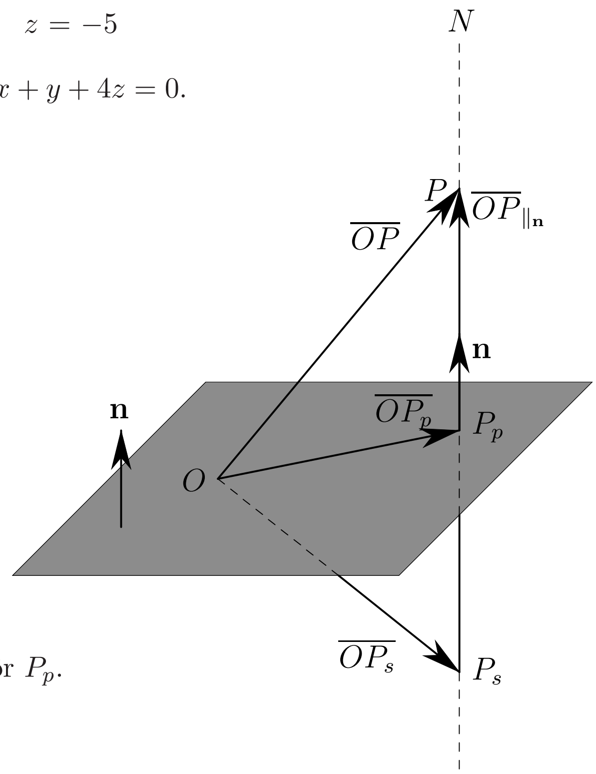
genom att följa nedanstående:

(i) Beräkna den ortogonala projektionen, $\overline{OP}_{\|\mathbf{n}}$, av $\overline{OP}$ på $\mathbf{n}$.

(ii) Ange en formel för sambandet mellan $\overline{OP}$, $\overline{OP}_{\|\mathbf{n}}$ och $\overline{OP}_p$.

(iii) Samma som (ii) men med P_s istället för P_p.

(iv) Svara på de ursprungliga frågorna.



2.8.20. Samma uppgift som 2.8.19 men gör istället enligt nedan:

(i) Ange, på parameterform, ekvationen för den linje N som går genom P och har $\mathbf{n}$ som riktningsvektor.

(ii) Sätt in i ekvationen för Π och bestäm t-värdet för skärningspunkten.

(iii) Hur förhåller sig t-värdet för spegelbilden till skärningspunktens t-värde?

(iv) Uttryck avståndet med hjälp av skärningspunktens t-värde och $\mathbf{n}$.

(v) Svara på de ursprungliga frågorna.

2.8.21. Gör om uppgifterna 2.8.19 och 2.8.20 med Π: $x + 2y - 3z = 1$. Hur påverkar bytet av plan de olika lösningsvägarna? Se exempel 2.8.10, (se Figur 2.39, sid 53), sid 53 i boken.

2.8.22. Bestäm avståndet mellan punkten $(7, 4, 1)$ och planet $2x + 13y + 15z = 60$ (se **Exempel 2.8.10**, sid 52).

2.8.23. Bestäm punktens $(7, -10, 3)$ ortogonala projektion och spegelbild i planet $2x - 3y + z = 5$ (se **Exempel 2.8.10**, sid 52).

2.8.24. Planet $\Pi : x + y + 2z = 13$, vektorn $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och punkten $P = (1, 1, 1)$ är givna.

Bestäm ekvationen för den linje L som går genom P, är parallell med planet Π och ortogonal mot vektorn $\mathbf{u}$.

2.8.25. Låt L vara linjen genom punkterna $(2, 4, -1)$ och $(3, 6, 1)$. Bestäm spegelbilden av L i planet $-x + 3y = 5$.

2.8.26. Planet Π går genom punkterna $(3, 0, 1)$, $(4, 1, 0)$ och $(1, 4, -1)$. Låt $Q_1 = (-1, 4, 2)$ och $Q_2 = (3, 3, -2)$. Ange avståndet från Q_1 respektive Q_2 till Π. Avgör också om Q_1 och Q_2 ligger på samma sida om Π eller inte.

2.8.27. Låt Π vara planet $x+y+3z=5$. Linjen L går genom punkten $P=(0, 0, -2)$ och är ortogonal mot Π. Bestäm de punkter på L som ligger *dubbelt* så långt från Π som P gör.

2.8.28. En ogenomskinlig cirkulär skiva med radie 3 placeras på xy-planet så att cirkelskivans medelpunkt hamnar i punkten $(-1, 2, 0)$. En punktformad ljuskälla placeras i punkten $(19, -18, 11)$ och strålar ut ljus i alla riktningar. Ligger punkten $(-29, 30, -13)$ i cirkelskivans skugga?

2.8.29. Linjen L_1 går genom punkterna $(-1, 2, 1)$ och $(0, 1, 1)$ och linjen L_2 går genom punkterna $(2, -1, 3)$ och $(2, 0, 2)$. Bestäm kortaste avståndet mellan linjerna samt punkterna $P \in L_1$ och $Q \in L_2$ sådana att $|\overline{PQ}| =$ kortaste avståndet genom att följa nedanstående:

(a) Ange linjerna på parameterform.

(b) Övertyga dig om att det finns en riktning, ortogonal mot båda linjerna och beräkna den.

(c) Bestäm ekvationen för det plan Π med riktningen från (b) som normal och som innehåller L_1.

(d) Tag en punkt på L_2 och beräkna avståndet från denna till planet. Vad har detta med avståndet mellan linjerna att göra?

(e) Ange en vektor $\mathbf{u}$ parallell med Π:s normal och vars längd är densamma som avståndet mellan linjerna.

(f) Vilket samband råder mellan $\mathbf{u}$, $\overline{OP}$ och $\overline{OQ}$? Utnyttja detta samband till att bestämma parametervärdena för P resp Q som punkter på L_1 resp L_2 samt ange P och Q.

2.8.30. Samma uppgift som 2.8.29 men gör enligt nedan:

(a) Skriv linjerna på parameterform.

(b) Låt $P \in L_1$ och $Q \in L_2$, i övrigt godtyckliga. Beräkna vektorn $\overline{PQ}$.

(c) Om P och Q är de sökta punkterna, hur förhåller sig då $\overline{PQ}$ till linjernas riktningsvektorer? Utnyttja detta till att ta fram ett ekvationssystem för parametervärdena och lös detta.

2.8.31. Ange på parameterform ekvationen för den linje som skär linjerna

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad L_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

under rät vinkel. (ON-system)

2.8.32. Punkterna $(2, 3, 7)$ och $(6, -5, 3)$ är varandras spegelbilder i planet Π. Ange ekvationen för Π.

3 Matriser

3.2 Matriser

3.2.1. Ange formatet $(r \times k)$ till nedanstående matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.2. Givet matriserna (se **Exempel 3.2.3**, sid 58)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 8 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ange vilka av följande summor som är definierade och beräkna i förekommande fall summorna. (a) $A+D$, (b) $D+F$, (c) $B+C$, (d) $A+C$, (e) $B+F+C$, (f) $D+D$.

3.2.3. Avgör vilka av nedanstående multiplikationer som är definierade och utför dessa (se **Exempel 3.2.4**, sid 59).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.2.4. Följande matriser är givna (se **Exempel 3.2.5**, sid 59):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utför nedanstående multiplikationer i de fall de är definierade:
(a) AA, (b) AB, (c) CA, (d) CB, (e) $(AB)D$.
Gäller $AB = BA$?

3.2.5. Givet matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna ABX. Vilken beräkningsgång, $(AB)X$ eller $A(BX)$ kräver minst antal additioner och multiplikationer?

3.2.6. Ange alla matriser B som kommuterar med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

d v s sådana att $AB = BA$.

3.2.7. Visa att $A^n = 0$ för $n \geq 3$ då (se **Exempel 3.2.7**, sid 61)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.8. Verifiera att $(AB)^t = B^t A^t$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.2.9. (a) Avgör vilka av följande matriser som är symmetriska, diagonala och/eller enhetsmatriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Samma fråga för matriserna $A + B$, $B + C$, $C - D$, $B^t - 2D$ och $A + A^t$.

3.2.10. Utnyttja transponeringsreglerna (se **Sats 3.2.13**, sid 63) till att förenkla uttrycken
(a) $(A + B^t)^t - A^t$, (b) $(BA)^t - A^t(B^t - A)$.

3.2.11. (a) Visa att $(ABC)^t = C^t B^t A^t$.

(b) Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris och låt P vara en $n \times m$-matris. Visa att matrisen $P^t AP$ är symmetrisk.

3.2.12. Låt A vara en 2×2-matris sådan att $(AX)^t = X^t A$ för alla 2×1-matriser X. Visa att A är symmetrisk.

3.2.13. (a) Beräkna $A^t A$ då

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Låt B vara en matris av godtyckligt format. Visa att BB^t är symmetrisk.

(c) Låt B vara en matris av godtyckligt format. Visa att $BB^t = 0 \Rightarrow \; B = 0$.

3.3 Linjära ekvationssystem och matrisekvationer

3.3.1. Skriv om ekvationssytemen nedan som matrisekvationer $AX = Y$ (se **Exempel 3.3.1**, sid 66 och **Exempel 3.4.10**, sid 72).

$$\text{(a)} \begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 7x - 5y = 3 \end{cases}, \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 39 \\ x + 3y + 2z = 34 \\ 3x + 2y + z = 26 \end{cases}.$$

Verifiera sedan med hjälp av matriskalkyl att $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 23 \\ 13 \end{pmatrix}$ är en lösning till (a) och att $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 37 \end{pmatrix}$ är en lösning till (b).

3.3.2. Skriv om ekvationssytemen nedan som matrisekvationer $AX = Y$.

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 5x + 7y - 4z = 0 \end{cases}, \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Verifiera sedan med hjälp av matriskalkyl att

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

är lösningar till (a) respektive (b).

3.3.3. Lös med successiv elimination ekvationssystemet (se **Exempel 3.3.1**, sid 66)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

och ge en geometrisk tolkning av de ingående ekvationerna och lösningsmängden.

3.3.4. Skriv ekvationssystemet i 3.3.3 som en matrisekvation, $AX = Y$. Lös denna med matrismetod och jämför, steg för steg, med din lösning av 3.3.3.

3.4 Radoperationer och trappstegsform

I uppgift 3.4.1–3.4.8, skriv ekvationssystemen på matrisform och lös dem med successiv elimination

3.4.1. $$\text{(a)} \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 7y = 3 \end{cases}, \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}, \qquad \text{(c)} \begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}.$$

3.4.2. $$\text{(a)} \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}, \qquad \text{(b)} \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}, \qquad \text{(c)} \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 6 \\ 6x + 9y = 8 \end{cases}.$$

3.4.3. Lös med successiv elimination ekvationssystemen (se **Exempel 3.4.3**, sid 68):

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 1 \end{cases}$.

3.4.4. (a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$.

3.4.5. Lös med successiv elimination ekvationssystemen (se **Exempel 3.4.4**, sid 69):

(a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_5 = -3 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$.

3.4.6. (a) $\begin{cases} -2x + 3y + 3z = -9 \\ 3x - 4y + z = 5 \\ -5x + 7y + 2z = -14 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ x - y + 3z = 5 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$, (d) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 10 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + y - 2z = 7 \end{cases}$.

3.4.7. Ange (om möjligt) villkor på $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får (se **Exempel 3.4.5**, sid 70) (i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

(a) $\begin{cases} 2x + y - z = a \\ 2y + 3z = b \\ x - z = c \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 3x + y - z = a \\ x - y + 2z = b \\ 5x + 3y - 4z = c \end{cases}$.

3.4.8. Lös ekvationssystemen (se **Exempel 3.4.7**, sid 71 och **Sats 3.4.9**, sid 72):

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = -3 \end{cases}$.

3.5 Trappstegsmatriser och rangbegreppet

3.5.1. Lös nedanstående ekvationssytem $AX = Y$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Titta på dina kalkyler i (a) och (b). Vid vilket steg i kalkylen kan du se om resp system är lösbart eller inte.

3.5.2. Överför med elementära radoperationer matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

till en med A radekvivalent trappstegsmatris och ange rangen för A.

3.5.3. (a) Skriv ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 \qquad\;\; + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

på matrisform. Använd 3.5.2 till att lösa det.

(b) Lösningsmängden i (a) kan tolkas som en linje i rummet. Låt A vara systemets koefficientmatris, X_h koordinatmatrisen för linjens riktningsvektor och X_p koordinaterna för den fixa vektorn i uttrycket för linjen. Beräkna AX_h och AX_p.

(c) Förklara varför resultaten i (b) blir som de blir.

3.5.4. (a) Lös ekvationssystemen nedan samt ange rangen för respektive koefficientmatris.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 1 & 7 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Utnyttja resultaten i 3.5.3 (b) till att kontrollera dina lösningar.

(b) Med ledning av lösningarna till ovanstående system, avgör hur antalet parametrar i lösningen beror av koefficientmatrisens rang och antalet obekanta.

3.5.5. Beräkna för *alla* reella tal a rangen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a+3 & 3a-1 \\ 1 & 2a^2 & 2a^2-1 \end{pmatrix}.$$

3.6 Matrisinvers

3.6.1. Bestäm a och b så att matriserna A och B blir varandras inverser.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

RÄKNA INTE UT INVERSERNA! Använd definitionen av invers!

3.6.2. Bestäm inversen till de av nedanstående matriser som är inverterbara (se **Exempel 3.6.4**, sid 77):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.6.3. Bestäm inversen till (se **Exempel 3.6.5**, sid 78)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.6.4. (a) Bestäm inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Utnyttja resultatet i (a) till att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 15 \end{cases}.$$

3.6.5. Bestäm det X som löser matrisekvationen $XA + B = 2I$ där (se **Exempel 3.6.8**, sid 80)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

och I är enhetsmatrisen.

3.6.6. Lös ekvationen $AX = CX + B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.6.7. Lös matrisekvationen $A^{-1}XB + 2A^{-1}X = C$ där (se **Exempel 3.6.8**, sid 80)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6.8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $AXB^{-1} = A + B^t$.

3.6.9. Antag att de kvadratiska matriserna A och B uppfyller ekvationen $A^2 + AB = I$. Visa att, i tur och ordning,

(a) A är inverterbar,

(b) $B = A^{-1} - A$,

(c) $AB = BA$.

3.6.10. Låt B vara en $n\times n$-matris sådan att

$$B^3 + 2B^2 + B + I = 0.$$

Bevisa att B är inverterbar och ange B^{-1} som ett polynomuttryck i B.

3.6.11. Låt A vara en matris sådan att $(A+I)^{-1}$ existerar. Visa att

$$A(A+I)^{-1} = (A+I)^{-1}A.$$

3.6.12. Låt N vara ett positivt heltal, I enhetsmatrisen och A en $n\times n$-matris sådan att $A - I$ är inverterbar. Visa att

$$(A-I)^{-1}\left(A^{N+1} - I\right) = A^N + A^{N-1} + A^{N-2} + \ldots + A^2 + A + I.$$

3.6.13. Låt A vara en symmetrisk $n\times n$-matris sådan att $A^3 = -A$. Visa att A inte är inverterbar genom att fullfölja bevisstegen nedan.

(a) Motsägelsebevis. Antag att $A^3 = -A$ och att A är inverterbar. Visa att i så fall är $A^2 + I = 0$.

(b) Visa att $A^2 + I \neq 0$ genom att studera diagonalelementen i A^2. Genomför det först för en godtycklig *symmetrisk* 2×2-matris så du ser vad som händer innan du gör det allmänna fallet.

3.6.14. Bestäm inversen till $n\times n$-matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix}.$$

Ledning: Addera först raderna 2 t o m rad n till rad 1.

3.6.15. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna, om möjligt, inverserna till A och A^2 (se **Sats 3.6.7**, sid 79).

3.6.16. Antag att $A \neq I$, $A^2 \neq I$, $A^3 \neq I$ och att $A^4 = I$. Ange inverserna till A, A^2 och A^3 (se **Definition 3.6.1**, sid 75).

3.7 Blandade övningar

3.7.1. (a) Bestäm A^2 $(= A{\cdot}A)$ då

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Bestäm A^n, $n = 3, 4, \ldots$.

(c) Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas i planet. Sätt $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ så att $\mathbf{e}_i = \underline{\mathbf{e}}\, X_i$. För $\alpha = 60^\circ$, rita i samma koordinatsystem vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\underline{\mathbf{e}}\, AX_1$ och $\underline{\mathbf{e}}\, AX_2$. Hur förhåller sig $\underline{\mathbf{e}}\, AX_i$ till $\mathbf{e}_i$?

3.7.2. (a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Beräkna AB. Hur förhåller sig matrisen AB till B?

(b) Samma uppgift som i (a) med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.7.3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Betrakta matrisekvationen $AX = Y$. Om vi ser högerledet Y som koordinater för en vektor i rummet så är ekvationen lösbar endast då vektorn ligger i ett visst plan genom origo. Visa detta och ange planets ekvation.

(b) Verifiera att vektorprodukten mellan kolonnvektorerna är parallell med planets normalvektor.

(c) Beräkna vektorprodukten mellan de av A:s radvektorer som ej är parallella. Använd detta för att bestämma lösningen till $AX = 0$.

3.7.4. Ekvationssytemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 - 9x_3 + ax_4 = 10 \\ -x_1 + 8x_2 - ax_3 + 10x_4 = 6 \end{cases}$$

saknar *entydig* lösning för vissa värden på parametern a. Bestäm dessa a-värden och lös om möjligt ekvationssystemet för dessa värden på a.

3.7.5. Bestäm alla reella a-värden för vilka systemet

$$\begin{cases} x + ay - z = 2 \\ 2y + 4z = a^2 + 2 \\ x - 5z = -4 \\ x + 4y + 3z = 4a \end{cases}$$

är lösbart och lös det för dessa a-värden.

3.7.6. Bestäm alla tripler (a, b, c) för vilka ekvationssystemen

$$\begin{cases} -x + 3y + 8z = a \\ 2x - 2y - 6z = b \\ x - 5y - 13z = c \end{cases}, \qquad \begin{cases} 5x - 2y + 3z = a \\ 4y - z = b \\ 7x + 2y + 3z = c \end{cases}$$

är samtidigt lösbara.

3.7.7. För vilka $a \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x - ay)(1 + x + ay) = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ (a-1)y + z = -1 \end{cases}$$

entydig lösning?

3.7.8. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} X + AY = I \\ AX + Y = -A \end{cases} \quad \text{där} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7.9. Bestäm matrisen A så att $\left(\left(A^t - 2I\right)^{-1}\right)^t = B$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

och I är enhetsmatrisen.

4 Determinanter

4.1 Definitionen

4.1.1. Vilka av de antydda produkterna i determinanterna nedan är tillåtna och vad är deras tecken (se **Exempel 4.2.5**, sid 82)?

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\text{(c)}\ \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad \text{(d)}\ \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \boxed{a_{24}} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ \boxed{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

4.1.2. Beräkna nedanstående determinanter utgående från definitionen (se **Exempel 4.2.7**, sid 83):

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 7 \end{vmatrix},\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix},\quad \text{(c)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.1.3. Beräkna nedanstående determinanter enligt definitionen (se **Exempel 4.2.7**, sid 83):

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},\quad \text{(c)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.2 Att beräkna en determinant

4.2.1 Hur påverkas determinanten av radoperationer

4.2.1. Varför är följande determinanter 0? Motivera med hjälp av räknelagarna.

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix},\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix},\quad \text{(c)}\ \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.2.2. Givet att

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6,$$

Beräkna

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix},\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix},\quad \text{(c)}\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ g+3a & h+3b & i+3c \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}.$$

genom att göra radoperationer ”baklänges”.

4.2.3. Om A är en $n\times n$-matris och $k \in \mathbb{R}$, verifiera att $\det(kA) = k^n \det A$ då

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $k = -3$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $k = -2$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $k = \dfrac{1}{5}$.

4.2.4. Beräkna nedanstående determinanter genom att överföra till trappstegsform (se **Exempel 4.5.3**, sid 88).

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4.2.2 Kofaktorer

4.2.5. Ange alla kofaktorer till (se **Exempel 4.6.2**, sid 88)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.2.6. Beräkna $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix}$ genom att utveckla efter (a) rad 2, (b) kolonn 2, (c) rad 1.

Vilken tycker du blev enklast?

4.2.7. Beräkna, genom att utveckla efter lämplig rad eller kolonn, nedanstående determinanter (se **Exempel 4.6.4**, sid 90):

(a) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

4.2.8. Verifiera att

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

om $ad - bc \neq 0$.

4.2.3 Radoperationer och kofaktorutveckling

4.2.9. Beräkna följande determinanter (se **Exempel 4.5.3′**, sid 91 och **Exempel 4.7.3′**, sid 91)

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$,

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 100 & 101 & 102 & 103 \\ 101 & 102 & 103 & 104 \\ 102 & 103 & 104 & 105 \\ 102 & 104 & 105 & 108 \end{vmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

4.2.10. Beräkna följande determinanter

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 2t & 2+t & 4-t & 7 \\ 0 & 0 & t & 2 \\ t & 1 & 2+t & 7 \end{vmatrix}.$$

4.2.11. Lös ekvationerna

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & x & x & 1 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 2 & x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4.2.12. Beräkna determinanterna, av ordning $n \geq 2$, nedan

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

4.2.13. Vilka villkor måste ställas på s, t, u för att Vandermondes determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ 1 & t & t^2 \\ 1 & u & u^2 \end{vmatrix}$$

skall vara $\neq 0$

4.3 Determinanter och ekvationssystem

4.3.1. Ange villkor på $a, b \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får (se **Sats 4.7.2**, sid 93) (i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

$$\text{(a)} \begin{cases} x - 2y = 1 \\ ax + by = 5 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x + by = -1 \\ ax + 2y = 5 \end{cases}, \quad \text{(c)} \begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + y = b \end{cases}.$$

4.3.2. (a) Avgör för varje reellt a huruvida ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 6 \\ 2x_1 + ax_2 + 8x_3 = 12 \\ ax_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

har entydig, oändligt många eller ingen lösning (se **Exempel 4.7.3**, sid 93).

(b) Samma uppgift för ekvationssystemet (se **Sats 4.7.2**, sid 93)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 8x_3 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

4.3.3. Ange (om möjligt) villkor på $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får (i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

$$\text{(a)} \begin{cases} 3x - y + az = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = b \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x + ay = 0 \\ y + bz = 0 \\ cx + z = 0 \end{cases}.$$

4.3.4. Ange (om möjligt) villkor på $a, b \in \mathbb{R}$ så att systemen nedan får (i) entydig lösning, (ii) ingen lösning, (iii) oändligt många lösningar.

$$\text{(a)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + az = b \\ x + ay + 2z = -1 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} ax + (a-1)y + (a-2)z = b \\ (a-3)y + (a-4)z = 1 \\ (a-5)z = 0 \end{cases}.$$

4.3.5. Beräkna för *alla* reella tal a rangen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a{+}3 & 3a{-}1 \\ 1 & 2a^2 & 2a^2{-}1 \end{pmatrix}.$$

4.3.6. För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 2 \\ 2x + y + a^2 z = 2 \\ x - 3z = a \end{cases}$$

entydig, ingen eller oändligt många lösningar. Ange lösningen i de fall det finns oändligt många. Kontrollera din lösning på det sätt som beskrivs i uppgift 3.5.3 (b)

4.3.7. Ange för varje reellt tal a om ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z + v = 1 \\ ax + y + 2z + v = 3 \\ ax + 2y + 2z + 2v = a \\ x + 3y + 3z + av = 2 \end{cases}$$

saknar lösning, har exakt en lösning eller har oändligt många lösningar.

