Olinjära ekvationssystem

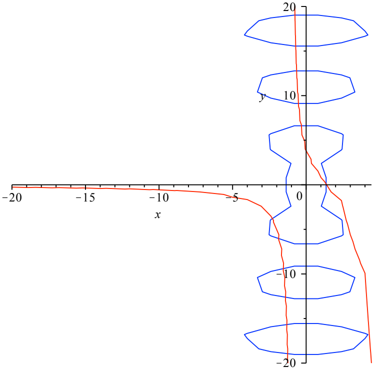
Olinjära ekvationssystem

För linjära ekvationssystem finns en fullständig teori. Vi vet att de kan ha 0, 1 eller oändligt många lösningar. Vi har också bra algoritmer och numeriska metoder för att lösa dem.

För olinjära ekvationssystem finns ingen allmän teori. Antalet lösningar kan var vilket tal som helst (icke-negativt heltal eller ∞). Algoritmer och numeriska metoder finns men kan vara svåra att analysera, hittar de t.ex. alla lösningar?

Exempel: Systemet $\begin{cases} x^2 + y\sin y = 3 \\ xy + e^x + y = 5 \end{cases}$ med två obekanta x och y är helt omöjligt att lösa för hand. Man kan använda numeriska metoder för att hitta approximativa lösningar men hittar man alla lösningar?

with(plots) : implicitplot([$x^2 + y\cdot\sin(y) = 3$, $x\cdot y + e^x + y = 5$], $x = -20..20$, $y = -20..20$, color = [blue, red])



Exempel från Flervariabelanalys (som går att lösa för hand):

Som ett led i problemet att hitta lokala maxima och minima till tvåvariabelfunktionen $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ måste man lösa det olinjära ekvationssystemet $\begin{cases} 8xe^y - 8x^3 = 0 & (1) \\ 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 8x(e^y - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x^2 = e^y$. Följ upp alla spår.

$\underline{x = 0}$ in i $(2) \Rightarrow -4e^{4y} = 0$ som saknar lösning.

$\underline{x^2 = e^y}$ in i $(2) \Rightarrow 4e^ye^y - 4e^{4y} = 0 \Leftrightarrow e^{2y} = e^{4y} \Leftrightarrow 2y = 4y$
$\Leftrightarrow y = 0$ som ger $x^2 = e^0 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Alltså finns två lösningar: $(x, y) = (1, 0)$ och $(x, y) = (-1, 0)$.

Exempel från Flervariabelanalys (som går att lösa för hand):

Som ett led i problemet att hitta lokala maxima och minima till tvåvariabelfunktionen $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ måste man lösa det olinjära ekvationssystemet $\begin{cases} 8xe^y - 8x^3 = 0 & (1) \\ 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 8x(e^y - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x^2 = e^y$. Följ upp alla spår.

$\underline{x = 0}$ in i (2) $\Rightarrow -4e^{4y} = 0$ som saknar lösning.

$\underline{x^2 = e^y}$ in i (2) $\Rightarrow 4e^ye^y - 4e^{4y} = 0 \Leftrightarrow e^{2y} = e^{4y} \Leftrightarrow 2y = 4y$ $\Leftrightarrow y = 0$ som ger $x^2 = e^0 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Alltså finns två lösningar: $(x,y) = (1,0)$ och $(x,y) = (-1,0)$.

Obs. Vi kan inte jobba systematiskt med radoperationer på samma sätt som för linjära ekvationssystem.