$$\mathbb{P}_2$$

Låt $\mathbb{P}_2$ beteckna mängden av polynom av grad högst 2. Det betyder att p tillhör $\mathbb{P}_2$ om $p(x) = ax^2 + bx + c$ där a, b och c är reella tal.
Några exempel: $x^2 + 3x - 7, \quad -2x^2 - 3, \quad 5x + \pi, \quad 0$

Man kan addera två polynom p och q i $\mathbb{P}_2$ och får då ett nytt polynom $p + q$ i $\mathbb{P}_2$.
Exempel: $p(x) = 2x^2 - x + 6,\ q(x) = x^2 + 4x \quad \Rightarrow (p+q)(x) =$
$= p(x) + q(x) = (2+1)x^2 + (-1+4)x + (6+0) = 3x^2 + 3x + 6$

Man kan också multiplicera ett polynom p i $\mathbb{P}_2$ med ett reellt tal r och får då ett nytt polynom rp i $\mathbb{P}_2$.
Exempel: $p(x) = 2x^2 - x + 6,\ r = -3 \quad \Rightarrow (rp)(x) = r \cdot p(x) =$
$= (-3 \cdot 2)x^2 + ((-3) \cdot (-1))x + (-3 \cdot 6) = -6x^2 + 3x - 18$

Övning 1: Låt $\tilde{P}_2$ vara mängden av polynom av grad *exakt* 2, dvs $a \neq 0$ i $ax^2 + bx + c$. Visa att summan av två polynom i $\tilde{P}_2$ inte nödvändigtvis tillör $\tilde{P}_2$.

Övning 2: Visa att produkten av ett polynom i $\tilde{P}_2$ med ett reellt inte nödvändigtvis tillör $\tilde{P}_2$.

Dessa två egenskaper är viktiga och vi ska se att $\mathbb{P}_2$ är ett trevligare matematiskt objekt än $\tilde{P}_2$.

Vi ser att alla element i $\mathbb{P}_2$ kan uttryckas som kombinationer av de tre elementen x^2, x och 1. Vi kallar sådana kombinationer för linjärkombinationer och $\{x^2, x, 1\}$ en bas för $\mathbb{P}_2$. Koefficienterna 2, 3 och 7 i $p(x) = 2x^2 + 3x + 7$ kallas koordinater för $p(x)$ i denna bas.

Ibland vill man ha en annan bas. Om vi tar t.ex. $\{x^2, x+1, 1\}$ som bas blir $p(x) = 2x^2 + 3x + 7 = 2x^2 + 3(x+1) + 4 \cdot 1$ och då blir koordinaterna 2, 3 och 4 i nya basen (koefficienterna framför elementen i basen). Varför använder man inte alltid den enkla basen $\{x^2, x, 1\}$? Jo, det visar sig helt enkelt att problem i olika tillämpningar studeras enklast i olika baser.

Övning 3: Bestäm koordinaterna för $p(x) = 2x^2 + 3x + 7$ i basen $\{2x^2 + 3, x + 2, 1\}$.

Övning 4: Bestäm koordinaterna a, b och c för $q(x) = 3x^2 - 2x - 1$ i basen $\{x^2 + x, x^2 + 1, x + 1\}$, d.v.s. bestäm a, b och c så att $q(x) = a(x^2 + x) + b(x^2 + 1) + c(x + 1)$. Utnyttja att båda leden måste ha samma koefficienter framför varje potens av x (varför?).

Man inser lätt att två element i $\mathbb{P}_2$ inte räcker som bas. Det finns inte två polynom i $\mathbb{P}_2$ som kan kombineras och ge alla polynom i $\mathbb{P}_2$. Tre räcker uppenbarligen (t.ex. $\{x^2, x, 1\}$ duger). Om man har fyra stycken så är det möjligt att alla polynom i $\mathbb{P}_2$ kan fås som en linjärkombination av dem men eftersom det räcker med tre så kallar man inte mängder med fyra eller fler för baser. En bas ska bara innehålla det nödvändiga.

Bildar alla mängder med tre element en bas? Om inte, vad är kraven för att de ska göra det?

Ta t.ex. mängden $M = \{x^2, x^2 + 2x + 2, x + 1\}$. En allmän linjärkombination blir

$$ax^2 + b(x^2 + 2x + 2) + c(x + 1) = (a + b)x^2 + (2b + c)x + (2b + c) \cdot 1.$$

Vi noterar att de sista två koefficienterna båda är $2b + c$, de är alltså lika! Vi kan då bara bilda polynom med dessa koefficienter lika vilket betyder att det finns många polynom i $\mathbb{P}_2$ som inte är en kombination av elementen i M. Därför är M inte en bas för $\mathbb{P}_2$ trots att den har tre element.

Orsaken till att $M = \{x^2, x^2 + 2x + 2, x + 1\}$ inte är en bas är att ett element i M är en kombination av de övriga två, t.ex. är
$x^2 + 2x + 2 = 1 \cdot x^2 + 2(x + 1)$.
För att tre element ska bilda en bas får detta inte ske, utan de måste vara linjärt oberoende som man brukar säga.