4.3.8. För vilka λ har ekationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_3 = \lambda x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

icke-triviala lösningar? Lös ekvationssystemet för dessa λ.

4.4 Produktlagen för determinanter

4.4.1. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna (a) $\det A^2$, (b) $\det(5A)$, (c) $5\det A$, (d) $\det\left(\frac{1}{3}A^t\right)$, (e) $\det\left(A^3A^{-1}\right)$.

4.4.2. (a) Formulera ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att en kvadratisk matris skall ha invers.

(b) Avgör om matriserna nedan har invers.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

(c) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ existerar en invers till matrisen nedan?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.3. (a) Låt A vara en 3×3-matris sådan att $A^3 = -A$. Visa att A inte är inverterbar (jämför uppgift 3.6.13).

(b) Ge ett exempel på en inverterbar 2×2-matris sådan att $A^3 = -A$.

4.4.4. (a) Visa att om $\det A \neq 0$ och $AB = 0$ (nollmatrisen) så är $B = 0$.

(b) Låt $A \neq 0$ och $B \neq 0$ vara två kvadratiska matriser sådana att $AB = 0$. Visa att $\det A = \det B = 0$.

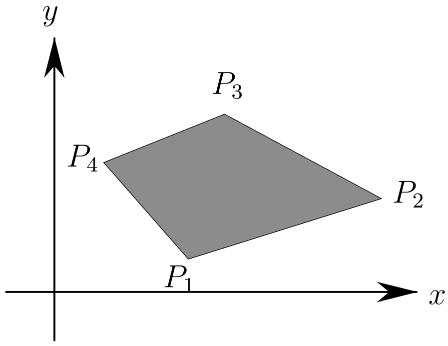
4.4.5. Låat A och T vara $n\times n$-matriser och antag att T är inverterbar. Visa att

$$\det\left(T^{-1}AT\right) = \det A.$$

4.5 Geometriska tolkningar

4.5.1. Betrakta en fyrhörning med hörnen i $P_i = (x_i, y_i)$, se figuren. Visa att dess area är

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix} \right).$$



Figur 4.3: Observera hörnens inbördes ordning.

4.5.2. Beräkna arean av fyrhörningen med hörn i

$$(2, 1),\ (-4, 1),\ (-3, 2) \quad \text{och} \quad (1, -3).$$

Använd föregående uppgift.

4.5.3. Betrakta parallellogrammen med kantvektorerna $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Uttryck dess area som en determinant och beräkna den.

4.5.4. Betrakta den parallellogram som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \quad \text{och} \quad 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3.$$

Uttryck dess area som en determinant och beräkna den.

4.5.5. Betrakta den parallellepiped som har fyra närliggande hörn i

$$(-2, 4, 1), \quad (1, 3, 7), \quad (2, -3, 0) \quad \text{och} \quad (3, 1, -1).$$

Uttryck dess volym som en determinant och beräkna den.

5 Vektorrum

5.2 Definitionen

5.2.1. Avgör vilka av följande mängder som är vektorrum över de reella talen (addition och multiplikation med skalär är de vanliga på respektive mängd).

(a) $M_a = \{$ alla polynom$\}$

(b) $M_b = \{$ alla polynom av grad exakt 3 $\}$

(c) $M_c = \{$ alla polynom av grad $\leq 3\}$

(d) $M_d = \{$ alla $2{\times}2$ matriser med reella elemnt $\}$

(e) $M_e = \{$ alla reella funktioner definierade på $[-1, 2]\}$

(f) $M_f = \mathbb{C}^0(0, 2) =$ alla reellvärda kontinuerliga funktioner med definitionsmängd $]0, 2[$

(g) $M_g = \big\{f(x) \in \mathbb{C}^0(0, 2)\colon\ f(1) = 1\big\}$

(h) $M_h = \big\{f(x) \in \mathbb{C}^0(0, 2)\colon\ f(1) = 0\big\}$

(i) $M_i = \mathbb{Z} =$ de hela talen

5.2.2. Definiera nya additions- och multiplikationsoperationer, $\mathcal{A}$ och $\mathcal{M}$ på $\mathbb{R}_+ = \{x{\in}\mathbb{R}\colon\ x{>}0\}$ enligt följande: $a, b \in \mathbb{R}_+,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$a\mathcal{A}b = a \cdot b, \qquad \lambda\mathcal{M}a = a^\lambda.$$

Visa att $\mathbb{R}_+$ är ett linjärt rum om ”+” och ”·” ersätts med $\mathcal{A}$ och $\mathcal{M}$. Vilket blir det nya nollelementet?

5.3 Underrum

5.3.1. Är

(a) $M_1 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1 + x_2 \neq 0\big\}$

(b) $M_2 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1 + x_2 = 0\big\}$

underrum av $\mathbb{R}^2$?

5.3.2. Vilka av följande mängder är underrum av $\mathbb{R}^3$? (se **Exempel 5.3.5**, sid 106 och **Exempel 5.3.6**, sid 106)

(a) $M_1 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\big\}$

(b) $M_2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1\big\}$

(c) $M_3 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \text{och} \quad x_2 - x_3 = 0\big\}$

(d) $M_4 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \text{eller} \quad x_2 - x_3 = 0\big\}$

(e) $M_5 = \big\{s(1, 1, 1) + t(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3\colon\ s, t \in \mathbb{R}\big\}$

(f) $M_6 = \big\{(1,1,1) + t(1,2,3) \in \mathbb{R}^3\colon t \in \mathbb{R}\big\}$

Beskriv mängderna geometriskt.

5.3.3. Låt $\mathbb{M}_{22}$ vara det vektorrum som består av alla 2×2-matriser med reella element och utrustat med de vanliga räkneoperationerna för addition och multiplikation med tal. Är mängden $M = \{A \in \mathbb{M}_{22}\colon \det A = 0\}$ ett underrum av $\mathbb{M}_{22}$?

5.3.4. Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara två underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$ sådana att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. Är $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$ ett underrum av $\mathbb{V}$?

5.3.5. Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara underrum av $\mathbb{V}$ sådana att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Definiera

$$\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\colon \mathbf{u}_1 \in \mathbb{U}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{U}_2\}\,.$$

Är $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ ett underrum av $\mathbb{V}$?

5.3.6. Låt $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ vara två icke-parallella linjer genom origo i $\mathbb{R}^3$. Beskriv mängden $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ (definieras som i uppgift 5.3.5).

5.3.7. Låt $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$ vara lösningsmängden till ekvationssystemet (se **Exempel 5.3.15**, sid 110)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\;\; x_2 \qquad - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Verifiera att vektorerna $\mathbf{w}_1 = (-4, 2, 1, 1)$, $\mathbf{w}_2 = (-7, 4, 1, 2) \in \mathbb{W}$.

(b) Lös systemet.

(c) Verifiera att varje lösning är en linjärkombination av $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$, d v s $\mathbb{W}$ är det linjära höljet av $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ så att $\mathbb{W}$ är ett underrum av $\mathbb{R}^4$. (Härav talar vi om *lösningsrum* när det gäller *homogena* ekvationssystem.)

5.3.8. Beskriv geometriskt följande mängder i rummet (koordinater relativt någon ON-bas)

$$M_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \qquad M_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-7\\-21\\7\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\9\\-3\end{pmatrix}\right]$$

$$M_3 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}\right]$$

5.3.9. Reducera antalet vektorer som beskriver det linjära höljet (se **Exempel 5.4.7**, sid 115):

(a) $M_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\8\\3\end{pmatrix}\right]$,

(b) $M_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right]$.

5.3.10. Låt

$$\mathbb{U}=\left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right],\quad \mathbb{V}=\left\{\underline{\mathbf{e}}\,X\in\mathbb{R}^4\colon \begin{array}{c} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ \text{och}\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\end{array}\right\}$$

beteckna underrum av $\mathbb{R}^4$. Ange underrummet $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$ både som hölje och lösningsrum. **Ledning:** Skriv $\mathbb{U}$ som lösningsrum (se **Exempel 5.4.22**, sid 124)

5.4 Linjärt (o)beroende, bas och dimension

5.4.1. Vilka av nedanstående uppsättningar av vektorer i $\mathbb{R}^2$ är linjärt beroende? (se **Exempel 5.4.2**, sid 113)

(a) $(1,0),\ (0,0)$

(b) $(1,2),\ (-2,-6)$

(c) $(1,2),\ (-2,-4)$

(d) $(1,0),(0,1)$

(e) $(1,0),(0,1),(5,3)$

5.4.2. Vilka av nedanstående uppsättningar av vektorer är linjärt beroende? (se **Exempel 5.4.7**, sid 115)

(a) $(1,-7,2),(0,5,-2),(1,1,1)\in\mathbb{R}^3$

(b) $(1,-1,1),(2,1,-1),(1,-1,2),(1/2,7/9,14)\in\mathbb{R}^3$

(c) $(1,0,2,-1),(1,2,-1,0),(1,1,0,-1),(-1,-2,2,1)\in\mathbb{R}^4$

(d) $x+x^2,\ x-x^3,\ 1+x,\ x^2\in\mathbb{P}_3$.

5.4.3. Skriv vektorerna $\mathbf{u}=(2,-1,-1)$, $\mathbf{v}=(2,1,1)$ och $\mathbf{w}=(x_1,x_2,x_3)$ i $\mathbb{R}^3$ som linjärkombinationer av $\mathbf{e}=(1,0,1)$, $\mathbf{f}=(1,0,-1)$ och $\mathbf{g}=(0,1,1)$.

5.4.4. Skriv om möjligt vektorerna $\mathbf{u}=(2,4,1)$, och $\mathbf{v}=(1,-1,1)$ som linjärkombinationer av $\mathbf{e}=(1,1,1)$, $\mathbf{f}=(1,-1,2)$ och $\mathbf{g}=(1,-3,3)$. Vad är villkoret för att $\mathbf{w}=(x_1,x_2,x_3)$ skall kunna skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}$? Tolka villkoret geometriskt.

5.4.5. Visa att vektorerna

$$(2,0,1,3),\ \ (0,0,2,2)\ (4,1,0,1),\ \ (6,1,1,4)\in\mathbb{R}^4$$

är linjärt beroende. Skriv $(2,0,1,3)$ som linjärkombination av de övriga. Kan $(0,0,2,2)$ skrivas som linjärkombination av de övriga?

5.4.6. Ange alla $a\in\mathbb{R}$ sådana att

$$(1,4,a),\ \ (2,2,0),\ \ (2,a,1)\in\mathbb{R}^3$$

är linjärt beroende.

5.4.7. Låt

$$\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix},$$

vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. För vilket eller vilka värden på a är vektorerna linjärt oberoende?

5.4.8. Visa att polynomen

$$p_1(x) = 1 + 2x, \ p_2(x) = x + x^2, \ p_3(x) = 3 + x$$

i $\mathbb{P}_2$ är linjärt oberoende.

5.4.9. Undersök om

$$(5, -3, 1, -1), \ (1, 5, -3, 2), \ (2, 3, -2, 1) \in \mathbb{R}^4$$

är linjärt beroende eller oberoende. Ange en bas för höljet av de tre vektorerna ovan och utvidga denna till en bas i $\mathbb{R}^4$. (se **Exempel 5.4.22**, sid 124)

5.4.10. Ange en bas i vektorrummet

(a) $\mathbb{M}_1 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\big\}$

(b) $\mathbb{M}_2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1 = 2x_2 \text{ och } x_3 = 0\big\}$

5.4.11. Ange en bas i lösningsrummet $\mathbb{W}\subset\mathbb{R}^4$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

5.4.12. Betrakta $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ kallas *standardbasen* i $\mathbb{R}^4$.

(a) Visa att ett godtyckligt element $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$.

(b) Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara radmatrisen vars element är $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, d v s

$$\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_4).$$

Visa att det finns en $4{\times}1$-matris X, *koordinatmatrisen*, så att linjärkombinationen från (a) kan skrivas som en matrisprodukt mellan $1{\times}4$-matrisen $\underline{\mathbf{e}}$ av vektorer och X, d v s $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{\mathbf{e}}X$. Bestäm X. Hur ser koordinatmatriserna till standardbasvektorerna ut?

(c) Betrakta $\mathbf{u}_1{=}(1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{u}_2{=}(-1, 1, 2, -3)$, $\mathbf{u}_3{=}(4, -3, 4, 2)$, $\mathbf{u}_4{=}(1, -1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Ange koordinatmatriserna till $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Är $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ linjärt beroende eller oberoende.

(d) Betrakta det ekvationssystem du får i (c). Var i detta ekvationssystem kan du läsa av koordinatmatriserna till $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$?

Hädanefter, om inget annat anges, så står $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \ldots\ \mathbf{e}_n)$ *för standardbasen i* $\mathbb{R}^n$.

5.4.13. Välj ut en bas för $\mathbb{R}^3$ bland vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \mathbf{u}_5 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-5\\10\\8\end{pmatrix}.$$

Kan man ta tre, vilka som helst, av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_5$ till bas? Motivera. (se **Exempel 5.4.7**, sid 115)

5.4.14. I vilka av nedanstående fall är $\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \mathbf{f}_3$ en bas i $\mathbb{P}_2$? (se **Exempel 5.4.27**, sid 127)

(a) $\mathbf{f}_1 = x$, $\mathbf{f}_2 = x^2$, $\mathbf{f}_3 = x^3$

(b) $\mathbf{f}_1 = 1 + x$, $\mathbf{f}_2 = x$, $\mathbf{f}_3 = x + x^2$

(c) $\mathbf{f}_1 = 1 + x$, $\mathbf{f}_2 = x^2$, $\mathbf{f}_3 = 1 + x + x^2$

(d) $\mathbf{f}_1 = 8$, $\mathbf{f}_2 = 8x$, $\mathbf{f}_3 = 8x^2$

(e) $\mathbf{f}_1 = 1$, $\mathbf{f}_2 = (x + 1)^2$, $\mathbf{f}_3 = (x - 1)^2$

5.4.15. Betrakta vektorrummet $\mathbb{P}_3$ bestående av alla polynom i x av grad 3 eller lägre. Elementen $1, x, x^2, x^3 \in \mathbb{P}_3$ utgör standardbasen i $\mathbb{P}_3$. (se **Exempel 5.4.27**, sid 127)

(a) I analogi med uppgift 5.4.12 inför vi radmatrisen av basvektorer $\underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2\ x^3)$. Ange koordinatmatrisen för $1, x, x^2$ respektive x^3 med avseende på standardbasen i $\mathbb{P}_3$. Jämför med koordinatmatriserna för standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^4$. Vad ser du?

(b) Betrakta följande polynom i $\mathbb{P}_3$:

$$\begin{array}{ll} p_1 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3\ , & p_2 = -1 + x + 2x^2 - 3x^3, \\ p_3 = 4 - 3x + 4x^2 + 2x^3\ , & p_4 = 1 - x + x^2 + x^3 \end{array}.$$

Ange koordinatmatriserna till p_1, p_2, p_3 och p_4 med avseende på standardbasen i $\mathbb{P}_3$. Är p_1, p_2, p_3, p_4 linjärt beroende eller oberoende.

(c) Jämför det ekvationssystem du får med det du fick i uppgift 5.4.12(c). Vad ser du?

5.4.16. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas i $\mathbb{R}^2$ och sätt

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \ \ \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

Visa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är en bas i $\mathbb{R}^2$. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u}$ i basen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. (se **Definition 5.4.10**, sid 117)

5.4.17. Låt $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ vara en bas i vektorrummet $\mathbb{V}$ och låt $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$.

(a) Bestäm koordinatmatrisen $X_{\underline{\mathbf{e}}}$ för vektorn $\mathbf{u}$ i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$.

(b) Inför en ny bas $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ definierad genom

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

Bestäm koordinatmatrisen $X_{\underline{\mathbf{v}}}$ för $\mathbf{u}$ i basen $\underline{\mathbf{v}}$. (se **Definition 5.4.10**, sid 117)

5.4.18. Låt

$$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{f}_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Visa att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är en bas i $\mathbb{R}^4$. Ange koordinatmatrisen för $\mathbf{u}$ i den nya basen $\underline{\mathbf{f}}$.

5.4.19. Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vara en bas för rummet $\mathbb{V}$. Vilka av följande mängder spänner upp $\mathbb{V}$? (se **Sats 5.4.19**, sid 121 och **Sats 5.4.15**, sid 120)

(a) $\{\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$

(b) $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$

(c) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$

(d) $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_3\}$

Är varje mängd som spänner upp $\mathbb{V}$ också en bas i $\mathbb{V}$?

5.4.20. Vilka av följande mängder genererar $\mathbb{P}_2$? (se **Sats 5.4.19**, sid 121 och **Sats 5.4.15**, sid 120)

$$M_1 = \{1, x, x^2\}, \qquad M_2 = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\},$$
$$M_3 = \{(1 + x)^2, (1 - x)^2, 1 + x^2\}.$$

5.4.21. Bestäm en bas i rummet

$$\mathbb{M} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon 3x_1 + x_2 - x_4 = 0\right\}$$

och ange dess dimension. (se **Exempel 5.4.12**, sid 118 och **Exempel 5.4.18**(c), sid 121)

5.4.22. (a) Bestäm dimensionen av de nedanstående underrummen $\mathbb{U}$ och $\mathbb{V}$ av $\mathbb{R}^4$: (se **Definition 5.4.17**, sid 121)

$$\mathbb{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\},$$
$$\mathbb{V} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}\right].$$

(b) Är $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$?

(c) Är $\mathbb{V} = \mathbb{U}$?

5.4.23. Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 3, 4), \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1, -1) \in \mathbb{R}^4$$

ligger i lösningsrummet $\mathbb{W}$ till ekvationen $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Härled ett villkor för att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ skall vara en linjärkombination av dem. Spänner de upp hela $\mathbb{W}$? (se **Exempel 5.3.11**, sid 109)

5.4.24. Låt $\mathbb{U}= \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$ och sätt $\mathbf{u}=\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\6\end{pmatrix}$.

Bestäm dimensionen av $\mathbb{U}$ och avgör om $\mathbf{u}$ tillhör $\mathbb{U}$ eller ej.

5.4.25. Undersök om följande likheter gäller:

(a) $[(1, 1, 0), (1, 0, 1)] = [(1, 2, -1), (2, 1, 1)]$

(b) $[(1, 1, 0), (1, 0, 1)] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

(c) $[(1, 1, 0), (1, 0, 1)] = [(2, 3, 0), (0, 1, -2), (2, 1, 1), (1, 1, 1)]$

5.4.26. Betrakta följande underrum av $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbb{M}_1 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right], \quad \mathbb{M}_2 = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-5\\-1\\-5\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\\2\end{pmatrix}\right].$$

Visa att $\mathbb{M}_1 = \mathbb{M}_2$.

5.4.27. Visa att nedanstående mängder är linjärt oberoende och fyll sedan ut dem till en bas för respektive rum:

(a) $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$,

(b) $\{(1, 1, 2, 1), (2, 3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$,

(c) $\{(1, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 0)\} \subset \mathbb{W} = \{\underline{\mathbf{e}}\, X \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$.

5.4.28. Givet vektorerna $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}$ ange en vektor $\mathbf{f}_3$ så att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$. Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor på $\mathbf{f}_3$:s koordinater i standardbasen för att $\mathbf{f}_3$ skall duga som utfyllnad.

5.4.29. Ange en bas för $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ om $\mathbb{U} = [(1, 1, 1), (1, 0, -1)]$ och $\mathbb{V} = [(2, 1, 1), (1, 0, 1)]$. Beskriv de ingående rummen geometriskt

5.4.30. Bestäm en bas i, och dimensionen av nedanstående linjära höljen:

$$\mathbb{M}_1 = [(1,0,1,0,1),(1,0,1,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1),(1,0,0,0,1)],$$
$$\mathbb{M}_2 = [(1,1,0,0,1),(0,0,0,1,0),(1,0,-2,1,0),(1,1,-1,0,1),(0,0,1,1,0)].$$

Ange en bas i, och dimensionen av $\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$.

5.4.31. Låt p_1, p_2, p_3 var tre polynom i $\mathbb{P}_2$ som alla har olika gradtal. Visa att p_1, p_2, p_3 är en bas för $\mathbb{P}_2$

5.4.32. Vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. Vad är dimensionen av det underrum som genereras av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k,\ \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1?$$

5.4.33. Låt

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\-4\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\-3\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}\right] \quad \text{och} \quad \mathbb{V} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right].$$

Bestäm ett underrum $\mathbb{W}$ av $\mathbb{R}^5$ sådant att

$$\dim \mathbb{W} = 3,\ \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{U}) = 2 \text{ och } \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{V}) = 2.$$

5.4.34. Ange en bas och dimensionen för det underrum $\mathbb{M}$ av $\mathbb{R}^5$ som genereras av

$$\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\\2\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_4 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

samt utvidga den framtagna basen till en bas för $\mathbb{R}^5$. Lös uppgiften på två olika sätt genom att följa nedanstående lösningsvägar:

I. (a) Bilda en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ och sätt dels $= \mathbf{0}$, dels = godtycklig vektor. Ger två ekvationssystem med samma vänsterled och olika högerled. Överför till triangulär form (behandla båda högerleden samtidigt). LÖS INTE SYSTEMET!

(b) Betrakta först systemet med nollor i högerledet. Hur många nollrader får du? Hur många parametrar innehåller lösningen (lös inte systemet)? Är någon av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ en linjärkombination av de andra? $\dim \mathbb{M} =$? Ange ett samband mellan $\dim \mathbb{M}$, antalet kolonner och antalet parametrar i lösningen.

(c) Stryk sista "vänsterledskolonnen" i det triangulära systemet, fortfarande nollor i högerledet. Hur ser motsvarande ursprungssystem ut? Hur förhåller sig lösbarheten i det bantade systemet till det ursprungliga systemet? Vilken linjärkombination svarar det bantade systemet mot? Vad kan nu sägas om vektorerna i denna linjärkombination?

(d) Nu till godtyckligt högerled. Under vilka villkor på högerledet är systemet lösbart? För ett givet högerled, vad kan sägas om högerledsvektorn ifall systemet *inte* är lösbart?

(e) Utfyllnad till bas för $\mathbb{R}^5$: Vad måste vi kräva av de element vi fyller ut med? Hur skall utfyllnaden väljas?

II. (a) Fyll direkt ut med fem vektorer som spänner upp $\mathbb{R}^5$, t ex standardbasen. Bilda en linjärkombination av alla de nio ingående vektorerna och sätt $= \mathbf{0}$ ($\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4$ först). Ger homogent ekvationssystem. Överför detta till triangulär form.

(b) Studera det triangulerade systemet. Hur kan du på detta se vilka av de nio vektorerna som kan skrivas som linjärkombination av de andra. Stryk kolonner, från höger, till dess du får ett entydigt lösbart system.

(c) Vilken linjärkombination svarar detta system mot? Vad kan sägas om vektorerna i denna linjärkombination?

(d) Vilka kolonner strök du? Med ledning av detta, ange en bas i $\mathbb{M}$ samt $\dim \mathbb{M}$.

Fördelar, nackdelar med de olika metoderna? Diskutera.

5.5 Basbyte

5.5.1. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas i $\mathbb{R}^2$ och sätt (se sid 130-131)

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

Visa att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en bas i $\mathbb{R}^2$. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u}$ i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.

