Olika skalärprodukter i fysik

Vi har i kursen definierat skalärprodukt på ett reellt vektorrum V som en funktion som till $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i V ordnar ett reellt tal $(\bar{u}|\bar{v})$ och som $\forall\ \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ uppfyller

S1. $(\bar{u}|\bar{v}) = (\bar{v}|\bar{u})$
S2. $(\bar{u}|\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u}|\bar{v}) + (\bar{u}|\bar{w})$
S3. $(\bar{u}|\alpha\bar{v}) = \alpha(\bar{u}|\bar{v})$
S4. $(\bar{u}|\bar{u}) \geq 0$
S5. $(\bar{u}|\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Som exempel har vi sett skalärprodukt för geometriska vektorer, på $\mathbb{R}^n$ och på vektorrum $M_{m,n}$ av matriser. I mekanik och elektromagnetism används standardskalärprodukt på $\mathbb{R}^3$ eller på geometriska vektorer i 3D.

På vektorrum av reella envariabelfunktioner är

$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$, där $w(x)$ är en given positiv funktion,

en skalärprodukt (uppfyller S1 - S5). Detta används för Fourierserier.

I tillämpningar kan definitionen av skalärprodukt behöva generaliseras. I kvantfysik används komplexa vektorrum. Om man vill behålla $(\bar{u}|\bar{u}) \geq 0$ måste till att börja med $(\bar{u}|\bar{u})$ vara reell ("$z \geq 0$" saknar mening för komplext tal z). Om S1 byts mot $(\bar{u}|\bar{v}) = \overline{(\bar{v}|\bar{u})}$ följer att $(\bar{u}|\bar{u}) = \overline{(\bar{u}|\bar{u})}$, d.v.s. $(\bar{u}|\bar{u})$ är reell. Kravlistan i definitionen av $(\bar{u}|\bar{v}) \in \mathbb{C}$ blir

S1. $(\bar{u}|\bar{v}) = \overline{(\bar{v}|\bar{u})}$
S2. $(\bar{u}|\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u}|\bar{v}) + (\bar{u}|\bar{w})$
S3. $(\bar{u}|\alpha\bar{v}) = \alpha(\bar{u}|\bar{v})$
S4. $(\bar{u}|\bar{u}) \geq 0$
S5. $(\bar{u}|\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Ex: $((z_1, z_2, z_3)|(w_1, w_2, w_3)) = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \bar{z}_3 w_3$ på $\mathbb{C}^3$

En konsekvens är $(\alpha\bar{u}|\bar{v}) \overset{S1}{=} \overline{(\bar{v}|\alpha\bar{u})} \overset{S3}{=} \overline{\alpha(\bar{v}|\bar{u})} = \bar{\alpha}\overline{(\bar{v}|\bar{u})} \overset{S1}{=} \bar{\alpha}(\bar{u}|\bar{v})$
så t.ex. $(i\bar{u}|\bar{v}) = -i(\bar{u}|\bar{v})$.
Många böcker använder $(\alpha\bar{u}|\bar{v}) = \alpha(\bar{u}|\bar{v})$ i stället för S3 vilket då ger $(\bar{u}|\alpha\bar{v}) = \bar{\alpha}(\bar{u}|\bar{v})$. Komplexa vektorrum och skalärprodukter används också i kommunikationsteori och olika delar av matematiken.

En mer drastisk generalisering av skalärprodukt används i relativitetsteori. Man har där reella vektorrum men byter S4: $(\bar{u}|\bar{u}) \geq 0$ och S5: $(\bar{u}|\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{0}$ mot kravet $(\bar{u}|\bar{v}) = 0 \ \forall \bar{v} \Rightarrow \bar{u} = \bar{0}$, ett mildare krav. En indefinit skalärprodukt eller inre-produkt har kravlistan

S1. $(\bar{u}|\bar{v}) = (\bar{v}|\bar{u})$
S2. $(\bar{u}|\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u}|\bar{v}) + (\bar{u}|\bar{w})$
S3. $(\bar{u}|\alpha\bar{v}) = \alpha(\bar{u}|\bar{v})$
S4'. $(\bar{u}|\bar{v}) = 0 \ \forall \ \bar{v} \ \Rightarrow \ \bar{u} = \bar{0}$

Om vi tar $\mathbb{R}^4$, $\bar{u} = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ och $\bar{v} = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ och definierar

$$(\bar{u}|\bar{v}) = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

så uppfylls S1, S2, S3 och S4'. t är tid, x, y, z rum och c ljushastighet. $\mathbb{R}^4$ med denna indefinita skalärprodukt kallas Minkowski-rumtiden och används i relativitetsteori.

För $\bar{u} = (t, x, y, z)$ fås $(\bar{u}|\bar{u}) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Om $\bar{u}$ representerar en förflyttning i rumtiden långsammare än ljushastigheten c är $(\bar{u}|\bar{u}) > 0$, om $\bar{v}$ representerar en förflyttning med ljushastigheten är $(\bar{v}|\bar{v}) = 0$, om $\bar{w}$ representerar en förflyttning snabbare än ljushastighten är $(\bar{w}|\bar{w}) < 0$. Vi får en bild av **ljuskonen**. Objekt med positiv massa rör sig som $\bar{u}$ inuti konen och masslösa (t.ex. ljus/fotoner) som $\bar{v}$ längs konen medan inget kan röra sig med riktning $\bar{w}$.