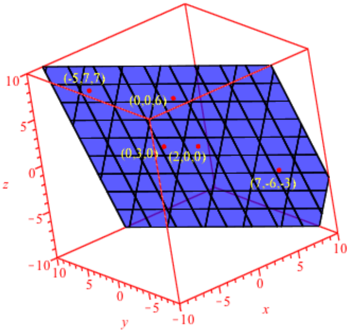
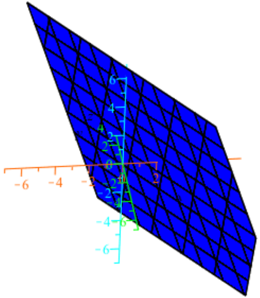
Linjära ekvationssystem och skärning mellan plan

Alla punkter (x, y, z) i 3D-rummet som uppfyller ekvationen

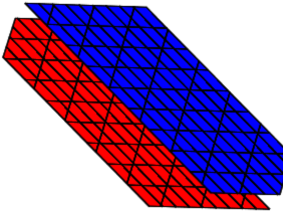
$$3x + 2y + z = 6$$

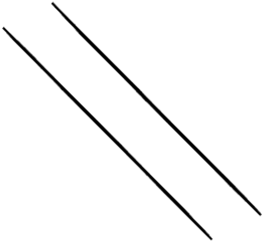
bildar ett **plan**. Mer om detta fö.4. Punkterna $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 6)$, $(-5, 7, 7)$ och $(7, -6, -3)$ uppfyller $3x + 2y + z = 6$ och ligger i planet. x-axeln skärs i $(2, 0, 0)$ ($x = 2$ om $y = z = 0$).



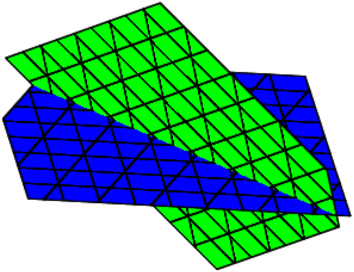


Ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ 3x+2y+z=-4 \end{cases}$ har som lösning alla punkter (x,y,z) som ligger i båda planen $3x+2y+z=6$ och $3x+2y+z=-4$. Lösning saknas (ty systemet $\Rightarrow 6=-4$) vilket betyder att planen är parallella.





Ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$ har som lösning alla punkter (x, y, z) som ligger i båda planen, dvs skärningslinjen (med oändligt många punkter så oändligt många lösningar).



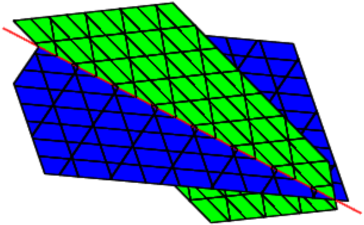
$$\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ x-y+2z=3 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} y-z &= -\frac{3}{5} \\ x+z &= \frac{12}{5} \end{cases}$$

Många sätt införa parameter, med $z=t$ t.ex. blir

$(x,y,z) = (\frac{12}{5}-t, t-\frac{3}{5}, t) = (\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}, 0) + t(-1,1,1).$
Med $y=t$ blir
$(x,y,z) = (9/5-t, t, t+3/5) = (9/5, 0, 3/5) + t(-1,1,1).$
Med $x=t$ blir
$(x,y,z) = (t, 9/5-t, 12/5-t) = (0, 9/5, 12/5) + t(1,-1,-1).$

Tre ekvivalenta beskrivningar av lösningsmängden (skärningslinjen på parameterform, mer om linjer i 3D-rummet fö.3).
$(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$, $(\frac{9}{5}, 0, \frac{3}{5})$ och $(0, \frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ är tre punkter på linjen.
$(-1,1,1)$ och $(1,-1,-1)$ är vektorer som pekar längs linjen.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \iff (x, y, z) = \left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) + t(-1, 1, 1)$$

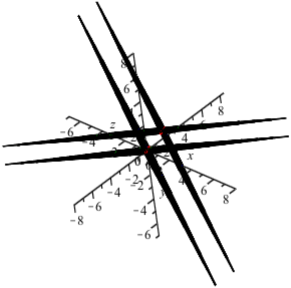


$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \iff (x, y, z) = \left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) + t(-1, 1, 1)$$

Obs att det homogena systemet (nollor i högerled)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = t(-1, 1, 1)$$

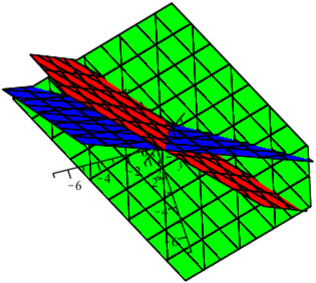
har en parallell skärningslinje genom origo som lösning.

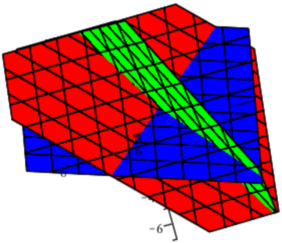


Ekvationssystem för skärning mellan tre plan:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=6 \\ x-y+2z=3 \\ x+y+z=3 \end{cases} \iff (x,y,z)=(\frac{6}{5},\frac{3}{5},\frac{6}{5})$$

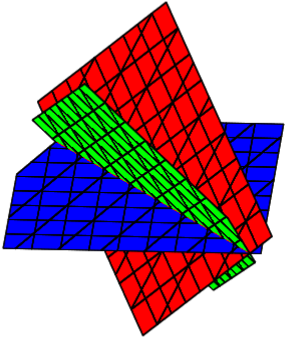
Vi har entydig lösning som är skärningspunkten $(\frac{6}{5},\frac{3}{5},\frac{6}{5})$ mellan de tre planen.

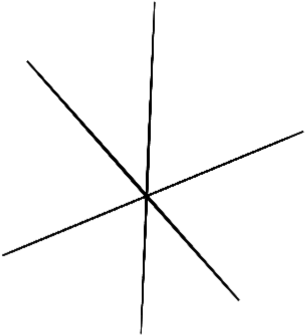




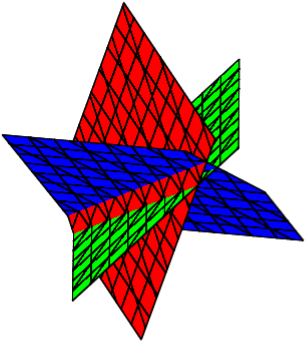
Med tre slumpvisa plan får man normalt precis en skärningspunkt. Hur ser det ut om lösning saknas eller det finns oändligt många lösningar? Fallet med oändligt många:

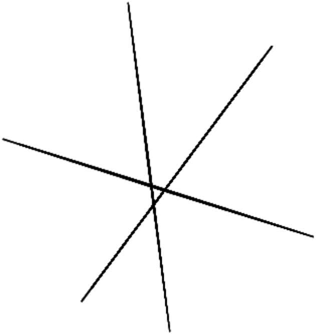
$$\left\{\begin{array}{l} {\color{blue}3x + 2y + z = 6} \\ {\color{green}x - y + 2z = 3} \\ {\color{red}x + 4y - 3z = 0} \end{array}\right. \iff (x, y, z) = (\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}, 0) + t(-1, 1, 1)$$





Systemet $\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$ saknar lösning





Med fyra slumpvisa plan får man normalt inga skärningspunkter.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = -2 \end{cases}$$ saknar lösning.