5.5.2. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas i $\mathbb{R}^2$ och sätt

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = -4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

Visa att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en bas i $\mathbb{R}^2$. Vilket samband råder mellan koordinaterna relativt baserna $\underline{\mathbf{e}}$ och $\underline{\mathbf{f}}$? (se sid 130-131)

5.5.3. Visa att $(2, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 1, -1)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och ange koordinaterna för $(3, -1, 5)$ i denna bas. (se **Sats 5.6.1**, sid 131)

5.5.4. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ och $\underline{\mathbf{f}}$ vara baser i $\mathbb{R}^3$ för vilka gäller

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$. (se **Sats 5.6.1**, sid 131)

5.5.5. Låt $\underline{\mathbf{e}}$, $\underline{\mathbf{f}}$ och $\underline{\mathbf{g}}$ vara baser i ett vektorrum $\mathbb{V}$ för vilka gäller att

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\,T_1 \quad \text{och} \quad \underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\,T_2.$$

Bestäm $\dim \mathbb{V}$. Ange en matris T_3 sådan att $\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{f}}\,T_3$.

5.5.6. Koordinatsambandet vid ett basbyte ges av

$$\begin{cases} 3y_1 = -x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 3y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 3y_3 = - 3x_2 \end{cases}.$$

Bestäm transformationsmatrisen som förmedlar basbytet från $\underline{\mathbf{e}}$ till $\underline{\mathbf{f}}$ (koordinaterna x_i hör ihop med $\underline{\mathbf{e}}$). (se **Sats 5.6.1**, sid 131)

5.5.7. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, en bas $\underline{\mathbf{f}}$ så att

$$\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.5.8. En ogenomskinlig parallellepiped i rummet har ett hörn i origo och tre närliggande hörn i $(1, 2, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(1, -1, 1)$. (se **Exempel 5.6.2**, sid 131)

(a) Var skär linjen L: $\underline{\mathbf{e}}\,X = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ epipeden förutom i origo?

(b) Hur av många epipedens sidytor är synliga från punkten $\left(\frac{12}{5}, 1, \frac{11}{5}\right)$?

5.5.9. Visa att polynomen $\mathbf{p}_1 = x + 1$, $\mathbf{p}_2 = x - 1$, $\mathbf{p}_3 = x^2 + x + 3$ utgör en bas för $\mathbb{P}_2$. Låt $\underline{\mathbf{x}} = (1\ x\ x^2) =$ standardbasen i $\mathbb{P}_2$ och sätt $\underline{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3) = (x + 1\ \ x - 1\ \ x^2 + x + 3)$. Bestäm transformationsmatrisen T sådan att $\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{x}}\,T$.

6 Euklidiska rum

6.2 Skalärprodukt

6.2.1. Låt $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Vilka av följande funktioner från $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ är skalärprodukter på $\mathbb{R}^2$? (se **Definition 6.2.1**, sid 136)

(a) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2$

(b) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_2y_2$

(c) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

(d) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

6.2.2. Vilka av nedanstående operationer definierar skalärprodukter på respektive rum?

(a) $\mathbb{V} = C(a, b)$, rummet av funktioner kontinuerliga på $[a, b]$,

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)p(t)\,dt$$

där $p(t) > 0$ och $p \in C(a, b)$. (se **Exempel 6.2.4**, sid 137)

(b) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2$, $(f|g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$.

(c) $\mathbb{V} = \mathbb{P}_3$, $(f|g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$.

6.2.3. Ange *alla* talpar a, b sådana att

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$$

definierar en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$. (se **Exempel 6.2.5**, sid 138)

6.2.4. Ange för vilka värden på a som

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + ax_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$$

definierar en skalärprodukt på $\mathbb{R}^3$. (se **Exempel 6.2.5**, sid 138)

6.2.5. Beräkna $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ och $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ då $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^3$ utrustats med skalärprodukten

(a) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ (standardskalärprodukten),

(b) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$.

I fortsättningen kommer vi att beteckna ett godtyckligt euklidiskt rum med $\mathbb{E}$. Beteckningen $\mathbb{R}^n$ kommer fortsättningsvis endast att användas om det euklidiska rum som fås då $\mathbb{R}^n$ försetts med standardskalärprodukten som skalärprodukt.

6.2.6. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ och $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 5$, $|\mathbf{u}| = 2$ och $|\mathbf{v}| = 4$. Beräkna $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$. (se beviset av Pythagoras sats, **Sats 6.2.8**, sid 140)

6.2.7. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i ett godyckligt euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Visa

(a) Pythagoras sats: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow |\mathbf{u} \pm \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$,

(b) parallellogramlagen: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$

6.2.8. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i ett godyckligt euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Hur förhåller sig $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$ om $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|$. Rita figur för fallet $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ först innan du visar det allmänna fallet.

6.2.9. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara tre enhetsvektorer i $\mathbb{E}$ som uppfyller

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{2},\ (\mathbf{u}|\mathbf{w}) = \frac{1}{6} \text{ och } (\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \frac{1}{3}.$$

(a) Konstruera en vektor $\neq \mathbf{0}$ som är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (Ledning: Ansätt den sökta vektorn som en linjärkombination av, t ex $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.)

(b) Visa att $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt oberoende.

6.2.10. Inför skalärprodukten

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

i rummet $\mathbb{P}_2$. Beräkna längden av $1+3x$.

6.2.11. Låt $\mathbb{E}$ vara det euklidiska rum som fås då $\mathbb{R}^2$ förses med skalärprodukten

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Ange en enhetsvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ som är ortogonal mot $\mathbf{u} = (1,2)$.

6.2.12. Låt $\mathbf{u} = (1,2,3,4)$, $\mathbf{v} = (2,3,4,1) \in \mathbb{R}^4$. Beräkna $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ och verifiera att Cauchy-Schwarz olikhet gäller. (se **Sats 6.2.12**(a), sid 141)

6.2.13. Visa att

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq 1.$$

Ange ett $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ så att likhet råder. (se **Sats 6.2.12**(a), sid 141)

6.2.14. Låt $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vara sådan att $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Visa att

$$|x_1 + 2x_2 + 3x_3| \leq \sqrt{14}.$$

Ange de $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ för vilka likhet råder. (se **Sats 6.2.12**(a), sid 141)

6.2.15. En tank med rektangulära sidor skall tillverkas. Sök den maximala arean av tankens begränsningsytor om rymddiagonalens längd är 4 meter. Vilken form har tanken då sidoytorna har den maximala arean. (se **Sats 6.2.12**(a), sid 141)

6.3 ON-baser

6.3.1. Bestäm en ON-bas för underrummet

$$\mathbb{U} = [(1,2)] \subset \mathbb{R}^2$$

och fyll ut den till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^2$.

6.3.2. Bestäm en ON-bas för underrummet

$$\mathbb{U} = [(1,2,3),(1,-1,1)] \subset \mathbb{R}^3$$

och fyll ut den till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^3$ ("Kryssa" dig fram).

6.3.3. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left[\mathbf{u}_1 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Visa att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är parvis ortogonala.

(b) Utgå från $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ och ange en ON-bas för $\mathbb{U}$.

(c) Fyll ut med en vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) så att vi får en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ (Skriv ortogonalitetsvillkoren som ett ekvationssystem, lös det och normera lösningen).

6.3.4. Beskriv det ortogonala komplementet till ett plan, genom origo, i $\mathbb{R}^3$. (se Figur 6.2, sid 146)

6.3.5. Ange det ortogonala komplementet, $\mathbb{U}^\perp$ till underrummet $\mathbb{U}$ i uppgift
(a) 6.3.1, (b) 6.3.2, (c) 6.3.3.

6.3.6. Dela upp vektorn $\mathbf{v}$ i komponenter, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$ då

(a) $\mathbf{v} = (1,5)$ och $\mathbb{U}$ är underrummet i uppgift 6.3.1,

(b) $\mathbf{v} = (2,-9,10)$ och $\mathbb{U}$ är underrummet i uppgift 6.3.2,

(c) $\mathbf{v} = (0,0,2,10)$ och $\mathbb{U}$ är underrummet i uppgift 6.3.3 (se **Exempel 6.3.10**, sid 147).

Bestäm också avståndet mellan $\mathbf{v}$ och underrummet. (se **Sats 6.3.15**, sid 150)

6.3.7. Ange koordinaterna för vektorn (se **Sats 6.3.12**, sid 148 och **Exempel 6.3.13**, sid 148)

(a) $\mathbf{v} = (2,5)$ i den ON-bas du konstruerade i uppgift 6.3.1

(b) $\mathbf{v} = (2,-9,10)$ i den ON-bas du konstruerade i uppgift 6.3.2,

(c) $\mathbf{v} = (0,0,2,10)$ i den ON-bas du konstruerade i uppgift 6.3.3.

6.3.8. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en ON-bas i $\mathbb{R}^4$ och låt $\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ och $\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4$. Bestäm talet λ så att $\lambda\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ blir ortogonal mot $\mathbf{f}_1$.

6.3.9. Bestäm ON-baser i nedanstående linjära höljen i $\mathbb{R}^4$ och ange höljenas dimension. (se **Exempel 6.3.18**, sid 152)

$$\text{(a)}\quad \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}4\\-5\\1\\3\end{pmatrix}\right],\quad \text{(b)}\quad \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right],$$

$$\text{(c)}\quad \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\1\end{pmatrix},\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

6.3.10. Gör om uppgift 6.3.9 (c) genom att följa nedanstående:

(a) Skriv om höljet som ett lösningsrum på vanligt sätt,

(b) kontrollera att din ekvation är korrekt genom att sätta in vektorerna som genererar höljet i i ekvationen,

(c) välj två ortogonala vektorer som uppfyller ekvationen och som har nollor på olika ställen, i detta fall, t ex $(a, b, 0, 0)$ och $(0, 0, c, d)$. Hur förhåller sig a och b till varann? c och d? Välj enklast möjliga värden på a, b, c, d och normera.

(d) Hur skall en tredje vektor se ut för att säkert vara ortogonal mot de första två?

(e) Ansätt en sådan och sätt in i ekvationen. Vad får du för villkor?

(f) Välj enklast möjliga värden på konstanterna och normera.

Att lösa uppgiften på detta sätt blir inte nödvändigtvis enklare. Steg (a) och (b) är dock alltid användbara.

6.3.11. Låt $\mathbf{v} = (2, -4, 11, 3)$. Dela upp $\mathbf{v}$ i komponenter så att

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \quad \text{och ange} \quad \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$$

där $\mathbb{U}$ är underrummet i
(a) uppgift 6.3.9 (a), (b) uppgift 6.3.9 (b).

6.3.12. Låt $\mathbb{U} = [(1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4)] \subset \mathbb{R}^4$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{U}^\perp$. Skriv $\mathbb{U}^\perp$ som ett lösningsrum till ett ekvationssystem. (se **Exempel 6.3.7**, sid 145)

6.3.13. (a) Fyll ut ON-basen som konstruerades i övning 6.3.9 (a) till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$ genom att bestämma en ON-bas i dess ortogonala komplement.

(b) Använd ON-basen i $\mathbb{U}^\perp$ till att beräkna $(2, -4, 11, 3)_{\perp\mathbb{U}} = (2, -4, 11, 3)_{\|\mathbb{U}^\perp}$ direkt.

6.3.14. Låt $\mathbb{M} = \{\underline{\mathbf{e}}X \in \mathbb{R}^5 \colon AX = 0\}$ där

$$A = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\\1&2&1&2&1\\2&1&2&1&2\\5&4&5&4&5\end{pmatrix},$$

d v s $\mathbb{M}$ är lösningsrummet till det homogena ekvationssystemet $AX = 0$. Visa att $\mathbb{M}$ är ett underrum av $\mathbb{R}^5$ och ange en ON-bas i $\mathbb{M}$.

6.3.15. Låt $\mathbf{u}_0 = (-1, 3, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$. Bestäm en ON-bas i underrummet

$$\mathbb{M} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4 \colon \mathbf{u} \bullet \mathbf{u}_0 = 0 \right\}.$$

Fyll sedan ut denna till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

6.3.16. Bestäm en ON-bas i underrummet

$$\mathbb{V} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \right\}.$$

Fyll sedan ut denna till en ON-bas för $\mathbb{R}^4$.

6.3.17. Låt $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ och

$$\mathbb{W} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Skriv $\mathbb{W}$ som lösningsrum. (se **Exempel 5.4.22**, sid 124)

(b) Bestäm $\mathbf{u}_{\|\mathbb{W}}$ och $\mathbf{u}_{\perp\mathbb{W}}$ (använd **Sats 6.3.9**, sid 146 på den av $\mathbb{W}$ och $\mathbb{W}^{\perp}$ som har lägst dimension).

(c) Beräkna $\min\limits_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}} |\mathbf{u} - \mathbf{w}|$ och ange vilket $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ som ger det minsta värdet. (se **Sats 6.3.15**, sid 150)

6.3.18. Vilka av nedanstående matriser är ortonormala: (se **Definition 6.3.22**, sid 156 och **Sats 6.3.23**, sid 156)

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6.3.19. Antag att A och B är ortonormala matriser av samma ordning. Visa att också matriserna AB och AB^t är ortonormala.

6.3.20. Visa att determinanten av en ortonormal matris är 1 eller -1.

6.3.21. Låt P vara en nollskild $n \times 1$-matris. Visa att matrisen $n \times n$-matrisen

$$H = I - \frac{2}{P^t P} P P^t$$

är symmetrisk och ortonormal.

6.4 Minstakvadrat-metoden

6.4.1. Bestäm minsta-kvadrat-lösningarna till nedanstående olösbara ekvationssystem: (se **Sats 6.4.1**, sid 162)

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$.

6.4.2. Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till matrisekvationen $AX = B$ där (se **Sats 6.4.1**, sid 162)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathbb{M}_{2,1}$ vara rummet av 2×1-matriser och $\underline{\mathbf{e}}$ standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Beräkna

$$\min_{X \in \mathbb{M}_{2,1}} |\underline{\mathbf{e}}\, AX - \underline{\mathbf{e}}\, B|.$$

6.4.3. Samma uppgift som 6.4.2 med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Förklara, i geometriska termer, varför du får oändligt många lösningar. Vad händer med parameter-delen av lösningen då du multiplicerar med A från vänster?

6.4.4. Ange den linje $y = kx + m$ som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till värdena i nedanstående tabell:

x	1	2	3	4	5
y	5	6	10	12	17

6.4.5. Ange den andragradskurva $y = ax^2 + bx + c$ som i minsta-kvadratmening bäst ansluter till värdena i nedanstående tabell:

x	−2	−1	0	1	2
y	2	1	1	2	3

6.4.6. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^4$. Beräkna $\mathbf{e}_{1\|_{\mathbb{U}}}$ med minsta-kvadratmetoden då (se **Exempel 6.4.2**, sid 162)

(a) $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$, (b) $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$,

(c) $\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$.

Bestäm också, med ledning av minsta-kvadratlösningen, $\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{e}_1 - \mathbf{u}|$ och $\dim \mathbb{U}$.

6.4.7. Bestäm QR-faktoriseringen av (se **Exempel 6.4.4**, sid 164)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \\ 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7 Linjära avbildningar

7.2 Definitionen

Om inget annat anges kommer bokstäverna X, Y, Z, i detta avsnitt, att stå för kolonnmatriser. Om det står, t ex $\underline{\mathbf{e}}\,X$ där $\underline{\mathbf{e}}$ är en bas för något n-dimensionellt vektorrum så är det underförstått att

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

är koordinatmatrisen för ett element i vektorrummet, d v s en $n\times 1$-matris.

7.2.1. Vilka av följande avbildningar $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är linjära? (se **Definition 7.2.1**, sid 170)

(a) $F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (x_1, 0, \ldots, 0)$

(b) $F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots, x_n + 1)$

(c) $F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (1, x_2, \ldots, x_n)$

(d) $F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1)$

7.2.2. Vilka av följande avbildningar är linjära?

(a) $F\colon C^1(a,b) \to C(a,b)$ definierad genom $F(f) = \dfrac{df}{dx}$ (se **Exempel 7.2.5**, sid 172)

(b) $F\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ definierad genom $F(f) = x\,\dfrac{df}{dx}$ (se **Exempel 7.2.5**, sid 172)

(c) $F\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}$ definierad genom $F(f) = f(17)$

(d) $F\colon C(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ definierad genom $F(f) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

7.2.3. Antag att $F\colon \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ är en linjär avbildning som i baserna $\underline{\mathbf{e}} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)$ och $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)$ i $\mathbb{L}$ resp $\mathbb{M}$ ger:

$$F(\mathbf{e}_1) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F(\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ange bilderna av $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ under avbildningen F.

7.2.4. Låt $\underline{\mathbf{e}}_3$ och $\underline{\mathbf{f}}_2$ vara standardbaserna i $\mathbb{R}^3$ resp $\mathbb{R}^2$. Finns det någon linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sådan att

$$\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{F}{\longmapsto} \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{F}{\longmapsto} \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{F}{\longmapsto} \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7.3 Matrisframställning

7.3.1. De linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ges av

(a) $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - \sqrt{3}x_2 + \pi x_3\ ,\ (\ln 2)x_1 + (\sin 4)x_2 - (3e)x_3)$.

(b) $G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$

Bestäm matrisen med avseende på standardbaserna i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ till F respektive G. (se **Sats 7.3.1**, sid 174)

7.3.2. De linjära avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av (se **Sats 7.3.1**, sid 174)

(a) $F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 - \sqrt{3}x_2 + \pi x_3 \\ (\ln 2)x_1 + (\sin 4)x_2 - (3e)x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$.

(b) $G\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ (\ln 2)x_1 + (\sin 4)x_2 - (3e)x_3 \end{pmatrix}$

Bestäm matrisen med avseende på standardbasen i $\mathbb{R}^3$ till F respektive G.

7.3.3. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som i standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Beräkna (a) $F(\mathbf{e}_1)$, (b) $F(\mathbf{e}_2)$, (c) $F(\mathbf{e}_3)$, (d) $F(1, 2, 3)$, (e) $F(1, 1, 2)$, (f) $F(1, 0, 1)$, (g) $F(1, -1, 1)$.

7.3.4. Bestäm matrisen till nedanstående linjära avbildningar med avseende på standardbasen i respektive rum: (se **Sats 7.3.1**, sid 174)

(a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $F(\mathbf{e}_1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ e \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ och $F(\mathbf{e}_1) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -e \\ \ln 2 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{e}_2) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2\pi \\ \sqrt{3} \\ \sin 3 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{e}_3) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3\pi \\ -\sqrt{7} \\ \tan 5 \end{pmatrix}$

(c) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ och $F\left(\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 2 \\ -e \\ \ln 2 \\ \cos 3 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $F\left(\underline{\mathbf{e}}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}_5\begin{pmatrix} 3\pi \\ -\sqrt{7} \\ \tan 5 \\ \ln 3 \\ 2e \end{pmatrix}$

(d) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ och

$$F(1, 0, 0) = (2, \pi), \quad F(0, 1, 0) = \left(\sqrt{2}, \ln 3\right), \quad F(0, 0, 1) = \left(\tan 1, \sqrt{5}\right)$$

7.3.5. Antag att $F\colon \mathbb{U}\to\mathbb{V}$ är en linjär avbildning som i baserna $\underline{\mathbf{e}}=(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)$ och $\underline{\mathbf{f}}=(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3\ \mathbf{f}_4)$ i $\mathbb{U}$ resp $\mathbb{V}$ definieras av

$$\text{(a)}\ \ F(\mathbf{e}_1)=\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\0\end{pmatrix},\quad F(\mathbf{e}_2)=\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}0\\-6\\7\\3\end{pmatrix},\qquad \text{(b)}\ \ \begin{cases}F(\mathbf{e}_1)=\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2\\ F(\mathbf{e}_2)= \qquad\qquad 2\mathbf{f}_3+3\mathbf{f}_4\end{cases}.$$

Ange avbildningens matris relativt de givna baserna.

7.3.6. Bestäm matriser relativt standardbasen i $\mathbb{P}_3$ för avbildningen $F, G, H\colon \mathbb{P}_3\to\mathbb{P}_3$ som definieras av (se **Exempel 7.3.4**, sid 175)
(a) $F(p(x))=\dfrac{dp}{dx}$, (b) $G(p(x))=\dfrac{d^2p}{dx^2}$, (c) $H(p(x))=x\,\dfrac{dp}{dx}$.

7.3.7. Låt x_1, x_2, x_3 vara koordinater med avseende på en positivt orienterad ON-bas $\underline{\mathbf{e}}$ i rummet. Bestäm matrisen i basen $\underline{\mathbf{e}}$ för följande linjära avbildningar genom att tänka, inte räkna:

(a) spegling i planet $x_3=0$,

(b) ortogonal projektion på planet $x_1=0$,

(c) likformig sträckning med en faktor 3

(d) vridning $\dfrac{\pi}{2}$ kring $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ moturs sett från toppen av $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

7.3.8. En linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definieras av

$$(1,1,0)\xmapsto{F}(2,1,0),\quad (0,1,0)\xmapsto{F}(-1,2,1),\quad (0,1,1)\xmapsto{F}(2,1,5).$$

Bestäm F:s matris relativt standardbasen.

7.3.9. Låt $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vara en ortogonalprojektion planet $\Pi:\ -x+2y+z=0$. Bestäm F:s matris i standardbasen. (se **Exempel 7.3.4**, sid 175)

7.3.10. Låt $G\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vara en spegling i planet $\Pi:\ -x+2y+z=0$. Bestäm G:s matris i standardbasen. (se **Exempel 7.3.4**, sid 175)

7.3.11. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en höger ON-bas i rummet och sätt $\mathbf{a}=\dfrac{1}{3}(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3)$. Bilda en ny höger ON-bas $\underline{\mathbf{f}}$ genom

$$\mathbf{f}_1=\mathbf{a},\quad \mathbf{f}_2=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3),\quad \mathbf{f}_3=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3).$$

Definiera avbildningen F på rummet som $F(\mathbf{u})=\mathbf{a}\times\mathbf{u}$. Bestäm F:s matris relativt basen (a) $\underline{\mathbf{e}}$, (b) $\underline{\mathbf{f}}$.
genom att beräkna basvektorernas bilder.

(c) Titta igenom definitionen av högersystem och vektorprodukt. Förklara, utan att räkna, varför resultatet i (b) blir som det blir.

7.3.12. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara en höger ON-bas och F ortogonalprojektion i planet $x_1+x_2-x_3=0$. Bestäm F:s matris relativt $\underline{\mathbf{e}}$ genom att beräkna basvektorernas bilder. Gör detta genom att svara på samt följa nedanstående frågor och anvisningar:

(a) Låt $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Ange planets normal $\mathbf{n}$ och verifiera att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ tillhör planet.

(b) Vad blir F(planets normal)? F(vektor i planet)?

(c) Vi vill beräkna $F(\mathbf{e}_i)$. Utnyttja (b) och att F är linjär för att erhålla, t ex

$$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \underline{F(\mathbf{e}_1) - F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}.$$

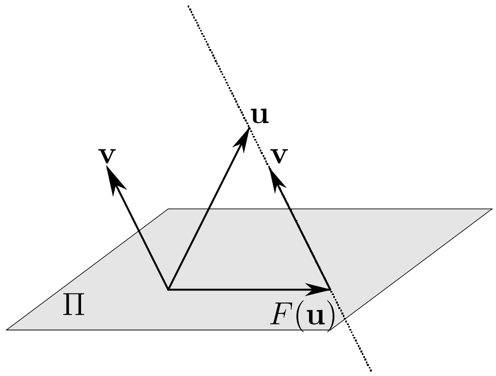
Ta fram motsvarande samband för $F(\mathbf{v})$ och $F(\mathbf{n})$.

(d) Vi har nu tre samband och tre obekanta, $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$, $F(\mathbf{e}_3)$. Lös ut dessa som linjärkombinationer av $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ och skriv $F(\mathbf{e}_i)$ på formen $\underline{\mathbf{e}}\,X_i$.

(e) Skriv upp matrisen.

