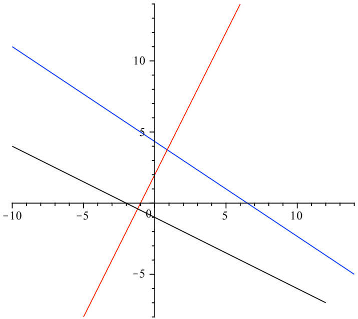
Linjer och kurvor i 2D och 3D

Linjer på parameterform i 2D

Exempel på tre linjer i planet (2D) på parameterform

$$(x, y) = (5 + 3t, 1 - 2t) = (5, 1) + t(3, -2)$$
$$(x, y) = (1 + t, 4 + 2t) = (1, 4) + t(1, 2)$$
$$(x, y) = (2t, -1 - t) = (0, -1) + t(2, -1)$$

with(*plots*) : *plot*([[5 + 3·*t*, 1 − 2·*t*, *t* = -5..3], [1 + t, 4 + 2·*t*, *t* = -6..5], [2·t, -1 − *t*, *t* = -5..6]], *scaling* = *constrained*, *color* = [*blue*, *red*, *black*])



Kurvor på parameterform i 2D

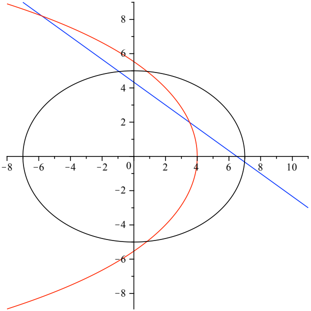
För linjen $(x(t), y(t)) = (5 + 3t, 1 - 2t) = (5, 1) + t(3, -2)$ har vi markerat x och y som funktioner $x(t)$ och $y(t)$ av t.
Vad händer om vi byter mot andra funktioner än $a + bt$?

Kurvor på parameterform i 2D

För linjen $(x(t), y(t)) = (5+3t, 1-2t) = (5,1) + t(3,-2)$ har vi markerat x och y som funktioner $x(t)$ och $y(t)$ av t.
Vad händer om vi byter mot andra funktioner än $a + bt$?

$(x(t), y(t)) = (4-3t^2, 4t + \sin t)$, $(x(t), y(t)) = (7\cos t, 5\sin t)$

with(plots) : plot([[5 + 3·t, 1 − 2·t, t=−4..2], [4 − 3·t^2, 4·t + sin(t), t=−2..2], [7·cos(t), 5·sin(t), t=−Pi..Pi]], color = [blue, red, black])



Man får <u>kurvor</u> på parameterform.

Parameterform är den mest allmänna formen för kurvor.

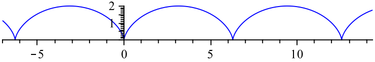
En funktionsgraf $y = f(x)$ är specialfallet $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$.

I Envariabelanalys beräknar man längden av kurvan $(x(t), y(t))$ för $a \leq t \leq b$ som

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

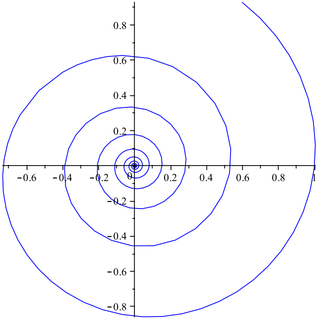
Cykloid

$$(x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$



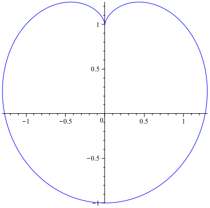
Spiral

$$(x(t), y(t)) = (e^t \cos 10t, e^t \sin 10t)$$



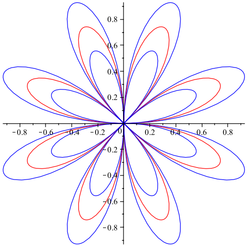
Hjärta

$$(x(t), y(t)) = ((1 - \sin t)\cos t, 1 + (1 - \sin t)\sin t)$$



Blomma ($k = 0.6,\ 0.8$ och 1)

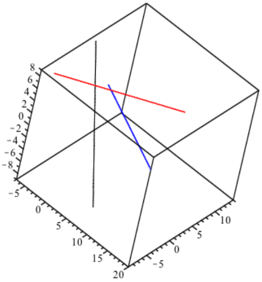
$$(x(t), y(t)) = k(\cos t \sin 4t, \sin t \sin 4t)$$

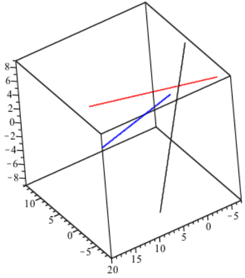


Linjer på parameterform i 3D

Exempel på tre linjer i rummet (3D) på parameterform

$$(x(t), y(t), z(t)) = (5 + 3t, 1 - 2t, 2 + t) = (5, 1, 2) + t(3, -2, 1)$$
$$(x(t), y(t), z(t)) = (1 + t, 4 + 2t, 3 - t) = (1, 4, 3) + t(1, 2, -1)$$
$$(x(t), y(t), z(t)) = (2t, -1 - t, -3t) = (0, -1, 0) + t(2, -1, -3)$$

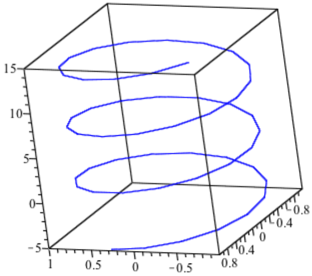




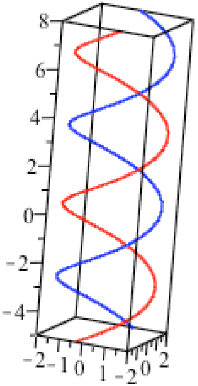
Kurvor på parameterform i 3D

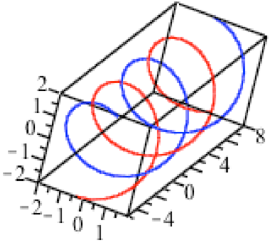
Parameterform är naturliga formen att ange kurvor i rummet (3D).

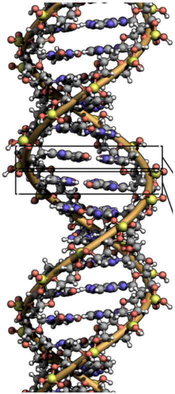
Helix $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t)$



Dubbelhelix $\{(2\cos t, 2\sin t, t), (2\cos t, 2\sin t, t+\pi)\}$
och DNA (bild: Wikipedia).







Längden av kurvan $(x(t), y(t), z(t))$ för $a \leq t \leq b$ är

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Man kan också beräkna krökningen av kurvan

$$\frac{([y'(t)z''(t) - z'(t)y''(t)]^2 + [z'(t)x''(t) - x'(t)z''(t)]^2 + [x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)]^2)^{1/2}}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2)^{3/2}}$$

som naturligtvis är 0 för linjer (ty $x(t) = a + bt \Rightarrow x'(t) = b \Rightarrow x''(t) = 0$, även $y''(t) = z''(t) = 0$) och konstant för en helix (varför?).

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, \sin 2t)$$

$$(x(t), y(t), z(t)) = ((7 + \sin 25t)\cos t, (7 + \sin 25t)\sin t, 2\cos 25t)$$