7.3.13. Samma som 7.3.12 men med F = spegling i planet.

7.3.14. Gör som i 7.3.12 från (b) och framåt (samma plan Π men byt $\mathbf{n}$ mot $\mathbf{v}$ nedan) med F som sned projektion längs riktningen $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ (se figur).



7.4 Basbyte

7.4.1. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ har matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inför en ny bas $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestäm F:s matris i basen $\underline{\mathbf{f}}$. Tolka och beskriv i ord vad F gör med vektorerna i $\mathbb{R}^2$. (se **Sats 7.4.1**, sid 178)

7.4.2. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som i standardbasen har matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inför en ny bas (se **Sats 7.4.1**, sid 178)

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i basen $\underline{\mathbf{f}}$. Tolka och beskriv i ord vad F gör med vektorerna i $\mathbb{R}^3$.

7.4.3. Samma avbildning som i 7.3.12. Tänk ut en bas i vilken matrisen får ett mycket enkelt utseende (se 7.3.7 (b)). Beräkna, med hjälp av basbytesformeln, matrisen i standardbasen. (se **Exempel 7.4.3**, sid 179)

7.4.4. Samma avbildning som i 7.3.14. Tänk ut en bas i vilken matrisen får ett mycket enkelt utseende. Beräkna, med hjälp av basbytesformeln, matrisen i standardbasen. (se **Exempel 7.4.3**, sid 179)

7.4.5. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ av

$$F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Bestäm F:s matris i basen $\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$. Ange därefter, utan att räkna, $F(\mathbf{f}_1)$, $F(\mathbf{f}_2)$ och $F(\mathbf{f}_3)$ uttryckta i basen $\underline{\mathbf{f}}$.

7.4.6. Betrakta lösningsrummet $\mathbb{W} = \{\underline{\mathbf{e}}\,X \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ och sätt $\mathbf{f}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{g}_1 = (2, 1, -1)$ och $\mathbf{g}_2 = (1, 2, 1)$.

(a) Verifiera att $\underline{\mathbf{f}}$ och $\underline{\mathbf{g}}$ är baser i $\mathbb{W}$.

(b) Antag att $F\colon \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ ges av matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

relativt basen $\underline{\mathbf{f}}$. Bestäm matrisen relativt basen $\underline{\mathbf{g}}$.

7.5 Värderum och nollrum

7.5.1. Beskriv värderum och nollrum till följande avbildningar. (se **Exempel 7.5.3**, sid 180)

(a) $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonala projektion på ett plan, genom origo, i rummet,

(b) $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s ortogonala projektion på en linje, genom origo, i rummet,

(c) $F\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, $F(p) = p''$,

(d) $F\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$, $F(p) = \displaystyle\int_0^x p(t)dt$,

(e) $F\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, $F(p(x)) = 2p(x) - x \cdot p'(x)$.

7.5.2. Finns det någon linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ som uppfyller

(a) $N(F) = [(0, 1, 0)]$ och $V(F) = \{X \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,

(b) $N(F) = \{\mathbf{0}\}$ och $V(F) = \{X \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1\}$,

(c) $N(F) = \{X \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ och $V(F) = [(0,1,0,0)]$

Om det inte finns någon, motivera varför. Om det finns, ge ett exempel.

7.5.3. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som i standardbasen ges av matrisen (se **Exempel 7.5.5**, sid 181)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Beskriv $V(F)$ både som hölje (med så få element som möjligt) och som lösningsrum.

(b) Verifiera att matrisens kolonner uppfyller ekvationen som definierar lösningsrummet.

(c) Verifiera att $(11, 7, -3) \in V(F)$.

(d) Ange *alla* vektorer i definitionsmängden ($\mathbb{R}^3$) som avbildas på $(11, 7, -3)$.

(e) Skriv lösningen i (d) på formen $X = X_p + tX_h$. Beräkna AX_p och AX_h. Kommentera resultatet.

(f) Ange en bas för $N(F)$ samt dess dimension.

7.5.4. Bestäm baser för $N(F)$ och $V(F)$ till den linjära avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen ges av matrisen (se **Exempel 7.5.5**, sid 181)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

I deluppgift (b) och (c) ovan, skriv $V(F)$ som ett lösningsrum och verifiera att matrisens kolonner satisfierar respektive ekvationer (varför inte i (a)?).

7.5.5. Avbildningarna $F, G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbaserna för respektive rum av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Har $N(F)$ och $N(G)$ något gemensamt element $\neq \mathbf{0}$?

(b) Har $V(F)$ och $V(G)$ något gemensamt element $\neq \mathbf{0}$?

7.5.6. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ av

$$F\left(\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 - 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F:s matris i standardbasen samt baser för F:s nollrum respektive värderum. (se **Exempel 7.5.5**, sid 181)

7.5.7. Konstruera en matris som definierar en avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som har

$$N(F) = [(-4, 1, 1)] \quad \text{och} \quad V(F) = [(2, 1, 1), (6, 1, 2)].$$

7.6 Sammansatta avbildningar

7.6.1. Låt $F, G\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ vara linjära avbildningar. Visa att

(a) $N(F)\subset N(F^2)$, (b) $V(F^2)\subset V(F)$,

(c) $N(F)\cap V(F) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow N(F) = N(F^2)$ och $V(F^2) = V(F)$,

(d) $N(G)\subset N(F\circ G)$, (e) $V(F\circ G)\subset V(F)$.

7.6.2. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestäm baser för

$$N(F),\quad V(F),\quad N(F)\cap V(F),\quad N(F^2),\quad V(F^2).$$

Går det att, i något av fallen, hitta en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av element ur $N(F)$ och $V(F)$?

7.6.3. (a) Bestäm A^2 ($= A\cdot A$) då

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$. Sätt $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ så att $\mathbf{e}_i = \underline{\mathbf{e}}\,X_i$. För $\alpha = 60^\circ$, rita i samma koordinatsystem vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\underline{\mathbf{e}}\,AX_1$ och $\underline{\mathbf{e}}\,AX_2$. Hur förhåller sig $\underline{\mathbf{e}}\,AX_i$ till $\mathbf{e}_i$?

(c) Bestäm A^n, $n = 3, 4, \ldots$.

7.6.4. Avbildningarna $F\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ och $G\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ ges i standarbaserna för de inblandade rummen av matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{resp} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm definitionsrum och bildrum samt matrisen till $F\circ G$. Är $G\circ F$ definierad?

7.6.5. Avbildningarna $F\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ och $G\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ ges i standarbaserna av

$$F(\underline{\mathbf{e}}\,X) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{resp} \quad G(\underline{\mathbf{e}}\,Y) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \\ y_2 + y_3 + y_4 \\ y_2 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Visa att $G = F^{-1}$.

7.6.6. Låt $F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ vara en linjär avbildning sådan att $\dim V(F) = 1$ och $N(F)\cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$. Visa att det finns ett tal $k \neq 0$ så att $F\circ F = k\cdot F$.

7.6.7. Antag att $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = 4$ är en linjär avbildning sådan att avbildningsmatrisen A i någon bas har egenskapen att $A^4 = 0$ medan $A^3 \neq 0$. Bestäm $\dim V(F)$.

7.6.8. I uppgift 7.3.6 bestämdes matriserna relativt standardbasen i $\mathbb{P}_3$ för avbildningarna $F, G: \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ där $F(p(x)) = \dfrac{dp}{dx}$ och $G(p(x)) = \dfrac{d^2p}{dx^2}$. Låt A vara matrisen till F och B matrisen till G. Beräkna A^2 och förklara ditt resultat.

7.6.9. Betrakta underrummet

$$\mathbb{U} = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{R}^4$$

Låt $P: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ och $P_\perp: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$ resp $\mathbb{U}^\perp$. Kalla, relativt standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$, P:s matris A och $P_\perp$:s matris $A_\perp$.

(a) Bestäm A och $A_\perp$.

(b) Bestäm nollrum och värderum till P resp $P_\perp$

(c) Beräkna A^2, $A_\perp^2$, $A + A_\perp$, $A_\perp A$ och $AA_\perp$.

(d) Förklara resultatet.

7.7 Isometriska och symmetriska avbildningar

7.7.1. Givet en höger-ON-bas rummet. Nedanstående matriser definierar linjära avbildningar i rummet. Beskriv geometriskt vad dessa gör och ange ifall avbildningen är symmetrisk, isometrisk eller ingetdera.

(a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos v&-\sin v\\0&\sin v&\cos v\end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\frac{\pi}{3}&\sin\frac{\pi}{3}\\0&\sin\frac{\pi}{3}&-\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$.

7.7.2. Låt $\underline{\mathbf{e}}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

(a) Ange matrisen för den linjära avbildning, F, som byter plats på $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ (RITA!).

(b) Bestäm (om möjligt) vektorer $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ sådana att $F(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$ och $F(\mathbf{f}_2) = -\mathbf{f}_2$.

(c) Välj $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ som bas. Ange matrisen till F i denna bas och beskriv verkan av F geometriskt.

7.7.3. Låt $\underline{\mathbf{f}}$ vara en höger ON-bas i $\mathbb{R}^3$. Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av att F vrider varje $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ vinkeln v moturs kring $\mathbf{f}_1$. Ange F:s matris relativt basen $\underline{\mathbf{f}}$. Rita en figur som beskriver situationen.

7.7.4. Samma som 7.7.3 men $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$:s spegelbild i planet med $\mathbf{f}_1$ som normal.

7.7.5. Låt F vara som i 7.7.4. Ge en formel för hur $F(\mathbf{u})$ beräknas ur $\mathbf{u}$ och $\mathbf{f}_1$. Låt $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\,X$ och $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,Y_1$. Översätt denna formel till matrisoperationer och ange F:s matris uttryckt med hjälp av Y_1 och $I =$ enhetsmatrisen. Kontrollera din formel genom att använda den i uppgift 7.3.13.

7.7.6. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Beskriv verkan av F geometriskt. (se **Sats 7.7.2**, sid 191 och **Exempel 7.7.7**, sid 195)

7.7.7. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och antag att $F\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ är en symmetrisk linjär avbildning. Visa att $V(F)^{\perp} = N(F)$.

7.7.8. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning som avbildar $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ på nollelementet. Bestäm avbildningens matris då man vet att $V(F)$ och $N(F)$ är ortogonala mot varandra, $|F(\mathbf{e}_i)| = 1$, $i = 1, 2, 3$ och att bilden av $\mathbf{e}_1$ har negativ $\mathbf{e}_3$-koordinat.

7.7.9. Vilka av nedanstående matriser är matriser i standardbasen för lämpligt $\mathbb{R}^n$, till någon isometrisk alternativt symmetrisk avbildning:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, (e) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.7.10. Vilka isometrier är även symmetriska?

7.7.11. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har i basen

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrisen} \quad A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att F är symmetrisk ($\underline{\mathbf{e}} =$ standardbasen i $\mathbb{R}^3$). (se **Sats 7.7.14**, sid 198)

7.7.12. Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$ och $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ en ON-bas i $\mathbb{U}$. Definiera $P\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ genom

$$P(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}|\mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (\mathbf{u}|\mathbf{e}_p)\,\mathbf{e}_p.$$

(a) Visa att P är en linjär avbildning.

(b) Visa att P är symmetrisk, d v s att $(P(\mathbf{u})|\mathbf{v}) = (\mathbf{u}|P(\mathbf{v}))$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$.

(c) Visa att $P^2 = P \circ P = P$.

(d) Bestäm $N(P)$ och $V(P)$.

(e) Vad kallas en avbildning med ovanstående egenskaper?

7.7.13. Den linjära avbildningen F har matrisen

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

i standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Inför en ny bas bestående av vektorer ur $N(F)$ och $V(F)$. Ange matrisen för F i din nya bas. Tolka F geometriskt.

7.7.14. Bestäm den geometriska betydelsen av de avbildningar som ges av matriserna nedan. Fundera en stund innan du börjar räkna så kanske du slipper räkna i några av fallen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

(d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, (e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

7.7.15. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av matrisen

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 7 & -4 & 4 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

i standardbasen. Visa att F är en isometri och ge en fullständig geometrisk beskrivning. (se **Sats 7.7.2**, sid 191 och **Exempel 7.7.7**, sid 195)

7.7.16. Bestäm den geometriska betydelsen av de avbildningar som ges av matriserna

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.7.17. Låt F vara den vridning med minsta vridningsvinkel som avbildar $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ på en vektor lika riktad med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Bestäm $F(\mathbf{e}_3)$ genom att följa nedanstående.

(a) I vilket plan sker vridningen?

(b) Bestäm vridningsaxel och vridningsvinkel. Hur blir vinkeln orienterad i förhållande till ditt val av vridningsaxel?

(c) Fyll ut till "rätt" höger ON-bas, $\underline{\mathbf{f}}$. Hur blir $A_{\underline{\mathbf{f}}}$?

(d) Var hittar du $F(\mathbf{e}_3)$?

7.8 Area- och volymsskala

7.8.1. En triangel i planet har hörn i origo, $(1, 0)$ och (a, b), $b \neq 0$. Ange matrisen för en linjär avbildning som avbildar de två förstnämnda hörnen på sig själva och (a, b) på en punkt sådan att bildtriangeln blir

(a) likbent och rätvinklig med den räta vinkeln vid origo,

(b) liksidig.

Beräkna kvoten mellan arean av bildtriangeln och den ursprungliga triangeln samt avbildningsmatrisens determinant. Vad ser du?

7.8.2. Betrakta parallellogrammen med hörn i origo, $(1, 3)$, $(4, 2)$ och $(5, 5)$. Ange en linjär avbildning som avbildar parallellogrammen på en axelparallell kvadrat med sida 1. Bestäm arean av parallellogrammen. (se **Sats 7.8.1**, sid 201)

7.8.3. Betrakta en tetraeder med hörn i origo, $(1, 3, 2)$, $(4, 3, 1)$ och $(5, 5, 2)$. Ange en linjär avbildning som avbildar tetraedern på en annan tetraeder där tre av dess sidoytor ligger i koordinatplanen, d v s i planen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$. Bestäm volymen av tetraedern (den ursprungliga) samt ange ekvationen för det plan som innehåller den fjärde sidoytan. (se **Sats 7.8.1**, sid 201)

8 Spektralteori

8.1 Egenvärden och egenvektorer

8.1.1. Låt $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara ett ON-system i rummet. Bestäm egenvärden och egenvektorer för den linjära avbildning som beskriver (se **Exempel 8.1.4**, sid 206)

(a) ortogonal projektion i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,

(b) spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$,

(c) vridning 90° kring $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$,

(d) vridning 180° kring $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

8.1.2. Antag att $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Vilka av följande vektorer är egenvektorer?

$$(1, -1), (-2, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 5)$$

Ange egenvärdet. Bestäm alla egenvektorer. (se **Exempel 8.1.6**, sid 206)

8.1.3. Verifiera att vektorerna $(2, -1, 1)$ och $(0, 1, 0)$ är egenvektorer till avbildningen med matris

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vad har de för egenvärden? (se **Exempel 8.1.6**, sid 206)

8.1.4. Verifiera att vektorerna $(-2, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ och $(3, -2, 1)$är egenvektorer till avbildningen med matris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vad har de för egenvärden? (se **Exempel 8.1.6**, sid 206)

8.1.5. En linjär avbildning $F\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} < \infty$ har i någon ON-bas matrisen A. Vidare gäller att $A^t A = -A$. Visa att F inte kan ha andra egenvärden än 0 och -1.

8.2 Sekularpolynomet

8.2.1. Bestäm sekularpolynomet samt dess nollställen för (se **Exempel 8.2.4**, sid 209)

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.2.2. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som utför en spegling i linjen $2x - 3y = 0$.

(a) Bestäm egenvärden och egenvektorer genom att tänka, inte räkna.

(b) Bestäm matrisen till F och bestäm egenvärden och egenvektorer genom att räkna.

8.2.3. Avgör vilka av nedanstående som är matriser (i standardbasen) till en diagonaliserbar avbildning:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

I vilka av fallen måste du beräkna egenvektorerna för att kunna svara på frågan? (se **Exempel 8.2.5**, sid 210)

8.2.4. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen (se **Exempel 8.2.4**, sid 209)

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -14 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till F. Ange också, i vart och ett av fallen, egenvärdets multiplicitet m sett som nollställe till sekularpolynomet samt dimensionen d av det tillhörande egenrummet. Ange om det i något av fallen finns en bas av egenvektorer.

8.2.5. Bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen ges av matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.2.6. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges i standardbasen av matrisen (se **Sats 8.2.8**, sid 212 och **Exempel 8.2.10**, sid 212)

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm dess egenvärden och egenvektorer.

(b) Bestäm en bas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till F.

(c) Ange transformationsmatrisen som förmedlar basbytet till egenbasen och bestäm matrisen relativt egenbasen, $A_{\underline{\mathbf{f}}}$.

(d) Bestäm $A_{\underline{\mathbf{e}}}^5$, $\left(A_{\underline{\mathbf{e}}}^{-1}\right)^3$, $A_{\underline{\mathbf{e}}}^{100}$ och $A_{\underline{\mathbf{e}}}^n$.

(e) Visa att det finns ett underrum $\mathbb{V}$ av $\mathbb{R}^2$ sådant att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} F^n(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

(f) Låt $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \notin \mathbb{V}$. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} F^n(\mathbf{u}).$$

Gränsvärdet är parallellt med en viss riktning oberoende av $\mathbf{u}$. Vilken? Förklara varför det blir så. Rita i samma koordinatsystem, t ex $\dfrac{1}{3^n}F^n(\mathbf{e}_1)$ och $\dfrac{1}{3^n}F^n(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ för $n = 1, 2, 3$.

8.2.7. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ av matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm egenvärden och egenvektorer.

(b) Finns det någon bas bestående av egenvektorer?

(c) Bestäm en ON-bas som innehåller så många egenvektorer som möjligt och bestäm F:s matris i denna bas.

(d) Gör en geometrisk tolkning genom att titta på bilden av enhetskvadraten i det koordinatsystem som ges av den nya basen.

8.2.8. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -4 & 1 & b \\ -1 & -1 & c \end{pmatrix}$$

där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Om F vet man att $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3)$ är en egenvektor med egenvärde 2. Bestäm a, b, c och samtliga egenvärden och egenvektorer till F. (se **Definition 8.1.1**, sid 205)

8.2.9. Låt $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en vridning vinkeln v kring en given vektor $\mathbf{u}$, moturs sett från toppen av $\mathbf{u}$.

(a) Ange F:s matris i "rätt" bas. Vad är "rätt" bas i detta fall?

(b) Visa att sekularekvationen har tre olika rötter, alla med belopp 1.

(c) Bestäm de två komplexa rötternas argument. Vad ser du?

8.2.10. (a) Visa att varje linjär avbildning $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = 3$ har minst en egenvektor.

(b) Ge exempel på en linjär avbildning $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = 2$ som saknar egenvektorer.

8.2.11. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en icke-diagonaliserbar linjär avbildning med ett reellt egenvärde λ_1 (d v s λ_1 är ett nollställe av multiplicitet 2 till sekularpolynomet men dess egenrum har endast dimension 1). Låt $\mathbf{f}_1$ vara en egenvektor med egenvärde λ_1 och $\mathbf{f}_2$ en godtycklig vektor sådan att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ är en bas för $\mathbb{R}^2$.

(a) Låt A vara F:s matris i någon bas och antag att $\det A = \lambda_1^2$. Visa att F:s matris i basen $\underline{\mathbf{f}}$ har följande utseende:

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Låt B och C vara två godtyckliga $n \times n$-matriser. Ange ett tillräckligt villkor för att

$$(B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k} C^k,$$

d v s för att binomialsatsen skall gälla.

(c) Beräkna A^N, $N \in \mathbb{N}$. (**Ledning:** Skriv $A_{\underline{\mathbf{f}}}$ som en summa så att (b) kan utnyttjas.)

8.2.12. (a) Låt $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ och bestäm A:s sekularpolynom $p(\lambda)$. Visa att $p(A)$ är nollmatrisen.

(b) Uttryck A^{-1} med hjälp av identitetsmatrisen I och A själv.

8.3 Symmetriska avbildningar och spektralsatsen

8.3.1. Avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen av matrisen (se **Sats 8.3.5**, sid 215)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ange en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F. Hur kan du enkelt avgöra om du har en höger eller vänster ON-bas?

8.3.2. Avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges av matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i ON-basen $\underline{\mathbf{e}}$. Ange en ON-bas bestående av egenvektorer.

8.3.3. Antag att $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ i standardbasen har matrisen

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en ON-bas av egenvektorer till F och ange F:s matris i denna egenbas.

(b) Skriv de olika egenrummen som lösningsrum till ekvationssystem.

(c) Om ditt svar i (a) ej ser ut som svaret i facit, fråga inte din lärare utan kontrollera om ditt svar är rätt.

8.3.4. Låt $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ och $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Definiera $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ genom

$$F(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{a})\, \mathbf{b} + (\mathbf{u} \bullet \mathbf{b})\, \mathbf{a}.$$

(a) Verifiera att F är symmetrisk och linjär.

(b) Beräkna $F(\mathbf{a})$, $F(\mathbf{b})$ och $F(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

(c) Ange matrisen till F i ON-basen $\mathbf{f}_1 = \dfrac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$, $\mathbf{f}_2 = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{f}_3 = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

(d) Utgående från resultatet i (b), gissa vilka egenvektorer F har och verifiera din hypotes.

(e) Ange egenvärdena samt matrisen till F i en ON-bas $\underline{\mathbf{g}}$ av egenvektorer.

(f) Faktorisera matrisen i egenbasen i matriser vars motsvarande avbildning har kända egenskaper (t ex matrisen för en ortogonalprojektion etc).

(g) Beskriv F geometriskt.

8.3.5. En symmetrisk linjär avbildning $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har egenvärdena 0, 1 och 7. Vektorerna som i standardbasen har koordinaterna $(1,1,1)$ och $(1,-2,1)$ är egenvektorer till egenvärdena 0 respektive 1. Bestäm en egenvektor till egenvärdet 7 samt F:s matris i standardbasen. (se **Korollarium 8.3.3**, sid 214)

8.3.6. Antag att $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är symmetrisk och att dess värderum spänns upp av $(1,0,1)$ och $(0,1,0)$ som är egenvektorer med egenvärde 1. Bestäm F:s matris i standardbasen.

8.3.7. Låt $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara ortogonal projektion på

$$\mathbb{W} = [(0,1,-1,0),\ (1,1,1,1),\ (1,3,1,3)].$$

Ange F:s egenvärden och egenvektorer. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till F.

8.3.8. Antag att F är spegling i planet $x_2 - x_3 = 0$ följd av spegling i planet $x_1 - x_3 = 0$. Beräkna F:s egenvärden och egenvektorer. (se **Sats 7.6.2**, sid 186)

8.3.9. (a) Bestäm egenvärden, en bas av egenvektorer samt avbildningsmatris i standardbasen för $\mathbb{R}^2$ till den linjära avbildning $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbildar $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ på dess spegelbild i linjen $3x - 2y = 0$.

(b) Rita i en figur, noggrant och skalenligt in linjen $3x - 2y = 0$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2)$ samt egenbasen du räknat fram i (a) (välj skala förnuftigt!).

8.3.10. Bestäm en matris B sådan att $B^2 = A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

8.3.11. Den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i standardbasen $\underline{\mathbf{e}}$ av matrisen

$$A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en ON-bas $\underline{\mathbf{f}}$ av egenvektorer till F, ange matrisen till F i basen $\underline{\mathbf{f}}$ och tolka F geometriskt.

8.3.12. Låt $\mathbb{E}$, $\dim \mathbb{E} < \infty$ vara ett euklidiskt rum och $F\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ en linjär avbildning som i en ON-bas har matrisen A. Antag att

$$A^t A = 2A.$$

(a) Visa att F är symmetrisk.

(b) Visa att F inte kan ha andra egenvärden än 0 och 2.

(c) Beskriv vad F gör med vektorerna i $\mathbb{E}$.

8.3.13. Låt $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en inverterbar linjär avbildning som i standardbasen har matrisen A. Låt G vara den linjära avbildning som i samma bas ges av matrisen $A^t A$.

(a) Visa att G är inverterbar och symmetrisk.

(b) Visa att $G(\mathbf{u}) \bullet \mathbf{u} \geq 0$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. (En avbildning med denna egenskap kallas *positiv*.)

(c) Visa att det finns en inverterbar symmetrisk linjär avbildning P med positiva egenvärden sådan att $P^2 = G$.

(d) Visa att avbildningen U definerad som $U = FP^{-1}$ är isometrisk (d v s $F = UP$, kallas *polärfaktoriseringen* av F).

9 Tillämpningar av spektralteori

9.1 Kvadratiska former

9.1.1. Avgör vilka av nedanstående funktioner som är kvadratiska former:
(se **Definition 9.1.1**, sid 221)

(a) $f(x, y, z) = xy + y^2 + z^2 + 3yz$ i $\mathbb{R}^3$,

(b) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 1$ i $\mathbb{R}^2$,

(c) $f(x, y, z) = x^2 - 3z^2 + y$ i $\mathbb{R}^3$,

(d) $f(x, y) = x^2 - y^2 - 6xy$ i $\mathbb{R}^2$,

(e) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - 6xy$ i $\mathbb{R}^3$,

(f) $f(x, y, z) = (x - 2y + 3z)^2$ i $\mathbb{R}^3$,

Ange också den symmetriska matris som hör till de som är kvadratiska former. (se **Exempel 9.1.2**, sid 221)

9.1.2. Bestäm, genom kvadratkomplettering, signatur, rang och teckenkaraktär för den kvadratiska formen (se **Exempel 9.1.5 Alt2**, sid 223 och **Sats 9.1.9**, sid 226)

(a) $Q(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$,

(b) $Q(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$.

I (a), bestäm nya koordinater x', y' sådana att uttrycket för Q i dessa koordinater endast innehåller rena kvadrattermer. Ange också uttrycket för Q i dessa koordinater.

9.1.3. Låt $Q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 6xy + 3xz + 7yz$. Bestäm signatur, rang och teckenkaraktär genom att successivt kvadratkomplettera (se **Exempel 9.1.5 Alt2**, sid 223 och **Sats 9.1.9**, sid 226)

(a) först med avseende på x, därefter y och sist z,

(b) först med avseende på y, därefter x och sist z.

(c) Kommentera resultatet

9.1.4. Bestäm teckenkaraktären för den kvadratiska formen $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$Q(\underline{\mathbf{e}}\, X) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$$

genom att (se **Exempel 9.1.5**, sid 223)
(a) kvadratkomplettera, (b) beräkna egenvärdena.

9.1.5. Diagonalisera den kvadratiska formen Q på $\mathbb{R}^3$, som i en ON-bas $\underline{\mathbf{e}}$ ges av (se **Exempel 9.1.10**, sid 226)

(a) $x_1^2 + 2x_2^2$,

(b) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_3$,

(c) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

(d) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

och bestäm dess teckenkaraktär. Ange också en ny ON-bas i vilken den kvadratiska formen har diagonalframställning.

9.1.6. Bestäm teckenkaraktär, rang och signatur för nedanstående kvadratiska former på $\mathbb{R}^3$:

(a) $Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (x+y+z)^2 + (x-y+z)^2 - z^2$,

(b) $Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = (x+y+z)^2 - (x+z)^2 + (x-y+z)^2$,

(c) $Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = 6(x+y+z)^2 - (x+4y+6z)^2 + (4y+5z)^2 + 12z^2$.

(d) Förklara varför tröghetslagen, Sats 9.1.6, sid 225, inte går att använda direkt i (b) och (c).

9.1.7. Bestäm största och minsta värde av $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ då $Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = x^2 + 4xy + 3y^2$ och (a) $|\mathbf{u}| = 1$, (b) $|\mathbf{u}| = 2$. (se **Sats 9.1.11**, sid 227)

9.1.8. Den kvadratiska formen $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ges av $Q(\mathbf{u}) = Q(\underline{\mathbf{e}}\,X) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz$.

(a) Bestäm största och minsta värdet av Q på enhetssfären. (se **Exempel 9.1.12**, sid 228)

(b) Ange de punkter i vilka dessa antas.

9.1.9. Bestäm största möjliga vinkel mellan vektorerna

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

under villkoret att $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

9.1.10. Betrakta den kvadratiska formen $Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - x_3^2$. Bestäm ett tvådimensionellt underrum $\mathbb{W}$ av $\mathbb{R}^3$ sådant att $Q(\mathbf{x}) < 0$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{W}$ där $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

9.1.11. Bestäm största och minsta värde av den kvadratiska formen

$$Q = 4x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_3x_4 \quad \text{då} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

och ange i vilka punkter extremvärdena antas.

9.1.12. Bestäm för varje reellt a teckenkaraktären för den kvadratiska formen $Q = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + ayz$.

9.2 Andragradskurvor

9.2.1. Vilken typ av andragradskurva i $\mathbb{E}^2$ definieras av
(a) $2x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$, (b) $2x^2 + 6xy - 4y^2 = 1$.

9.2.2. Visa att andragradskurvan $x^2 - 6xy - 7y^2 = 1$ är en hyperbel. Ange dess asymptoter och utnyttja dessa till att skissera hyperbelkurvan. (se Figur 9.1, sid 229)

9.2.3. Visa att ekvationen

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 3$$

definierar en ellips i $\mathbb{E}^2$. Beräkna ellipsens symmetriaxlar, halvaxellängder och dess area. Skissera ellipsen. (se **Exempel 9.2.2**, sid 229 och **Exempel 9.2.3**, sid 230))

9.2.4. Ange en ny ON-bas i vilken nedanstående andragradskurvors symmetriaxlar sammanfaller med de nya koordinataxlarna. Ange vilken typ av kurva det är samt, i de nya koordinaterna, kurvornas ekvationer på standardform.

(a) $9x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 10x_1 - 20x_2 = 5$,

(b) $2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1 - 8x_2 = -14$,

(c) $4x_1^2 + 25x_2^2 - 20x_1x_2 - 15x_1 - 6x_2 = 0$.

9.2.5. Kurvan Γ har ekvationen $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 = 1$.

(a) Bestäm kurvans ekvation på huvudaxelform, dvs med enbart kvadrattermer.

(b) Ange en rotation av koordinatsystemet som överför ekvationen till en sådan form.

(c) Bestäm de punkter på kurvan som ligger närmast origo. (se **Exempel 9.2.3**, sid 230)

9.2.6. Visa att ekvationen

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 6x - 4y + \frac{10}{3} = 0$$

definierar en hyperbel samt bestäm dess medelpunkt. (se **Exempel 9.2.4**, sid 230)

9.2.7. Bestäm medelpunkten till kurvan i uppgift
(a) 9.2.4 (a), (b) 9.2.4 (b). (se **Exempel 9.2.4**, sid 230)

9.2.8. Nedanstående ekvationer beskriver varsin kurva i planet:

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 12, \qquad 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 13.$$

Ange vilken typ av kurva respektive ekvation beskriver samt bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna.

9.2.9. Låt $k > 0$ och betrakta ekvationerna

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{och} \quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 = k.$$

(a) Vilken typ av kurva definieras av de respektive ekvationerna?

(b) För varje värde på $k > 0$, bestäm antalet skärningspunkter mellan kurvorna.

(c) Rita *tydliga* figurer som beskriver de olika fall (med avseende på antalet skärningspunkter för olika k-värden) som kan uppkomma i (a).

9.2.10. Skissera kurvan

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = 1$$

och linjen $x_1 + 3x_2 = 0$ i ett väl valt ON-system. Avgör om linjen skär kurvan. (ON-system)

9.2.11. Betrakta kurvan Γ: $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 2$ och linjen L: $x_1 + x_2 = 3\sqrt{2}$.

(a) Bestäm ekvationen till Γ på huvudaxelform och bestäm ekvationen för L i samma koordinatsystem.

(b) Bestäm minsta avståndet mellan L och Γ.

(c) Ange koordinaterna för motsvarande punkter på linjen och kurvan i de ursprungliga x_1x_2-koordinatsystemet.

9.2.12. (a) Visa att ekvationen $6x^2 + 4xy + 3y^2 = 2$ definierar en ellips.

(b) Ange vilka punkter på ellipsen som ligger närmast respektive längst ifrån origo samt dessas avstånd till origo.

9.3 Andragradsytor

9.3.1. Avgör vilken typ av yta i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen (se Figur 9.4, sid 233 och **Exempel 9.3.1**, sid 236)

(a) $6x^2 + y^2 + z^2 + 12xz = 1$,

(b) $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$,

(c) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 5$,

(d) $9x^2 + y^2 - 36x - z = 0$,

(e) $2xy + z = 0$.

9.3.2. Betrakta ytan $3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\sqrt{3}\,x_1x_3 = 1$ och låt d vara avståndet från en punkt på ytan till origo. Vad är det för sorts yta och vilka värden kan d anta?

9.3.3. I uppgift 9.3.1 (a)-(c), ange de punkter på ytan som ligger närmast origo och, om sådana finnes, de som ligger längst ifrån. (se **Exempel 9.2.3**, sid 230)

9.3.4. Visa att ekvationen

$$11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz + 4x - 4y - 4z = 6$$

definierar en ellipsoid. Ange dess medelpunkt, halvaxellängder och volym.

9.3.5. Klassificera de klassiska andragradskurvorna och andragradsytorna efter teckenkaraktären på den kvadratiska form som hör ihop med dem.

9.3.6. Bestäm alla gemensamma punkter till ytorna

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1, \tag{9.1}$$

$$9x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 = 1. \tag{9.2}$$

9.3.7. Samma som uppgift 9.3.6 men högerledet i (9.2) ersätts av ett tal k: $0 < k \neq 1$.

9.4 System av differentialekvationer

9.4.1. (a) Bestäm den allmänna lösningen till nedanstående system av differentialekvationer (se **Exempel 9.4.5**, sid 240)

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases} \tag{9.3}$$

(b) Bestäm den lösning till (9.3) som uppfyller $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$.

(c) Sätt $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ och $\mathbb{L} = \{\underline{\mathbf{e}}\, X(t) \in \mathbb{R}^2\colon x_1(t) \wedge x_2(t)$ är lösningar till (9.3)$\}$.

Visa att $\mathbb{L}$ är ett underrum av rummet av deriverbara funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^2$, d v s om $X_1(t)$ och $X_2(t)$ är lösningar till (9.3) så satisiferas ekvationen också av:

$$\text{(i)}\ X_1(t) + X_2(t),\ \ \text{(ii)}\ \lambda X_1(t),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestäm en bas i $\mathbb{L}$.

(d) Bestäm den lösning till (9.3) som uppfyller $x_1(0) = x_2(0) = 0$

9.4.2. Lös nedanstående system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(t) \to 0 \text{ då } t \to \infty \\ x_1(0) = 2 \end{cases}.$$

9.4.3. (a) Bestäm den allmänna lösningen till nedanstående system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2 \end{cases} \tag{9.4}$$

(b) Bestäm den lösning till (9.4) som uppfyller $x_1(0) = 2$, $x_2'(0) = 1$.

9.4.4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = -x_1 + x_3 \end{cases}.$$

9.4.5. Ekvationen $y'' - y' - 6y = 0$ är en andra ordningens homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

(a) Lös den på vanligt sätt (som i Ma E).

(b) Skriv om till 1:a ordningens system genom att sätta $x_1 = y$, $x_2 = y'$.

(c) Lös systemet.

(d) Identifiera, $y = x_1$.

(e) Jämför karakteristiska polynomet till ursprungliga ekvationen med sekularpolynomet till systemets matris. Vad ser du?

9.4.6. (a) Lös systemet (se **Exempel 9.4.8**, sid 242)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2 + e^t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}.$$

(b) Lös samma system som i (a) fast utan begynnelsevillkor och med e^t ersatt av e^{kt}. För två värden på k skiljer sig lösningsstrukturen väsentligt från de övriga fallen. Vilka?

9.4.7. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$X''(t) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X(t).$$

9.4.8. Lös det icke-diagonaliserbara systemet

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ledning: Byt till ny bas där första basvektorn är egenvektor. Då fås ett system där en ekvation är fri. Lös denna och sätt in i den andra.

9.5 Matrisvärda exponentialfunktionen

9.5.1. Bestäm e^{At} för (se **Exempel 9.5.7**, sid 247)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

och utnyttja detta till att lösa (9.3) i 9.4.1 med begynnelsevillkoren i 9.4.1 (b).

9.5.2. För diagonaliserbara matriser A kan man definiera $\sin At$ och $\cos At$ på samma sätt som den matrisvärda exponentialfunktionen e^{At} definieras i avsnitt 9.5.

(a) Visa med denna definition att (jämför sats 9.5.4)

$$\frac{d}{dt}\sin At = A\cos At \quad \text{och} \quad \frac{d}{dt}\cos At = -A\sin At$$

(b) Visa på samma sätt som i sats 9.5.2 att $\sin At$ och $\cos At$ är entydigt bestämda av

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sin At = A\cos At, \qquad \sin A{\cdot}0 = 0\text{-matrisen} \quad \text{och} \\ &\frac{d}{dt}\cos At = -A\sin At, \qquad \cos A{\cdot}0 = I \end{aligned}$$

(c) Visa att A, $\sin At$ och $\cos At$ kommuterar med varandra (jämför sats 9.5.5).

(d) Visa att $\sin(-At) = -\sin At$ och att $\cos(-At) = \cos At$

(e) Bestäm $\sin At$ och $\cos At$ då A är som i 9.5.1.

(f) Ersätt, i matrisen e^{At} i 9.5.1, t med it och bestäm real- och imaginärdel av den så erhållna matrisen. Vad ser du?

(g) Lös ekvationen

$$X''(t) + A^2X(t) = 0, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

9.6 Differensekvationer

9.6.1. Lös nedanstående system av differensekvationer (se **Exempel 9.6.1**, sid 248):

(a) $\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 4b_{n-1} \\ b_n = -4a_{n-1} + 13b_{n-1} \end{cases}, \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{matrix},$ (b) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} - b_{n-1} \end{cases}, \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{matrix}.$

9.6.2. I föregående uppgift, låt startvärdena a_0 och b_0 vara godtyckliga. Sätt $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ och undersök

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{(X_n)^t X_n}}.$$

Existerar gränsvärdet alltid? Hur beror gränsvärdet av startvärdena?

9.6.3. Lös differensekvationssystemet

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = -2a_{n-1} - b_{n-1} \end{cases}$$

godtyckliga startvärden, ej båda 0. Gör inledningsvis som i uppgift 9.4.8. För att beräkna A^n, utnyttja uppgift 8.2.11 till att beräkna potenser av matrisen i nya basen. Byt tillbaka till ursprungliga basen. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{(X_n)^t X_n}}.$$

9.6.4. (a) Betrakta nedanstående linjära differensekvationer av andra ordningen (se **Exempel 9.6.2**, sid 250):

(i) $a_{n+1} = -4a_n + 12a_{n-1}$, (ii) $a_{n+1} = -4a_n - 4a_{n-1}$, (iii) $a_{n+1} = -4a_n - 5a_{n-1}$,

$a_0 = a_1 = 1$ i samtliga. Skriv om dem till system av 1:a ordningens linjära differensekvationer.

(b) Lös (i) på samma sätt som uppgift 9.6.1 och (ii) som 9.6.3.

(c) Betrakta ekvationen

$$a_{n+1} + pa_n + qa_{n-1} = 0 \tag{9.5}$$

där p och q är reella konstanter och a_0 och a_1 givna. Kalla rötterna till ekvationen

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

för λ_1 och λ_2. Visa genom insättning i (9.5) att

$$a_n = \begin{cases} A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n & \text{om } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (A_1 + n{\cdot}A_2)\lambda_1^n & \text{om } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

löser ekvationen. Kontrollera att strukturen stämmer med resultaten från (a). (Jämför också med strukturen hos lösningarna till en 2:a ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.)

(d) Gå igenom kalkylen i (a) igen. Om $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, kan ekvationen ha andra lösningar som ej kan skrivas på ovanstående sätt?

(e) Lös (a iii) genom att ansätta en lösning enligt (c).

9.6.5. Låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{och sätt} \quad \mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna (se **Sats 9.7.1**, sid 252)

$$\mathbf{u}_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n+1}(\mathbf{u})}{|F^n(\mathbf{u})|} \quad \text{och} \quad \lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{|F^{n+1}(\mathbf{u})|}{|F^n(\mathbf{u})|}.$$

(b) Beräkna $F(\mathbf{u}_0)$. Vad ser du?

Har du gjort uppgift 9.6.1 (b) har du gjort så gott som all den kalkyl du behöver.

Svar till övningarna

1.2.3. (a) T ex $x = t,\ y = 4 - 2t$ eller $x = 2 - t,\ y = 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

(b) T ex $x = \dfrac{1}{3} - 4s - 5t,\ y = 3s,\ z = 3t$ eller $x = 4s,\ y = \dfrac{1}{4} - 3s - 5t,\ z = 4t,\ s, t \in \mathbb{R}$.

(c) T ex $x_1 = 6 + 2t_1 - 3t_2 + 4t_3 - 5t_4,\ x_2 = t_1,\ x_3 = t_2,\ x_4 = t_3,\ x_5 = t_4$ eller
$x_1 = 2t_1,\ x_2 = -3 + t_1 + 3t_2 - 2t_3 + 5t_4,\ x_3 = 2t_2,\ x_4 = t_3,\ x_5 = 2t_4,\ t_1, \ldots, t_4 \in \mathbb{R}$

1.2.4. (a) $x = -2,\ y = -1$, (b) $x = -3,\ y = 2$, (c) $x = \dfrac{31}{13}, y = -\dfrac{4}{13}$.

1.2.5. (a) Lösning saknas, (b) $x = 3t,\ y = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$, (c) Lösning saknas.

1.2.6. (a) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1$, (b) $x = -1, y = 1, z = 0$.

1.2.7. (a) $x_1 = -1 + 7t,\ x_2 = 1 - 4t,\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$, (b) Lösning saknas.

1.2.8. (a) $\begin{cases} x_1 = -3 - 2s + t \\ x_2 = 4 + 3s - 8t \\ x_3 = 4 + 2s - 6t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$, $s, t \in \mathbb{R}$, (b) $\begin{cases} x_1 = -1 + 2r - t \\ x_2 = 2r - s \\ x_3 = -r \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$.

1.2.9. (a) $x = -21 + 15t,\ y = -17 + 11t,\ z = -t$, (b) lösning saknas,
(c) $x = -7,\ y = -9,\ z = 1$, (d) $x = 4,\ y = 3 + 2t,\ z = t$.

1.2.10. (a) $x_1 = 0,\ x_2 = -t,\ x_3 = 0,\ x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$,
(b) $x_1 = 1,\ x_2 = 1 - t,\ x_3 = 1 + t,\ x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$.

1.2.11. (a) (iv) $b \neq -2a$, (v) $b = -2a$ och $a \neq 5$, (vi) $a = 5$ och $b = -2a = -10$.,
(b) (i) $ab \neq 2$, (ii) $ab = 2$ och $a \neq -5$, (iii) $a = -5$ och $b = \dfrac{2}{a} = -\dfrac{2}{5}$.,
(c) (i) $a \neq 2$, (ii) $a = 2$ och $b \neq 1$, (iii) $a = 2$ och $b = 1$..

1.2.12. (a) Entydig lösning för alla $a, b, c \in \mathbb{R}$,
(b) Oändligt många lösningar om $-2a + b + c = 0$, inga lösningar om $-2a + b + c \neq 0$.

1.2.13. (a) (i) $a \neq 2$, alla $b \in \mathbb{R}$, (ii) $a = 2,\ b \neq 1$, (iii) $a = 2,\ b = 1$.

(b) Entydig lösning ($x = y = z = 0$) om $abc \neq -1$, oändligt många lösningar om $abc = -1$.

1.2.14. (a) (i) $a \neq 0$ och $a \neq 2$, alla $b \in \mathbb{R}$, (ii) $a = 0,\ b \neq 1$ eller $a = 2,\ b \neq -1$,
(iii) $a = 0,\ b = 1$ eller $a = 2,\ b \neq -1$.

(b) (i) $a \neq 0, 3$ och 5, (ii) $a = 0,\ b \neq \dfrac{1}{3}$ eller $a = 3$, alla $b \in \mathbb{R}$,
(iii) $a = 0,\ b = \dfrac{1}{3}$ eller $a = 5$, alla $b \in \mathbb{R}$..

2.2.3. $3\mathbf{u} + \mathbf{v} + 3\mathbf{w} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = -\dfrac{1}{3}\mathbf{v} - \mathbf{w},\ \mathbf{v} = -3\mathbf{u} - 3\mathbf{w},\ \mathbf{w} = -\dfrac{1}{3}\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

2.2.5. Någon av summorna $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$ eller $\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}$ är $\mathbf{0}$.

2.3.1. $\mathbf{e}_1 = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, d v s koordinatmatrisen $= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, för $\mathbf{e}_2$: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

och för $\mathbf{e}_3$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2.3.2. (a) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}$, (b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-14\\0\\4\end{pmatrix}$, (c) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$, (d) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$.

2.3.3. $\mathbf{u} = (\mathbf{v}\ \mathbf{w})\begin{pmatrix}-1/3\\-1\end{pmatrix}$, d v s koordinatmatrisen$= \begin{pmatrix}-1/3\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = (\mathbf{u}\ \mathbf{w})\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, d v s koordinatmatrisen $= \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = (\mathbf{u}\ \mathbf{v})\begin{pmatrix}-1\\-1/3\end{pmatrix}$, d v s koordinatmatrisen$= \begin{pmatrix}-1\\-1/3\end{pmatrix}$

2.3.4. $\mathbf{u} = 1\cdot\mathbf{u} + 0\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{u}\ \mathbf{v})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = 0\cdot\mathbf{u} + 1\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{u}\ \mathbf{v})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
$\mathbf{v} = 1\cdot\mathbf{v} + 0\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{v}\ \mathbf{w})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = 0\cdot\mathbf{v} + 1\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{v}\ \mathbf{w})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ så koordinatmatriserna är $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i båda fallen.

2.3.5. Ja, i båda fallen.

2.3.6. (a) ej parallella, (b) ej parallella, (c) parallella.

2.3.7. (a) $t = -\dfrac{1}{3}$, (b) går ej, (c) $t = 6$.

2.3.8. Kontrollera!

2.3.9. Ja, ty $-3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

2.3.10. Koordinatmatrisen $= \begin{pmatrix}23\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ty $\mathbf{u} = 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3)\begin{pmatrix}23\\-4\\-1\end{pmatrix}$.
Annan ordningsföljd på basvektorer ger annan ordningsföljd på koordinaterna, d v s samma siffror men 23 och -4 byter plats.

2.4.1. (a) $\overline{OC}$, (b) $\overline{AB}$, (c) $\overline{OD}$, (d) $\overline{AC}$.

2.4.2. $\overline{OM} = \dfrac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ})$

2.4.3. (a) $\overline{OA} = \underline{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overline{OB} = \underline{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\overline{OC} = \underline{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\overline{AB} = \underline{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$,
$\overline{BC} = \underline{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ och $\overline{AC} = \underline{\mathbf{u}}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$.

(b) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \mathbf{0}$ (alltid oavsett vilka koordinater punkterna har).

(c) $P = (1, 0)$ är triangelns ABC tyngdpunkt.

(d) Mittpunkten på sträckan $AB = P = (5/2, -1/2)$, $Q = (0, -1)$, $R = (1/2, 3/2)$

2.4.4. (a) $\overline{OA} = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{OB} = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overline{OC} = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{AB} = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$,

$\overline{BC} = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\overline{AC} = \underline{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \mathbf{0}$ (fortfarande).

2.5.1. (a) 3, (b) $-\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$, (c) 0 eller $-5\sqrt{3}$, (d) $3 - \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$.

2.5.2. (a) $\sqrt{12}$, (b) $4\sqrt{13}$.

2.5.4. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är kantvektorer i en parallellogram så är $\mathbf{u} \pm \mathbf{v}$ diagonalerna. Parallellogramlagen säger att kvadratsumman av diagonalernas längder är kvadratsumman av (alla fyra) sidlängderna.

2.5.5. Den är en romb, d v s dess sidor är lika långa, se uppgift 2.5.3(c).

2.5.6. (a) $\dfrac{1}{3}\mathbf{u}$, (b) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{10}\mathbf{w}$.

2.5.7. (a) $\mathbf{w} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$, (b) $\mathbf{w} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1 - \dfrac{1}{2}\mathbf{e}_2$.

2.5.8. $\mathbf{w} =$ (a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \mathbf{v}$, (b) $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}\mathbf{u} - \dfrac{7}{4}\mathbf{v}$.

2.5.9. (a) 0, (b) 0, (c) 8.

2.5.10. (a) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är ett högersystem, parvis ortogonala och $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$ och $|\mathbf{u}| = 1$

(b) Omöjligt ty om det vore sant skulle $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

2.6.1. $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = -5$, $\mathbf{u}\bullet\mathbf{w} = 4$, $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = 2$

2.6.2. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}} = \sqrt{5}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}} = \sqrt{25} = 5$, $|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}} = \sqrt{5}$

2.6.3. $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \dfrac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \arccos \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \approx 117^\circ$, $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \arccos \dfrac{4}{5} \approx 37^\circ$,

$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \arccos \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \approx 80^\circ$

2.6.4. $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 22$, $\mathbf{u}\bullet\mathbf{w} = 18$, $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = 20$

2.6.5. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}} = \sqrt{106}$, $|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}} = 3$

2.6.6. $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arccos\dfrac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \arccos\dfrac{11}{3\sqrt{159}} \approx 73^\circ, \quad \angle(\mathbf{u},\mathbf{w}) = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 35^\circ,$
$\angle(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \arccos\dfrac{20}{3\sqrt{106}} \approx 50^\circ$

2.6.7. (a) 60°, (b) 2, (c) $\mathbf{e}_2$ och $\dfrac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$, (d) Nej. Den minsta möjliga vinkel som en vektor kan bilda med både $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ är 30°.

2.6.8. Vinkeln vid $A = \arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, vinkeln vid $B = \dfrac{5\pi}{6}$, vinkeln vid $C = \arccos\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$,
$|\overline{AB}| = \sqrt{6}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{14}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{2}$.

2.6.9. (a) $\mathbf{u}_{\|\mathbf{e}_1} = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)_{\|\mathbf{e}_1} = 2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{u}_{\|\mathbf{e}_2} = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)_{\|\mathbf{e}_2} = \mathbf{e}_2,$ FÖRSTÅS!
$\mathbf{v}_{\|\mathbf{e}_1} = (3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)_{\|\mathbf{e}_1} = 3\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v}_{\|\mathbf{e}_2} = (3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)_{\|\mathbf{e}_1} = -2\mathbf{e}_2.$

(b) $\mathbf{u}_{\|\mathbf{v}} = \dfrac{4}{13}\mathbf{v}$.

(c) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\|\mathbf{v}} + \underbrace{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|\mathbf{v}})}_{\mathbf{u}_{\perp\mathbf{v}}} = \dfrac{4}{13}\mathbf{v} + \dfrac{7}{13}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

2.6.10. $\mathbf{u} = \dfrac{3}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \dfrac{1}{5}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$

2.6.11. $\left(\dfrac{13}{5}, 2, \dfrac{21}{5}\right)$ eller $\left(\dfrac{12}{5}, 1, \dfrac{14}{5}\right)$.

2.6.13. (a) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-18\\1\\7\end{pmatrix}$, (b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}7\\4\\-30\end{pmatrix}$, (c) $-2\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

2.6.14. (a) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}24\\-11\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{w} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}21\\-13\\-10\end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\2\\14\end{pmatrix}$.

2.6.16. $\dfrac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$.

2.7.1. $\dfrac{21}{2}$

2.7.2. $\sqrt{1117}$

2.7.3. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2867}$

2.7.4. $\sqrt{229}$

2.7.5. 28

2.7.6. 53

2.8.1. (a) $3x - y = -1$, (b) $x + 3y = 23$.

2.8.2. (a) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad 2x - y = 3$, $\quad y = 2x - 3$

(b) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad x + 5y = 10$, $\quad y = -\frac{1}{5}x + 2$

(c) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad x - 3y = 0$, $\quad y = \frac{1}{3}x$

2.8.3. (a) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad x + 2y = 4$, $\quad y = -\frac{1}{2}x + 2$

(b) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad 5x - y = -2$, $\quad y = 5x + 2$

(c) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $\quad 3x + y = 10$, $\quad y = -3x + 10$

2.8.4. Punkten $(2, 1)$ är närmast, avstånd $2\sqrt{5}$, spegelbild $(-2, 3)$.

2.8.5. (a) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$,

(c) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.8.6. $(3, -1, 1)$ ligger på linjen.

2.8.7. Vid $t = 0$ är partikeln i $(-6, 1)$. Punkten $(9, 6)$ passeras vid $t = 5$ medan punkten $(12, 8)$ ej ligger på linjen.

2.8.8. (a) Skär ej, ej parallella, (b) identiska, (c) parallella,
(d) skär varann i punkten $(2, 4, 2)$.

2.8.9. N: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.8.10. (a) $(-1, 2, -1)$, avstånd $\sqrt{6}$, (b) $(4/3, 13/3, 4/3)$, avstånd $\frac{1}{3}\sqrt{78}$.

2.8.11. $(1/6, -1/3, -5/6)$, $\dfrac{17\sqrt{6}}{6}$

2.8.12. $(11/3, -7/3, 2/3)$, $\dfrac{\sqrt{141}}{3}$

2.8.13. (a) $3x + y + z = 8$, (b) $18x + 19y + 4z = 29$.

2.8.14. (a) Π: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad s, t \in \mathbb{R}, \quad 2x + 13y + 15z = 60$

(b) Π: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\quad s, t \in \mathbb{R}, \quad 4x - y + z = 5$

(c) Π: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x - y + z = -1$

2.8.15. (a) $z = 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, innehåller både x- och y-axeln, skär z-axeln i $z = 0$.

(b) $x = 2$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, skär x-axeln i $x = 2$.

2.8.16. (a) $\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, skär x-axeln i $x = 1$, y-axeln i $y = 1$

(b) $\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, skär x-axeln i $x = 0$, y-axeln i $y = 0$, innehåller z-axeln.

(c) $\mathbf{n} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, skär x-axeln i $x = 1$, y-axeln i $y = 1$, z-axeln i $z = 1$.

2.8.17. (a) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -35 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.8.18. L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$. De är parallella.

2.8.19. (i) $\overline{OP}_{\|\mathbf{n}} = \frac{2}{7}\mathbf{n}$, (ii) $\overline{OP} - \overline{OP}_{\|\mathbf{n}} = \overline{OP_p}$, (iii) $\overline{OP} - 2\overline{OP}_{\|\mathbf{n}} = \overline{OP_s}$,
(iv) (a) $P_p = (19/7, 10/7, 13/7)$, (b) $P_s = (17/7, 6/7, 19/7)$.
(c) avståndet $= |\overline{OP}_{\|\mathbf{n}}| = \left|\frac{2}{7}\mathbf{n}\right| = \frac{2}{7}\sqrt{14} = \sqrt{\frac{8}{7}}$.

2.8.20. (i) N: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, (ii) $t_0 = -\frac{2}{7}$,
(iii) t-värde för spegelpunkten $= 2t_0$, (iv) avståndet $= |t_0\mathbf{n}|$,
(v) samma som 2.8.19 (iv).

2.8.21. (a) $P_p = (39/14, 11/7, 23/14)$, (b) $P_s = (18/7, 8/7, 16/7)$, (c) $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

2.8.22. $\dfrac{21}{\sqrt{398}}$

2.8.23. $P_p = (1, -1, 0)$, $P_s = (-5, 8, -3)$

2.8.24. L: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

2.8.25. L_s: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.8.26. Avståndet från Π till $Q_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{14}$ och till $Q_2 = \dfrac{3}{14}\sqrt{14}$. Q_1 och Q_2 ligger på olika sidor om Π.

2.8.27. $(-1, -1, -5)$ och $(3, 3, 7)$

2.8.28. Punkten ligger i skivans skugga.

2.8.29. (a) L_1: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, L_2: $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

(c) $x + y + z = 2$

(d) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} =$ avståndet mellan linjerna ty alla punkter på L_2 har samma avstånd till Π.

(e) $\mathbf{u} = \dfrac{2}{3}\mathbf{n}$

(f) $\overline{OP} + \mathbf{u} = \overline{OQ}$, $s = \dfrac{4}{3}$, $t = \dfrac{4}{3}$, $P = (4/3, -1/3, 1)$ $Q = (2, 1/3, 5/3)$

2.8.30. (a) Se 2.8.29 (a).

(b) $\overline{PQ} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 - s \\ -2 + s + t \\ 2 - t \end{pmatrix}$.

(c) $\overline{P_0Q_0}$ är vinkelrät mot linjernas riktningsvektorer, d v s skalärprodukten med dessa är 0.

2.8.31. $(x, y, z) = (2, 4/3, 4/3) + t \cdot (1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$

2.8.32. $x - 2y - z - 1 = 0$

3.2.1. $A:\ 1{\times}4$, $B:\ 2{\times}1$, $C:\ 4{\times}3$.

3.2.2. (a) Ej def ty A och D ej av samma format, (b) $\begin{pmatrix} 21/2 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & 25/3 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, (c) Ej def,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = nollmatrisen, (e) Ej def, (f) $2D = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 10 & -14 & 16 \\ -4 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

3.2.3. (a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $3\times 3 \cdot 2\times 3$ ej def, (d) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

(e) $3\times 1 \cdot 3\times 3$ ej def, (f) 24.

3.2.4. (a) Ej def, (b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$, (c) Ej def, (d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Nej, ty $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & -8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 12 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = BA$.

3.2.5. $ABX = \begin{pmatrix} 68 \\ 56 \\ 72 \end{pmatrix}$. $A(BX)$ kräver minst antal operationer.

3.2.6. $\begin{pmatrix} t & 2s \\ 3s & t+3s \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

3.2.7. $A^3 = \mathit{0}$ (nollmatrisen). $\mathit{0} \cdot B = \mathit{0}$ för alla matriser B.

3.2.8. $(AB)^t = \begin{pmatrix} 58 & 139 \\ 64 & 154 \end{pmatrix}$

3.2.9. (a) A ingetdera, B symmetrisk, C diagonal och därmed också symmetrisk, $D = I$ och därmed automatiskt både symmetrisk och diagonal.

(b) $A + B$ ingetdera, $B + C$ symmetrisk, $C - D$ diagonal och symmetrisk, $B^t - 2D$ symmetrisk, $A + A^t$ symmetrisk

3.2.10. (a) B, (b) A^tA.

3.2.13. (a) $\begin{pmatrix} 17 & 15 & 25 \\ 15 & 53 & -7 \\ 25 & -7 & 58 \end{pmatrix}$

3.3.3. $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Ekvationerna kan tolkas som ekvationer för tre plan och lösningen av systemet ger att de skär varann i en punkt.

3.4.1. (a) $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $X = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 31 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3.4.2. (a) Lösning saknas, (b) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, (c) Lösning saknas.

3.4.3. (a) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.4.4. (a) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, (b) Lösning saknas.

3.4.5. (a) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$,

(b) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$.

3.4.6. (a) $X = \begin{pmatrix} -21 \\ -17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, (b) lösning saknas,

(c) $X = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, (d) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.4.7. (a) Entydig lösning för alla $a, b, c \in \mathbb{R}$,
(b) Oändligt många lösningar om $-2a + b + c = 0$, inga lösningar om $-2a + b + c \neq 0$.

3.4.8. (a) $X = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, (b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.5.1. (a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ resp $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Lösning saknas resp $X = t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) Syns då sytemen skrivits på trappstegsform.
(a) Ingen nollrad i trappstegsformen av vänsterledet, d v s lösbart.
(b) Nollrad i vänsterledet. I första fallet, ej nolla i högerledet, d v s ej lösbart. I andra fallet lösbart ty nolla också i högerledet.

3.5.2. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och rang $A = 2$.

3.5.3. (a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $AX_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Enligt räknelagarna för matriser gäller $A(X_p + tX_h) = \ldots$. Fyll i resten själv! Om jag hade skrivit ner hela resonemanget hade du inte tänkt efter tillräckligt ordentligt själv!

3.5.4. (a) Rang =3, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$,

Rang =2, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r, s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Antal parametrar = antal obekanta – rangen.

3.5.5. $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 3 \text{ om } a \neq \pm 1 \\ 2 \text{ om } a = -1 \\ 1 \text{ om } a = 1 \end{cases}$

3.6.1. $a = -\dfrac{3}{4}$, $b = \dfrac{3}{4}$.

3.6.2. $A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, B ej inverterbar ty $\operatorname{rang} B = 1$, C ej inverterbar ty invers definierad endast för kvadratiska matriser.

3.6.3. (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, (b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,

3.6.4. (a) $A^{-1} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 56 & 35 & 1 & -6 \\ 7 & 5 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -40 & -25 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.6.5. $X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

3.6.6. $X = (A - C)^{-1} B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 15 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -8 \end{pmatrix}$.

3.6.7. $X = AC(B+2I)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & 17 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$

3.6.8. $X = B + A^{-1}B^tB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 11 & -1 & 14 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

3.6.10. $B^{-1} = -I - 2B - B^2$.

3.6.11. Multiplicera med $A+I$ från något håll.

3.6.14. $A^{-1} = \dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}$

3.6.15. $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

3.6.16. $A^{-1} = A^3$, $(A^2)^{-1} = A^2$, $(A^3)^{-1} = A$.

3.7.1. (c) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$, (d) $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, använd induktion,

(e) $\underline{\mathbf{e}}\,AX_1 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{e}}\,AX_2 = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. De är vridna 60° moturs.

3.7.2. (a) $AB = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, d v s rad 1 och rad 2 har bytt plats.

(b) $AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - 2a_{11} & a_{32} - 2a_{12} & a_{33} - 2a_{13} \end{pmatrix}$,

d v s 2·rad 1 har subtraherats från rad 3.

3.7.3. (a) $y_1 - y_3 = 0$.

(c) rad1 $\times$ rad2$= \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AX{=}0 \iff X{=}t\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.7.4. $a = 13$, lösning saknas. $a = 11$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.7.5. $a=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, $a=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$ och $a \neq 2$ lösning saknas.

3.7.6. $(a,b,c) = t(-1,2,1)$.

3.7.7. $a = \pm 1,\ -\frac{1}{3}$.

3.7.8. $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.7.9. $A = \left(\left(B^t\right)^{-1} + 2I \right)^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

4.1.1. (a) $-$, (b) $-$, (c) Ej tillåten, (d) $+$.

4.1.2. (a) -4, (b) 14, (c) 1.

4.1.3. (a) 15, (b) -4, (c) -240.

4.2.1. (a) Rad 1=rad3, (b) rad3=2rad1, (c) kol1+kol2=kol3.

4.2.2. (a) -6, (b) 60, (c) 12.

4.2.3. (a) $\det A = 22,\ \det(-3A) = (-3)^2 \cdot 22 = 198$

(b) $\det A = 56,\ \det(-2A) = (-2)^3 \cdot 56 = -448$

(c) $\det A = -35,\ \det\left(\frac{1}{5}A\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot (-35) = -\frac{7}{125}$

4.2.4. (a) 5, (b) 33, (c) 6.

4.2.5. (a) $C_{11}{=}29,\ C_{12}{=}-21,\ C_{13}{=}27,\quad C_{21}{=}11,\ C_{22}{=}13,\ C_{23}{=}5,$
$C_{31}{=}-19,\ C_{32}{=}19,\ C_{33}{=}19$

(b) $C_{11}{=}6,\ C_{12}{=}-12,\ C_{13}{=}3,\quad C_{21}{=}-2,\ C_{22}{=}4,\ C_{23}{=}-1,$
$C_{31}{=}0,\ C_{32}{=}0,\ C_{33}{=}0$

4.2.6. -123

4.2.7. (a) -5, 2:a kol, (b) 1, 1:a kol eller 2:a rad, (c) 80, 3:e kol.

4.2.9. (a) 39, (b) -2, (c) 6, (d) 8, (e) 0, (f) 24.

4.2.10. (a) 288, (b) $2t^3$.

4.2.11. (a) $x = -3, \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{3})$, (b) $x = 1$ (trippel), 0, (c) $x = 1$ (dubbel), $3, -5$.

4.2.12. (a) $x^{n-2}(x^2-1)$, (b) $(-1)^{n+1}n!$, (c) $(a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$.

4.2.13. Talen s, t, u skall vara olika.

4.3.1. (a) (i) $b \neq -2a$, (ii) $b = -2a$ och $a \neq 5$, (iii) $a = 5$ och $b = -2a = -10.$,
(b) (i) $ab \neq 2$, (ii) $ab = 2$ och $a \neq -5$, (iii) $a = -5$ och $b = \dfrac{2}{a} = -\dfrac{2}{5}.$,
(c) (i) $a \neq 2$, (ii) $a = 2$ och $b \neq 1$, (iii) $a = 2$ och $b = 1.$.

4.3.2. Skriv på matrisform och räkna ut determinanten av koefficientmatrisen (samma i både (a) och (b)). Använd determinantkriteriet.

(a) $a \neq -2, 4$ entydig lösning, $a = 4$ oändligt många lösningar $a = -2$ olösbart.

(b) $a \neq -2, 4$ entydig lösning (den triviala), $a = -2$ eller 4, oändligt många lösningar.

4.3.3. (a) (i) $a \neq 2$, alla $b \in \mathbb{R}$, (ii) $a = 2$, $b \neq 1$, (iii) $a = 2$, $b = 1$.

(b) Entydig lösning ($x = y = z = 0$) om $abc \neq -1$, oändligt många lösningar om $abc = -1$.

4.3.4. (a) (i) $a \neq 0$ och $a \neq 2$, alla $b \in \mathbb{R}$, (ii) $a = 0$, $b \neq 1$ eller $a = 2$, $b \neq -1$,
(iii) $a = 0$, $b = 1$ eller $a = 2$, $b \neq -1$.

(b) (i) $a \neq 0, 3$ och 5, (ii) $a = 0$, $b \neq \dfrac{1}{3}$ eller $a = 3$, alla $b \in \mathbb{R}$,
(iii) $a = 0$, $b = \dfrac{1}{3}$ eller $a = 5$, alla $b \in \mathbb{R}$..

4.3.5. $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 3 \text{ om } a \neq \pm 1 \\ 2 \text{ om } a = -1 \\ 1 \text{ om } a = 1 \end{cases}$

4.3.6. $a \neq 1, 2$ entydig lösning. $a = 1$, ingen lösning. $a = 2$ oändligt många lösningar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

4.3.7. $a \neq 2$ och $a \neq 3 \iff$ entydig lösning, $a = 2$ oändligt många lösningar, $a = 3$ lösning saknas.

4.3.8. $\lambda = -1, \; X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1, \; X = t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2, \; X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

4.4.1. $\det A = 14$.

(a) $\det A^2 = (\det A)^2 = 14^2 = 196$

(b) $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \cdot 14 = 1750$

(c) $5 \det A = 5 \cdot 14 = 70$

(d) $\det\left(\dfrac{1}{3}A^t\right) = \dfrac{1}{3^3}14 = \dfrac{14}{27}$

(e) $\det\left(A^3 A^{-1}\right) = \det A^2 E = \det A^2 = 196$

4.4.2. (a) A^{-1} existerar $\iff$ $\det A \neq 0$, se sats 4.7.1, sid 92 i boken

(b) $\det A = -6 \iff A^{-1}$ existerar, $\det B = 0 \iff B$ saknar invers.

(c) $a \neq -2, 3$

4.4.3. (b) t ex $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.5.2. 15

4.5.3. $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$

4.5.4. $\left\| \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \right\| = |-24\mathbf{e}_1 + 21\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3| = \left| \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -24 \\ 21 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1117}$

4.5.5. T ex $\left\| \begin{vmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \right\| = 168$

5.2.1. Mängderna i (b), (g) och (i) är ej vektorrum. De andra är vektorrum.

5.2.2. "0"=1

5.3.1. (a) Nej, (b) Ja.

5.3.2. Mängderna i (b), (d) och (f) är ej underrum, övriga är underrum.
$M_1 =$ plan genom origo, $M_2 =$ plan som ej går genom origo, $M_3 =$ skärningslinjen mellan planen, $M_4 =$ de punkter som tillhör minst ett av planen, typ som figuren på bokens framsida, $M_5 =$ plan genom origo, $M_6 =$ linje som ej går genom origo

5.3.3. Nej, t ex matriserna $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{22}$ men $A + B = I \notin \mathbb{M}$.

5.3.4. Ja.

5.3.5. Ja.

5.3.6. $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$ är det plan genom origo som spänns upp av linjernas riktningsvektorer.

5.3.8. $M_1 = M_3$ är planet $x_1 - x_3 = 0$, M_2 är linjen genom origo med riktningsvektor $(1, 3, -1)$.

5.3.9. Exempelvis $M_1 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$, $M_2 = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$.

5.3.10. $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = [(1, 1, -5, 3)] = \left\{ \underline{\mathbf{e}}\, X \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right\}$.

5.4.1. (a), (c), (e) beroende. (a) beroende ty varje uppsättning vektorer där nollvektorn finns med är beroende, (c) beroende ty $(-2,-4) = -2(1,2)$, (e) beroende ty för många element

5.4.2. (a), (d) linjärt oberoende, (b) , (c) linjärt beroende.

5.4.3. T ex $\mathbf{u} = \mathbf{e} + \mathbf{f} - \mathbf{g}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g}$
$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3)\mathbf{e} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)\mathbf{f} + x_2\mathbf{g}$

5.4.4. $\mathbf{u} = 3\mathbf{e} - \mathbf{f}$. $\mathbf{v}$ går inte. Villkoret på $\mathbf{w}$ är att $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$. Ett plan.

5.4.5. $(2,0,1,3) = 0\cdot(0,0,2,2) + (-1)\cdot(4,1,0,1) + 1\cdot(6,1,1,4)$. $(0,0,2,2)$ kan ej skrivas som linjärkombination av de övriga.

5.4.6. $a = 3, -1$

5.4.7. $a \neq 0,\ 1,\ 3$.

5.4.9. Oberoende. Fyll ut med vilken som helst vektor som *inte* uppfyller $a + 4b + 7c = 0$, t ex $(1,0,0,0)$

5.4.10. (a) $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ bas för $\mathbb{M}_1$,

(b) $(2,1,0)$ bas för $\mathbb{M}_2$.

Ser man det geometriskt är $\mathbb{M}_1$ ett plan och $\mathbb{M}_2$ en linje i x_1x_2-planet.

5.4.11. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2}$. $\{\underline{\mathbf{e}}\,X_1, \underline{\mathbf{e}}\,X_2\}$ är en bas i $\mathbb{W}$.

5.4.12. (b) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, linjärt oberoende.

5.4.13. T ex $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Nej, ty $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ är linjärt beroende (stryk kolonn 3 och 5 i ditt ekvationssystem).

5.4.14. (b), (d), (e). Ej (a) ty $\mathbf{f}_3 = x^3 \notin \mathbb{P}_2$, ej (c) ty $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3$.

5.4.15. (a) $1 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^3 = \underline{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Samma koordinatmatriser som standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^4$.

(b) Samma som 5.4.12(c), linjärt oberoende.
(c) Exakt samma system.

5.4.16. $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{v}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$

5.4.17. (a) $X_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$, (b) $X_{\underline{\mathbf{v}}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-5\\-4\end{pmatrix}$.

5.4.18. $\mathbf{u} = 1{\cdot}\mathbf{f}_1 + (-1){\cdot}\mathbf{f}_2 + (-1){\cdot}\mathbf{f}_3 + 2{\cdot}\mathbf{f}_4 = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

5.4.19. (a) spänner upp och rätt antal, d v s bas, (b) för få spänner ej upp, (c) spänner upp, men för många, d v s ej bas, (d) spänner ej upp (linjärt beroende och rätt antal).

5.4.20. M_1 och M_2 spänner upp $\mathbb{P}_2$, men inte M_3.

5.4.21. T ex $(1,0,0,3),(0,1,0,1),(0,0,1,0)$ är en bas i $\mathbb{M}$ och därmed $\dim\mathbb{M} = 3$ (= antalet vektorer i en bas).

5.4.22. (a) $\dim\mathbb{U} = 3$, $\dim\mathbb{V} = 2$, (b) Ja, ty elementen som genererar $\mathbb{V}$ uppfyller ekvationen som definierar $\mathbb{U}$, (c) Nej, olika dimension..

5.4.23. Villkoret är att $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Hela $\mathbb{W}$ spänns upp.

5.4.24. $\dim\mathbb{U} = 3$, $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$.

5.4.25. (a) Ja. (b) Ja. (c) Nej.

5.4.26. Visa t ex att $\mathbb{M}_2 \subset \mathbb{M}_1$ och att $\dim\mathbb{M}_1 = \dim\mathbb{M}_2$.

5.4.27. (a) Fyll ut med något $\underline{\mathbf{e}}\,X$ sådant att $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \neq 0$; exakt dessa är ej linjärkombinationer av de givna.

(b) T ex $(1,0,0,0)$ och $(0,0,1,0)$.

(c) T ex $(0,2,0,1)$.

5.4.28. T ex $\mathbf{f}_3 = (1,0,0)$ eller vilken som helst annan vektor vars koordinater i standardbasen *inte* uppfyller $11x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$.

5.4.29. $(3,2,1)$ är en bas för $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$. $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ kan ses som plan genom origo och $\mathbb{U}\cap\mathbb{V}$, en linje genom origo.

5.4.30. En bas, t ex $(1,0,0,0,0)$ och $(0,0,1,0,0)$. Därmed är $\dim(\mathbb{M}_1\cap\mathbb{M}_2) = 2$

5.4.32. $k-1$. Studera en godtycklig linjärkombination av de sistnämnda vektorerna och sök löjliga element.

5.4.33. $\mathbb{W} = \left[\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -8 \\ 30 \\ 5 \\ -30 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$.

5.4.34. Tänk själv först och diskutera sedan med din lärare eller en kamrat.

5.5.1. $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}} \, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

5.5.2. Med $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gäller $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$, d v s $Y_{\underline{\mathbf{f}}} = T^{-1} X_{\underline{\mathbf{e}}}$.

5.5.3. Koordinaterna är $(1, 1, -2)$, d v s $(3, -1, 5) = 1 \cdot (2, 0, 2) + 1 \cdot (1, 1, 1) - 2 \cdot (0, 1, -1)$.

5.5.4. $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$.

5.5.5. $\dim \mathbb{V} = 2$. $\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{f}} \, T_1^{-1} T_2 = \underline{\mathbf{f}} \, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5.5.6. $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.5.7. Ledning: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är också en bas. $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.8. (a) $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \right)$, (b) 3 stycken.

5.5.9. $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.2.1. Endast (c), (a) ej linjär, (b) $= 0$ för, t ex $\mathbf{u} = (1, 0) \neq (0, 0)$, (d) $= 0$ för, t ex $\mathbf{u} = (1, -1) \neq (0, 0)$.

6.2.2. (a) och (b) ger skalärprodukter. (c) ger ej skalärprodukt ty med $f(t) = t(t-1)(t-2)$ är $f * f = 0$.

6.2.3. $a = 3$, $b > 9$.

6.2.4. $a > 13$.

6.2.5. (a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{14}$ och $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 0$

(b) $|\mathbf{u}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{5}$ och $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 3$

d v s Ny skalärprodukt $\Rightarrow$ annat längdbegrepp, annat ortogonalitetsbegrepp.

6.2.6. $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \dfrac{5}{2}$

6.2.8. $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala

6.2.9. (a) Alla vektorer av formen $t(\mathbf{v} - 3\mathbf{w})$, $t \in \mathbb{R}$ är $\perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$.

(b) Visa först att $\mathbf{v} - 3\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ genom att beräkna $(\mathbf{v} - 3\mathbf{w}|\mathbf{w})$.

6.2.10. Längden av $1 + 3x = \sqrt{(1 + 3x|1 + 3x)} = \sqrt{8}$.

6.2.11. $\mathbf{v} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3, -4)$.

6.2.12. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 24 \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| = \sqrt{30}\sqrt{30} = 30$

6.2.13. Använd Cauchy-Schwartz olikhet med $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ och $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$. Likhet för $\mathbf{u} = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

6.2.14. $(x_1, x_2, x_3) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$

6.2.15. $32\,m^2$. Tanken är en kub med sidan $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\,m$

6.3.1. $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. Utfyllnad, t ex $\mathbf{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$

6.3.2. T ex $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \mathbf{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{133}}(6, -9, 4)$. Utfyllnad, t ex $\mathbf{f}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{38}}(5, 2, -3)$

6.3.3. (a) Beräkna skalärprodukterna mellan de *olika* paren av basvektorer, se att de blir 0.

(b) Normera, $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1$, $\mathbf{f}_2 = \dfrac{1}{2}\mathbf{u}_2$, $\mathbf{f}_3 = \dfrac{1}{2}\mathbf{u}_3$.

(c) Systemet blir i matrisform (känner du igen koefficienterna?)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

och har lösningen $t(0, -1, 0, 1)$ så, t ex $\mathbf{f}_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1)$ duger.

6.3.4. Planets genom origo normal.

6.3.5. $\mathbb{U}^{\perp} =$ (a) $[\mathbf{f}_2]$, (b) $[\mathbf{f}_3]$, (c) $[\mathbf{f}_4]$.

6.3.6. (a) $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (1, 5)_{\|(1,2)} = \dfrac{11}{5}(1, 2)$, $\quad \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = (1, 5)_{\perp(1,2)} = \dfrac{3}{5}(-2, 1)$.
Avståndet $= \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \left|\dfrac{3}{5}(-2, 1)\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5}$

(b) $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (2, -9, 10)_{\|[(1,2,3),(1,-1,1)]} = 7(1, -1, 1)$, $\quad \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = (2, -9, 10)_{\|\mathbb{U}^{\perp}} = (-5, -2, 3)$
Avståndet $= \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = |(-5, -2, 3)| = \sqrt{38}$

(c) $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (0,0,2,10)_{\|\mathbb{U}} = (0,5,2,5), \quad \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = (0,0,2,10)_{\|\mathbb{U}^\perp} = (0,-5,0,5)$
Avståndet $= \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = |(0,-5,0,5)| = 5\sqrt{2}$

6.3.7. (a) $\mathbf{v} = (2,5) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 11/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{v} = (2,-9,10) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} \sqrt{14} \\ \sqrt{133} \\ -\sqrt{38} \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = (0,0,2,10) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 4 \\ 6 \\ 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6.3.8. $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

6.3.9. T ex (a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,1), \dfrac{1}{3\sqrt{5}}(2,-6,1,2)$,
(b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)$,
(c) $\dfrac{1}{2}(1,1,1,1), \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-1,3,-2,0), \dfrac{1}{\sqrt{2100}}(37,1,-17,-21)$.

6.3.10. (a) $2x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0$

(c) $a = 2b$, $7c = 9d$. Välj $b = 1$, $c = 9$, $\mathbf{f}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0,0)$, $\mathbf{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{130}}(0,0,9,7)$.

(d) $\alpha(-1,2,0,0) + \beta(0,0,-7,9)$

(e) $10\alpha - 130\beta = 0 \iff \alpha = 13\beta \Longrightarrow \mathbf{u}_3 = (-13,26,-7,9)$

(f) $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 13$, $\mathbf{f}_3 = \dfrac{1}{5\sqrt{39}}(-13,26,-7,9)$.

Vi får alltså en helt annan ON-bas för samma rum.

6.3.11. (a) $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \dfrac{1}{2}(6,-11,2,5)$, $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \dfrac{1}{2}(-2,3,20,1)$,
$\min\limits_{\mathbf{v}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \dfrac{1}{2}\,|(-2,3,20,1)| = \dfrac{\sqrt{414}}{2}$,
(b) $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \dfrac{1}{2}(-9,-1,9,-1)$, $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \dfrac{1}{2}(13,-7,13,7)$
$\min\limits_{\mathbf{v}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right| = \dfrac{1}{2}\,|(13,-7,13,7)| = \dfrac{\sqrt{436}}{2} = \sqrt{109}$.

6.3.12. $\dfrac{1}{2}(-1,1,1,-1), \dfrac{1}{2\sqrt{29}}(7,7,-3,-3)$ är en ON-bas för $\mathbb{U}^\perp$.
$\mathbb{U}^\perp = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array}\right\}$. Känner du igen koefficienterna i ekvationerna?

6.3.13. $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}(1,0,2,-2)$, $\mathbf{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,1,4,3)$

6.3.14. T ex $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

6.3.15. T ex $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\2\end{pmatrix}$.

Fyll ut med $\mathbf{f}_4 = \frac{1}{|\mathbf{u}_0|}\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\\4\end{pmatrix}$. Behövde du räkna för att få fram denna har du räknat i onödan. Varför?

6.3.16. Samma som 6.3.15. Det är nämligen exakt samma uppgift!

6.3.17. (a) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\colon 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\} \Longrightarrow$

(b) $\mathbb{W}^\perp = [(3,-5,-3,1)]$, d v s $\dim \mathbb{W} = 3$, $\dim \mathbb{W}^\perp = 1$ så det blir enklast att räkna ut $\mathbf{u}_{\perp\mathbb{W}} = \mathbf{u}_{\|\mathbb{W}^\perp}$ först. $\mathbf{u}_{\perp\mathbb{W}} = \frac{1}{11}(-3,5,3,-1)$, $\mathbf{u}_{\|\mathbb{W}} = \frac{1}{11}(14,6,8,12)$.

(c) $\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{W}} |\mathbf{u}-\mathbf{w}| = |\mathbf{u}_{\perp\mathbb{W}}| = \frac{2\sqrt{11}}{11}$ för $\mathbf{w} = \mathbf{u}_{\|\mathbb{W}}$.

6.3.18. B och C.

6.4.1. (a) $x_1 = \frac{83}{50} = 1,66$, $x_2 = \frac{71}{50} = 1,42$, (b) $x_1 = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $x_3 = \frac{6}{5}$.

6.4.2. $X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\min_{X\in\mathbb{M}_{2,1}} |\underline{\mathbf{e}}\,AX - \underline{\mathbf{e}}\,B| = |\underline{\mathbf{e}}\,AX_0 - \underline{\mathbf{e}}\,B| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

6.4.3. $X_0 = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = X_p + t\cdot X_h$,

$\min_{X\in\mathbb{M}_{3,1}} |\underline{\mathbf{e}}\,AX - \underline{\mathbf{e}}\,B| = |\underline{\mathbf{e}}\,AX_p - \underline{\mathbf{e}}\,B| = \left|\frac{1}{3}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dvs $AX_h = 0$.

6.4.4. $y = 3x + 1$

6.4.5. $\frac{1}{70}(25x^2 + 21x + 76)$

6.4.6. (a) $\frac{1}{45}(34,3,2,19)$, $\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{e}_1 - \mathbf{u}| = |\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{1\|\mathbb{U}}| = |\mathbf{e}_{1\perp\mathbb{U}}| = \frac{1}{15}\sqrt{55}$, $\dim \mathbb{U} = 2$,

(b) $\frac{1}{2}(1,0,-1,0)$, $\min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}}|\mathbf{e}_1-\mathbf{u}| = |\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_{1\|_{\mathbb{U}}}| = |\mathbf{e}_{1\perp_{\mathbb{U}}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\dim\mathbb{U}=2$,

(c) $\frac{1}{44}(35,15,9,-3)$, $\min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}}|\mathbf{e}_1-\mathbf{u}| = |\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_{1\|_{\mathbb{U}}}| = |\mathbf{e}_{1\perp_{\mathbb{U}}}| = \frac{3}{22}\sqrt{11}$, $\dim\mathbb{U}=3$.

6.4.7. (a) $Q = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \\ 5 & -7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$,

(b) $Q = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$, $R = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

7.2.1. Endast (a) är linjär.

7.2.2. Alla är linjära.

7.2.3. $F(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

7.2.4. Nej, om sådan funnes skulle

$$\underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{e}}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{F}{\longmapsto} \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \underline{\mathbf{f}}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7.3.1. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \pi \\ \ln 2 & \sin 4 & -3e \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

7.3.2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \pi \\ \ln 2 & \sin 4 & -3e \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \ln 2 & \sin 4 & -3e \end{pmatrix}$.

7.3.3. (a) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$, (b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, (c) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, (d) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, (e) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, (f) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,
(g) $\mathbf{0}$.

7.3.4. (a) $\begin{pmatrix} 7 & \pi \\ e & -2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & -2\pi & 3\pi \\ -e & \sqrt{3} & -\sqrt{7} \\ \ln 2 & \sin 3 & \tan 5 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & 3\pi \\ -e & -\sqrt{7} \\ \ln 2 & \tan 5 \\ \cos 3 & \ln 3 \\ \sqrt{5} & 2e \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \tan 1 \\ \pi & \ln 3 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

7.3.5. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \\ -2 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3.6. (a) $A_{(\mathrm{F})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $A_{(\mathrm{G})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7.3.7. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3.8. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7.3.9. $\dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

7.3.10. $\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

7.3.11. (a) $\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7.3.12. (a) $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $1 + (-1) - 0 = 0$, $1 + 0 - 1 = 0$.

(b) $\mathbf{0}$, vektorn själv.

(c) $F(\mathbf{e}_2) + F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $F(\mathbf{e}_1) + F(\mathbf{e}_2) - F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$.

(d) $\begin{cases} F(\mathbf{e}_1) = \dfrac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ F(\mathbf{e}_2) = \dfrac{1}{3}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ F(\mathbf{e}_3) = \dfrac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \end{cases}$,

$F(\mathbf{e}_1) = \dfrac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{e}_2) = \dfrac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{e}_3) = \dfrac{1}{3} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) $A_e = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3.13. $F(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$, $\mathbf{u} \in$planet $\Rightarrow F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Matris $= \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3.14. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.4.1. $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d v s F utför en ortogonalprojektion (eftersom $\underline{\mathbf{f}}$ är ON) på linjen genom origo med $\mathbf{f}_1$ som riktningsvektor (och $\mathbf{f}_2$ som normalvektor).

7.4.2. $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d v s F utför en spegling (eftersom $\underline{\mathbf{f}}$ är ON) på planet genom origo med $\mathbf{f}_1$ som normalvektor.

7.4.3. Lämplig bas är, t ex en höger ON-bas med planets enhetsnormal som första basvektor.

7.4.4. Lämplig bas är, t ex en bas med projektionsriktningen som första basvektor och övriga i projektionsplanet. Normera inte! Det gör bara kalkylen svårare

7.4.5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{f}_1) = 2\mathbf{f}_1$, $F(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$ och $F(\mathbf{f}_3) = -\mathbf{f}_3$.

7.4.6. $A_{\underline{\mathbf{g}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.5.1. (a) $N(F) =$ normallinjen genom origo, $V(F) =$ planet själv,

(b) $N(F) =$ normalplanet genom origo, $V(F) =$ linjen själv,

(c) $N(F) = \mathbb{P}_1$, $V(F) = \mathbb{P}_{n-2}$

(d) $N(F) = \{0\}$, $V(F) = [x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}]$

(e) $N(F) = [x^2]$, $V(F) = [1, x, x^3, \ldots, x^n] = n$:e gradspolynom utan x^2-term. Att bara plocka bort x^2 med motiveringen att $N(F) = [x^2]$ är felaktigt.

7.5.2. (a) Finns ej enligt dimensionssatsen ty, i detta fall blir $\dim N(F) + \dim V(F) = 4 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

(b) Finns ej ty i detta fall skulle $F(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ eftersom $\mathbf{0} \notin V(F)$.

(c) Finns, t ex den avbildning F för vilken gäller

$$F(1, -1, 0) = F(0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{och} \quad F(1, 1, 1) = (0, 1, 0, 0).$$

7.5.3. (a) $V(F) = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \{X \in \mathbb{R}^3 \colon -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

(c) $-11 + 2{\cdot}7 + (-3) = 0$.

(d) $\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad F\left(\frac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(e) $AX_p = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, $AX_h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $\underline{\mathbf{e}}\,X_h$ är en bas för $N(F)$ så dimensionen är 1.

7.5.4. (a) $N(F) = \{\mathbf{0}\}$, bas för $V(F)$, t ex matrisens kolonner,

(b) $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bas för $N(F)$ och för $V(F)$, t ex $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$V(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x + 2y - 2z = 0\} = [(0,1,1),(4,3,5)]$

(c) T ex $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bas för $N(F)$ och $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bas för $V(F)$.
$V(F) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{array}{r} -2x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \end{array}\right\} = [(1,2,3)]$

7.5.5. (a) Ja, $N(F) \cap N(G) = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \subset \mathbb{R}^4$. (b) Ja, $V(A) \cap V(B) = \left[\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}\right]$.

7.5.6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,
$(1,1,1,1)$ är en bas för $N(F)$ och $(3,2,1,-1),(0,1,2,-1),(1,0,1,-1)$ är en bas för $V(F)$.

7.5.7. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (känns de två första kolonnerna igen?).

7.6.2. (a) $N(F) = N(F^2) = [(1,1,1)]$,
$V(F) = V(F^2) = \{X \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\} \not\ni (1,1,1)$ så $N(F) \cap V(F) = \{\mathbf{0}\}$ och det finns därmed en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av element ur $N(F)$ och $V(F)$.

(b) $N(F) = [(1,1,1)] \subset V(F) = \{X \in \mathbb{R}^3 \colon -5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0\}$ så bas med sökt egenskap finns ej. $V(F^2) = [(6,11,-14)]$, t ex $(1,0,0),(0,1,1)$ bas för $N(F^2)$.

7.6.3. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$,

(b) $\underline{\mathbf{e}}\,AX_1 = \dfrac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{e}}\,AX_2 = \dfrac{1}{2}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ De är vridna 60° moturs.

(c) $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, använd induktion (om du kan det).

7.6.4. $F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, matrisen $= AB = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -4 \\ 18 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $G \circ F$ är ej definierad ty $F(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ och där är G ej definierad.

7.6.7. 3

7.6.8. $A^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d v s $F \circ F = G$

7.6.9. (a) $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_\perp = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $N(P) = \mathbb{U}^\perp$, $V(P) = \mathbb{U}$, $N(P_\perp) = \mathbb{U} = V(P)$, $V(P_\perp) = \mathbb{U}^\perp = N(P)$.

(c) $A^2 = A$, $A_\perp^2 = A_\perp$, $A + A_\perp = E$, $A_\perp A = AA_\perp = 0$-matrisen.

7.7.1. (a) ortogonal projektion i det plan som spänns upp av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_3$. Symmetrisk.

(b) sträckning i $\mathbf{e}_2$-led. Symmetrisk.

(c) vridning v radianer kring $\mathbf{e}_1$. Isometrisk.

(d) vridning $\pi/2$ moturs kring $\mathbf{e}_3$. Isometrisk.

(e) spegling i det plan som spänns upp av $\mathbf{e}_1$ och $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2 + \dfrac{1}{2}\mathbf{e}_3$. Isometrisk och symmetrisk.

7.7.2. (a) $A_{\underline{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

, d v s F är en spegling i linjen med $\mathbf{f}_2$ som normal (och $\mathbf{f}_1$ som riktningsvektor).

7.7.3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$

7.7.4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.7.5. $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\,(\mathbf{u}|\mathbf{f}_1)\,\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,X - 2(X^tY_1)\,\underline{\mathbf{e}}\,Y_1 = \underline{\mathbf{e}}\,IX - 2\,\underline{\mathbf{e}}\,Y_1({Y_1}^tX) = \underline{\mathbf{e}}(I - 2Y_1{Y_1}^t)X$, d v s F:s matris $= I - 2Y_1{Y_1}^t$.

7.7.6. Vridning $\dfrac{\pi}{2}$ kring $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ moturs sett från spetsen av densamma.

7.7.8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.7.9. (a) Symmetrisk eftersom matrisen är det,

(b) isometrisk eftersom matrisen är ortonormal,

(c) varken isometrisk eller symmetrisk,

(d) symmetrisk eftersom matrisen är det,

(e) symmetrisk och isometrisk eftersom matrisen är både symmetrisk och ortonormal.

7.7.10. Speglingar

7.7.12. (d) $N(P) = \mathbb{U}^{\perp}$, $V(P) = \mathbb{U}$.

(e) Ortogonalprojektion på $\mathbb{U}$.

7.7.13. Bas: $(1,1,1)$, $(-2,1,1)$, $(1,-2,1)$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ortogonal projektion i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ följd av en vridning π kring $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

7.7.14. Lättast är att titta på basbilder. Alternativt kan du i uppgifterna (a) till (d) jämföra med matriserna för allmänna vridningar och speglingar i rummet.

(a) Spegling i x_1x_3-planet.

(b) Vridning π kring x_3-axeln.

(c) Vridning $\pi/6$ moturs kring x_1-axeln.

(d) Vridningen i (c) följd av en spegling i x_2x_3-planet.

(e) Vridning π kring linjen $\mathbf{x} = t(\cos\frac{\pi}{12}\,\mathbf{e}_2 + \sin\frac{\pi}{12}\,\mathbf{e}_3)$, $t \in \mathbb{R}$.

7.7.15. Avbildningen är en vridspegling. Spegling i normalplanet till $\mathbf{f}_1 = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Vridning kring $\mathbf{f}_1$, 90° moturs sett från spetsen av $\mathbf{f}_1$.

7.7.16. (a) Vridning $2\pi/3$ moturs kring linjen med riktningvektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
Här kan man se saker genom att titta på basbilderna. Alternativt kan man bestämma vridningsaxeln genom att lösa $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Tag en vektor $\mathbf{v}$ ortogonal mot $\mathbf{u}$. Vridningsvinkeln ges nu av vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $F(\mathbf{v})$. Orienteringen bestämmer man genom att titta på en lämplig vektorprodukt.

(b) Vridspegling. Vridning $\pi/3$ moturs kring linjen med riktningsvektor $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ följd av spegling i planet med riktningsvektorn ovan som normalvektor. Vridningsaxeln bestäms genom att lösa $F(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$. Sedan fortsätter men som i (a).

7.7.17. (a) Planet som innehåller $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, d v s $x - y = 0$.

(b) Vridingsaxel = planets normal $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, vridningsvinkel $= \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$ moturs sett från toppen av $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{n}}$.

(c) $\mathbf{f}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$, $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$

(d) $F(\mathbf{e}_3) = F(\mathbf{f}_3) =$ "sista kolonnen i $A_{\underline{\mathbf{f}}}$"$= \underline{\mathbf{f}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{f}_2 + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\mathbf{f}_3 =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.8.1. Arean av ursprungstriangeln $= \dfrac{b}{2}$.

(a) Bildtriangelns area $= \dfrac{1}{2}$, $A = \dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \dfrac{1}{b}$ = kvoten mellan areorna.

(b) Bildtriangelns area $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $A = \dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} b & \dfrac{1}{2} - a \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\det(A) = \dfrac{\sqrt{3}}{2b}$ = kvoten mellan areorna.

7.8.2. T ex F som ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Arean av området} = \frac{\text{Arean av } F(\text{området})}{|\det A|} = \frac{1}{\frac{1}{10^2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = 10.$$

7.8.3. T ex F som ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -8 & 10 \\ -3 & 7 & -9 \end{pmatrix}, \quad \det A = \frac{1}{2}.$$

Den nya tetraederns volym fås som $\dfrac{\text{basyta} \cdot \text{höjd}}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Volymen av tetraedern $= \dfrac{\text{Volymen av } F(\text{området})}{|\det A|} = \dfrac{1/6}{1/2} = \dfrac{1}{3}$.

Den återstående sidoytan ligger i planet $x + y + z = 1$.

8.1.1. (a) Vektorerna i planet är egenvektorer med egenvärde 1. Vektorer parallella med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ är egenvektorer med egenvärde 0.

(b) Vektorerna i planet är egenvektorer med egenvärde 1. Vektorer parallella med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ är egenvektorer med egenvärde -1.

(c) Vektorer parallella med vektorn $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ är egenvektorer med egenvärde 1.

(d) Vektorerna i planet är egenvektorer med egenvärde -1. Vektorer parallella med $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ är egenvektorer med egenvärde 1.

8.1.2. $(1, -1), (-2, 2)$ är egenvektorer med egenvärde -1.
$(2, 5)$ är egenvektor med egenvärde 6. Samtliga egenvektorer ges av $t(1, -1)$ och $s(2, 5)$ där $s, t \neq 0$.

8.1.3. $(2, -1, 1)$ har egenvärdet 3 och $(0, 1, 0)$ har egenvärdet 1.

8.1.4. $(-2, 1, 1)$ har egenvärdet 0, $(0, 1, 1)$ har egenvärdet 2 och $(3, -2, 1)$ har egenvärdet -1.

8.2.1. (a) $\lambda^2 - \lambda - 6$, nollställen $3, -2$, (b) $-\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$, nollställen $-1, \pm i$,
(c) $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{19}{16}\lambda + \frac{3}{16}$, nollställen $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$.

8.2.2. $(2, -3)$ egenvektor till egenvärdet -1, $(3, 2)$ egenvektor till egenvärdet 1 och
$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$.

8.2.3. (a) diagonaliserbar, två skilda egenvärden,

(b) ej diagonaliserbar, inga egenvärden,

(c) ej diagonaliserbar, dubbelegenvärde med en-dimensionellt egenrum,

(d) diagonaliserbar, ett enkel- och ett dubbelegenvärde där dubbelegenvärdet har tvådimensionellt egenrum.

För att svara på frågan behöver egenvektorer endast beräknas till multipel-egenvärden.

8.2.4. $\lambda =$ egenvärde, $m =$ multipliciteten, $d =$ dimensionen av egenrummet, r, s, t reella parametrar $\neq 0$ (nollvektorn är ju ingen egenvektor).

(a) $\lambda = -6$, $m = d = 1$, $r(7, 6, 3)$, $\lambda = 3$, $m = d = 1$, $s(14, 3, -3)$, $\lambda = 6$, $m = d = 1$, $t(1, 0, 0)$. Bas av egenvektorer finns. Sätt, t ex $r = s = t = 1$.

(b) $\lambda = 2$, $m = 2$, $d = 1$, $t(2, 1, 0)$, $\lambda = 1$, $m = d = 1$, $t(1, 1, -1)$. Ingen bas av egenvektorer.

(c) $\lambda = 1$, $m = d = 2$, $s(1, 0, -1) + t(0, 1, -1)$, $\lambda = 3$, $m = d = 1$, $r(1, 1, 0)$. Bas av egenvektorer finns. Tag, t ex $s = 1$ och $t = 0$, $s = 0$ och $t = 1$, $r = 1$.

(d) $\lambda = 1$, $m = 3$, $d = 1$, $t(1, 1, 1)$. Ingen bas av egenvektorer.

8.2.5. $(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 0)$.

8.2.6. (a) $\lambda = 3$, $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 1$, $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A^5 = \begin{pmatrix} 122 & -121 \\ -121 & 122 \end{pmatrix}$, $(A^{-1})^3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, $A^{100} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 3^{100} & 1 - 3^{100} \\ 1 - 3^{100} & 1 + 3^{100} \end{pmatrix}$,
$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + 3^n & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 1 + 3^n \end{pmatrix}$.

(e) $\mathbb{V}$ = egenrummet till egenvärdet 1.

(f) $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} F^n(\mathbf{u}) = \frac{x_1 - x_2}{2} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d v s parallell med egenvektorn till egenvärdet 3.

8.2.7. (a) Egenvärde: 1. Egenvektorer: $t\,\underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

(b) Nej!

(c) Sökt bas: $\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sökt matris: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Enhetskvadraten avbildas på parallellogrammen med hörn i (0,0), (2,1), (3,1) och (1,0) (nya koordinater). Avbildningen är en skjuvning.

8.2.8. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $\lambda = 0$: $(1, 2, 1)$, $\lambda = 3$: $(1, -1, 1)$.

8.2.9. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$. Godtycklig ON-bas med $\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{u}}$ vridningsaxeln.

(c) argumentet $= \pm v$, d v s $\pm$vridningsvinkeln.

8.2.11. (b) $BC = CB$

(c) $A_{\underline{\mathbf{f}}}^N = \lambda_1^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & Na \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

8.2.12. (a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 30$

(b) $A^{-1} = \frac{1}{30}(13I - A) = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

8.3.1. (a) Egenvärden: 3, -3 (dubbel). ON-bas: $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

(b) Egenvärden: 3 (dubbel), 1. ON-bas: $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.

(c) Egenvärden: 9, 6, 3. ON-bas: $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$.

(d) Egenvärden: 6, 0, -2. ON-bas: $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

Kolla om $\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3$. Om så är fallet är det en höger ON-bas enligt definitionen av vektorprodukt.

8.3.2. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4)$.

8.3.3. (a) $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ (egenvektorer till $\lambda = 1$),

$\mathbf{f}_4 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (egenvektor till $\lambda = -3$), $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

(b) $\mathbb{R}^4_{F,1} = \{\underline{\mathbf{e}}X \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$,

$$\mathbb{R}^4_{F,-3} = \left\{\underline{\mathbf{e}}X \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0\\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0\\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

d v s de ekvationssystem du hamnar i efter elimination, då du skall beräkna egenvektorerna. Observera att det finns oändligt många sätt att skriva $\mathbb{R}^4_{F,-3}$ som lösningsrum.

8.3.4. (b) $F(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2\mathbf{b}$, $F(\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2\mathbf{a}$, $F(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

(c) $A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&|\mathbf{a}|^2\\0&|\mathbf{a}|^2&0\end{pmatrix}$.

(d) Vektorer parallella med $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ eller $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ är egenvektorer.

(e) Egenvärden 0, $|\mathbf{a}|^2$ och $-|\mathbf{a}|^2$, matris $A_{\underline{\mathbf{g}}} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&|\mathbf{a}|^2&0\\0&0&-|\mathbf{a}|^2\end{pmatrix}$.

(f) $A_{\underline{\mathbf{g}}} = \begin{pmatrix}|\mathbf{a}|^2&0&0\\0&|\mathbf{a}|^2&0\\0&0&|\mathbf{a}|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

(g) F speglar först i normalplanet till $\mathbf{a}-\mathbf{b}\parallel\mathbf{g}_3$, projicerar sedan i normalplanet till $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\parallel\mathbf{g}_1$ för att sedan sträcka faktorn $|\mathbf{a}|^2$.

8.3.5. $(1,0,-1)$, $A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}11&-1&-10\\-1&2&-1\\-10&-1&11\end{pmatrix}$.

8.3.6. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

8.3.7. Vektorerna i $\mathbb{W}$ är egenvektorer med egenvärde 1. $t(1,-1,-1,1)$, $t\neq 0$ är egenvektorer med egenvärde 0. Sökt bas (exempelvis) $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$, $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)$, $\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$.

8.3.8. F har matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi har att $(1,0,0)$ går över i $(0,0,1)$, $(0,0,1)$ i $(0,1,0)$ och $(0,1,0)$ i $(1,0,0)$ och F är således en vridning medurs $120°$. Vridningsaxeln är egenvektor med egenvärde 1; $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Följaktligen finns endast ett reellt egenvärde $\lambda = 1$ och tillhörande egenvektorer är $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

8.3.9. (a) Linjens normal, $(3, -2)$ och linjens riktningsvektor, $(2, 3)$ är egenvektorer med egenvärde -1 respektive 1. $A_{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

8.3.10. T ex $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hur många fler finns det?

8.3.11. $\lambda = 0$: $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$, $\lambda = 9$(dubbel): $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$,

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d v s F är en sammansättning av en ortogonalprojektion på planet med $\mathbf{f}_1$ som normal, $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, och en sträckning med en faktor 9.

8.3.12. (c) F är antingen en sträckning faktorn 2 eller en ortogonalprojektion på ett underrum följt av en sträckning faktorn 2.

9.1.1. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) ej kvadratisk form, (c) ej kvadratisk form,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$,

9.1.2. (a) Signatur $= (1, 1)$, rang $= 2$, positivt definit, t ex $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = \phantom{3x - {}} y \end{cases}$,

$Q(x', y') = \frac{1}{3}\left(x'^2 + 11y'^2\right)$

(b) Signatur $= (1, 1, 0)$, rang $= 2$, positivt semidefinit.

9.1.3. (a) $Q(x, y, z) = 3\left(x + y + \frac{1}{2}z\right)^2 - (y - 2z)^2 + \frac{13}{4}z^2$, d v s signatur $= (1, 1, -1)$, rang $= 3$ och indefinit,

(b) $Q(x, y, z) = 2\left(y + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}z\right)^2 - \frac{3}{8}(2x + 5z)^2 + \frac{13}{4}z^2$ så signatur, rang och teckenkaraktär är samma som i (a).

(c) Varje kvadratkomplettering som svarar mot ett bas/koordinatbyte ger samma rang och signatur. Se Sats 9.1.6 (Tröghetslagen) i boken.

9.1.4. Positivt semidefinit, egenvärden 3 (dubbel) och 0.

9.1.5. (a) Q är diagonal i givna basen, positivt semidefinit.

(b) $Q(\underline{\mathbf{f}}\,Y) = 6y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$, indefinit, $\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

(c) $Q(\underline{\mathbf{f}}\,Y) = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, indefinit,
$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(d) $Q(\underline{\mathbf{f}}\,Y) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, positivt definit,
$\mathbf{f}_1 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

9.1.6. (a) Indefinit, rang =3, signatur $= (1, 1, -1)$,

(b) positivt semidefinit, rang =2, signatur $= (1, 1, 0)$

(c) positivt definit, rang =3, signatur $= (1, 1, 1)$.

9.1.7. (a) Max $= 2 + \sqrt{5}$, min $= 2 - \sqrt{5}$, (b) Max $= 4(2 + \sqrt{5})$, min $= 4(2 - \sqrt{5})$.

9.1.8. (a) Största värdet $= 2 + \sqrt{3}$, minsta värdet $= 2 - \sqrt{3}$

(b) Största värdet antas i $\frac{\pm 1}{\sqrt{6 + 2\sqrt{3}}}\left(1, 1, \sqrt{3} + 1\right)$,
minsta värdet antas i $\frac{\pm 1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}\left(1, 1, -\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)$

9.1.9. $\frac{2\pi}{3}$. Har du gjort uppgift 9.1.5(c) har du redan gjort så gott som alla räkningar.

9.1.10. Flera alternativ. T.ex. planet: $x_1 + x_2 = 0$.

9.1.11. Maximum=5. Antas i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0, 0)$

Minimum=-2. Antas i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 0, -1, 2)$

9.1.12. Kvadratkomplettering ger $Q = (x + y)^2 + (z + \frac{a}{2}y)^2 + \frac{8 - a^2}{4}y^2$. Q är indefinit om $|a| > 2\sqrt{2}$, positivt semidefinit om $|a| = 2\sqrt{2}$ och positivt definit om $|a| < 2\sqrt{2}$.

9.2.1. (a) Ellips, (b) hyperbel.

9.2.2. Egenvärdena är -8 och 2, alltså en hyperbel. Asymptoter, $x + y = 0$ och $x - 7y = 0$.

9.2.3. Egenvärden 2 och 8 med egenvektorer $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ resp $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Halvaxellängder $\sqrt{\frac{3}{2}}$ och $\sqrt{\frac{3}{8}}$ så arean blir $\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{3\pi}{4}$.

9.2.4. (a) $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ellips, $\left(\dfrac{y_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2 - \sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$

(b) $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, hyperbel, $\left(\dfrac{y_1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{y_2 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)^2 = -1$

(c) $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\dfrac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, parabel, $y_1 = \dfrac{\sqrt{29}}{3}y_2^2$

9.2.5. (a) Kurvan i ny bas: $4y_1^2 - 2y_2^2 = 1$.

(b) En ON-bas: $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Punkter närmast origo: $Y = \pm\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ som ger

$X = TY = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9.2.6. Signatur $(1, -1)$, alltså en hyperbel. Medelpunkt: $\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

9.2.7. Medelpunkten har ortsvektorn

(a) $\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \sqrt{5}\mathbf{f}_2 = \sqrt{5}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d v s medelpunkten är $(1, 2)$,

(b) $\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} = -\sqrt{5}\mathbf{f}_2 = -\sqrt{5}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, d v s medelpunkten är $(-1, -2)$.

9.2.8. De kvadratiska formerna har samma egenvektorer. Kurvorna är ellipser: $4y_1^2 + 2y_2^2 = 12$ respektive $y_1^2 + 3y_2^2 = 13$. Vilket ger skärningspunkterna $\pm(1, \pm 2)$ i nya basen. Återgång till gamla ger $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3, 1)$, $\quad \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 3)$.

9.2.9. (a) Enhetscirkeln resp en ellips.

(b) $0 < k < 5$ eller $k > 10$: inga skärningspunkter,
$k = 5$ eller $k = 10$ två skärningspunkter,
$5 < k < 10$: fyra skärningspunkter

9.2.10. Väl valt ON-system = ON-bas av egenvektorer. Linjen skär ej, ty kurvan är en hyperbel och linjen en av dess asymptoter.

9.2.11. (a) Γ är ellipsen $y_1^2 + 4y_2^2 = 1$ och L linjen $y_2 = 3$.

(b) $P_1 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ (ellipsen) och $P_2 = (0, 3)$ (linjen) i det nya koordinatsystemet ligger närmast, d v s avståndet $= \dfrac{5}{2}$.

(c) $P_1 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ och $P_2 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ i det ursprungliga koordinatsystemet.

9.2.12. (a) Egenvärden 2 och 7, d v s positiva så kurvan är en ellips.

(b) Använd Sats 9.1.11, sid 227. $\mathbf{u} = \pm\sqrt{\frac{2}{7}}\mathbf{f}_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{35}}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger det minsta avståndet $\sqrt{\frac{2}{7}}$, d v s punkterna $\pm\sqrt{\frac{2}{35}}(2,1)$ är närmast origo. $\mathbf{u} = \pm\mathbf{f}_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ger det största avståndet 1, d v s punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ är längst ifrån origo.

9.3.1. (a) En-mantlad hyperboloid, (b) två-mantlad hyperboloid, (c) ellipsoid, (d) elliptisk paraboloid, (e) hyperboloisk paraboloid.

9.3.2. Elliptisk cylinder, d kan anta alla värden $\geq \frac{1}{2}$.

9.3.3. (a) Minsta avstånd $\frac{1}{\sqrt{10}}$ från punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{130}}(3,0,2)$.

(b) Minsta avstånd $\sqrt{6}$ från punkterna $\pm\frac{\sqrt{6}}{5}(4,0,-3)$.

(c) Minsta avstånd $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ från punkterna $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}}(1,1,1)$. Störst avstånd $\sqrt{\frac{5}{2}}$ från de punkter som ligger på cirkeln med radie $\sqrt{\frac{5}{2}}$ i planet $x+y+z=0$.

9.3.4. Ellipsoid ty egenvärdena är $6, 12, 18$. Ekvation på standardform i bas av egenvektorer är

$$\left(\frac{x' - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{2/3}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{2/3}\right)^2 = 1.$$

Därmed blir halvaxellängderna $a = 2/\sqrt{3}$, $b = \sqrt{2/3}$, $c = 2/3$ och volymen

$$\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{27}.$$

Medelpunkten M har ortsvektorn

$$OM = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d v s } M = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

9.3.6. Ytan som definieras av (9.1) är en cirkulär cylinder ty egenvärdena är 9 (dubbel) och 0. Cylindern löper längs linjen med riktningsvektor $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvektor till egenvärdet 0). I egenbas får den ekvationen $9y_1^2 + 9y_2^2 = 1$ om vi tar egenvektorn till egenvärdet 0 som tredje basvektor. Den andra ytan är en sfär med radie $\frac{1}{3}$. Därmed så tangerar ytorna varann längs en cirkel med radie $\frac{1}{3}$ i planet $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. RITA!.

9.3.7. $0 < k < 1$: inga gemensamma punkter. $k > 1$: cirklar med radie $\dfrac{1}{3}$ i planen $2x - 2y + z = \pm\sqrt{k-1}$. Rita i "rätt" koordinatsystem och översätt resultatet till ursprungliga koordinaterna.

9.4.1. (a) $\begin{cases} x_1 = C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-t} \\ x_2 = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \end{cases}$. På matrisform, $X(t) = C_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $C_1 = C_2 = 1$.

(c) $\mathbf{f}_1 = e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Skall bilda nollvektorn som linjärkombination av linjärt oberoende vektorer. Följaktligen är konstanterna noll och $x_1(t) = x_2(t) = 0$ är den enda lösningen.

9.4.2. $X = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Villkoret $x_1(t) \to 0$ då $t \to \infty$ ger att $C_2 = 0$ eftersom $e^{5t} \to \infty$ då $t \to \infty$. Detta ger då att $x_1(0) = 2C_1 = 2 \iff C_1 = 1$ så att $X = e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9.4.3. (a) $X(t) = C_1 e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $X(t) = -\dfrac{1}{40} e^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{27}{40} e^{-t}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9.4.4. $X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \\ -C_2 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9.4.5. (a) Karakteristiska ekvationen: $r^2 - r - 6 = 0 \iff r = 3, -2 \iff y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$.

(b) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 6x_1 + x_2 \end{cases}$.

(c) $X(t) = D_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + D_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $y = x_1 = D_1 e^{3t} - D_2 e^{-2t}$. Minustecknet framför D_2 är oväsentligt; D_2 är ju ett godtyckligt reellt tal.

(e) Det är samma polynom.

9.4.6. (a) $X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3} e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3} e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) (i) $k \neq \pm 2$, $X(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \dfrac{e^{kt}}{k^2 - 4}\begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix}$

(ii) $k = 2$, $X(t) = \dfrac{1}{4} e^{2t}\begin{pmatrix} C_1 + t \\ C_1 + 1 + t \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(iii) $k=-2,\ X(t)=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{4}e^{-2t}\begin{pmatrix}C_2-t\\-3C_2-1+3t\end{pmatrix}$

9.4.7. $C_1\sin\left(\sqrt{5}t+\delta_1\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\sin\left(t+\delta_2\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

9.4.8. $X(t)=e^t\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+4t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$

9.5.1. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{5t}+2e^{-t} & 2e^{5t}-2e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t}\end{pmatrix},\ X(t)=e^{At}X(0)=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

9.5.2. (e) $\sin At=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}\sin 5t-2\sin t & 2\sin 5t+2\sin t\\ \sin 5t+\sin t & 2\sin 5t-\sin t\end{pmatrix}$,

$\cos At=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}\cos 5t+2\cos t & 2\cos 5t-2\cos t\\ \cos 5t-\cos t & 2\cos 5t+\cos t\end{pmatrix}$

(f) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{i5t}+2e^{-it} & 2e^{i5t}-2e^{-it}\\ e^{i5t}-e^{-it} & 2e^{i5t}+e^{-it}\end{pmatrix}\right)=\cos At$,

$\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{i5t}+2e^{-it} & 2e^{i5t}-2e^{-it}\\ e^{i5t}-e^{-it} & 2e^{i5t}+e^{-it}\end{pmatrix}\right)=\sin At$

(g) $X(t)=(\cos At)X(0)+(\sin At)X\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}4\cos 5t-2\cos t\\ 4\cos 5t+\cos t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sin 5t+2\sin t\\ \sin 5t-\sin t\end{pmatrix}$.

För att vara säkra på att detta är enda lösningen måste vi egentligen lösa ekvationen på samma sätt som uppgift (9.4.7).

9.6.1. (a) $\begin{cases}a_n=5^{n-1}(3^n+4)\\ b_n=5^{n-1}(-2\cdot 3^n+2)\end{cases}$, (b) $\begin{cases}a_n=2^n\\ b_n=2^n\end{cases}$.

9.6.2. (a) Gränsvärdet existerar för alla startvärden.

Om $a_0\neq 2b_0$ så är gränsvärdet $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ = enhetsegenvektor till egenvärdet 15.

Om $a_0=2b_0$ så är gränsvärdet $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ = enhetsegenvektor till egenvärdet 5.

Observera att det endast är då startvärdet X_0 är en egenvektor till det mindre egenvärdet som vi får ett annat gränsvärde än en egenvektor till det största egenvärdet.

(b) Gränsvärde existerar endast då $a_0=b_0$, d v s X_0 = egenvektor till egenvärdet 2. Till skillnad från (a) existerar gränsvärde endast i undantagsfall. Beror på att egenvärdena har olika tecken men samma belopp. Samma beteende fås också då det till beloppet största egenvärdet är negativt.

9.6.3. $\begin{cases}a_n=a_0+2n(a_0+b_0)\\ b_n=b_0-2n(a_0+b_0)\end{cases}$, gränsvärdet $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ oberoende av startvärde. Observera dock att $(X_n)^tX_n\to\infty$ för alla $X_0\neq t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

9.6.4. (a) $a_n{=}b_{n-1}$ ger systemet $\begin{cases} a_n = & b_{n-1} \\ b_n = q{\cdot}a_{n-1} - 4b_{n-1} \end{cases}$ där $q{=}12$ i (i), -4 i (ii) och -5 i (iii).

(b) (i) $a_n = \dfrac{1}{8}\,(7{\cdot}2^n + (-6)^n)$, (ii) $a_n = (-2+3n)(-2)^{n-1}$.

(d) Nej.

(e) $a_n = \dfrac{1}{2}((1-3i)(-2+i)^n + (1+3i)(-2-i)^n)$

9.6.5. (a) $\mathbf{u}_0 = \dfrac{15}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\lambda_0 = 15$

(b) $F(\mathbf{u}_0) = 15\mathbf{u}_0$, d v s $\mathbf{u}_0 =$ egenvektor till egenvärdet 15 (det största).