Övning 5: Kan $p(x) = x^2 - 3x + 1$ och $q(x) = 2x^2 + x - 2$ skrivas som linjärkombinationer av $\{x^2 + 1, x\}$?

Övning 6: För vilka värden på talet α bildar $\{x^2 + x + 1, x^2 - 1, x + \alpha\}$ en bas för $\mathbb{P}_2$?

Vi har nu sett att varje bas för $\mathbb{P}_2$ har tre element. Vi säger att $\mathbb{P}_2$ har dimension 3.

Två av de viktigaste egenskaperna för $\mathbb{P}_2$ var att

1. Om p och q tillhör $\mathbb{P}_2$ så tillhör $p+q$ också $\mathbb{P}_2$
2. Om p tillhör $\mathbb{P}_2$ och r är ett reellt tal så tillhör rp också $\mathbb{P}_2$

Om p, q och m är godtyckliga polynom i $\mathbb{P}_2$ och om r och s är godtyckliga reella tal kan man enkelt konstatera att följande regler också alltid gäller:

3. $p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$
4. $(p(x)+q(x))+m(x)=p(x)+(q(x)+m(x))$
5. Det finns ett polynom $\bar{0}(x)=0x^2+0x+0$ (nollelement) så att $p(x)+\bar{0}(x)=p(x)$
6. $(rs)p(x)=r(sp(x))$
7. $1\cdot p(x)=p(x)$
8. $0\cdot p(x)=\bar{0}(x)$
9. $(r+s)p(x)=rp(x)+sp(x)$
10. $r(p(x)+q(x))=rp(x)+rq(x)$

Dessa regler är helt uppenbara i $\mathbb{P}_2$, varför skriva upp dem? Jo, mängder som uppfyller 1 - 10 kallas vektorrum eller linjära rum. $\mathbb{P}_2$ är alltså ett vektorrum och snart kommer fler exempel.

Övning 7: Visa (eller inse) att $\mathbb{P}_1$ (polynom av grad högst 1) och $\mathbb{P}_3$ är vektorrum.

Övning 8: Varför är inte $\tilde{P}_2$ (polynom av grad exakt 2) ett vektorrum (vilka regler bryts)?

Polynom av typen $ax^2 + c$ ser man lätt att de uppfyller kraven 1 - 10 på att bilda ett vektorrum. Vad ska vi kalla det? En bas för detta rum är t.ex. $\{x^2, 1\}$. Den har två element och därför är rummets dimension 2. Eftersom det är en delmängd av $\mathbb{P}_2$ så kallar vi det ett underrum eller delrum av $\mathbb{P}_2$. Underrum av vektorrum är själva vektorrum så den allmänna teorin är tillämpbar också på dem.

Några vektorrum

1. $\mathbb{P}_2$ är mängden av alla polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ av grad högst 2. $\mathbb{P}_2$ har dimension 3 och $\{x^2, x, 1\}$ är en bas.

2. $\mathbb{R}^3$ är mängden av alla triplar (x, y, z) med addition given av $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ och multiplikation med reellt tal r given av $r(x, y, z) = (rx, ry, rz)$. $\mathbb{R}^3$ uppfyller kraven 1 - 10 och är ett vektorrum. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ är en bas och $\mathbb{R}^3$ har dimension 3.

3. $\mathbb{G}^3$ är mängden av geometriska vektorer i 3D-rummet och uppfyller kraven 1 - 10 och är därmed ett vektorrum. Vi kan ta tre vektorer $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ som inte ligger i ett och samma plan som bas för $\mathbb{G}^3$ (t.ex. en höger ON-bas) så $\mathbb{G}^3$ har dimension 3.

4. Ξ är ett (väldigt) abstrakt rum som innehåller tre element Φ, Ψ och Υ och alla linjärkombinationer av dessa och 1 - 10 antas uppfyllda. Inget av Φ, Ψ eller Υ är en kombination av de övriga. Då är Ξ ett vektorrum av dimension 3 med $\{\Phi, \Psi, \Upsilon\}$ som bas.

... med vissa likheter

1. $p(x) = 3x^2 + 5x + 4$ i $\mathbb{P}_2$ har koordinater 3, 5 och 4 i basen $\{x^2, x, 1\}$ och koordinater 3, 2 och -1 i basen $\{x^2 + x + 1, x + 1, 1\}$. Underrummet av polynom av typen $ax^2 + c$ har bas $\{x^2, 1\}$ och dimension 2.

2. $(3, 5, 4)$ i $\mathbb{R}^3$ har koordinater 3, 5 och 4 i basen $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ och koordinater 3, 2 och -1 i basen $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. Underrummet av element av typen $(a, 0, c)$ har bas $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ och dimension 2.

3. $\bar{v} = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$ i $\mathbb{G}^3$ har koordinater 3, 5 och 4 i basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ och koordinater 3, 2 och -1 i basen $\{\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_3\}$. Underrummet av vektorer av typen $a\bar{e}_1 + c\bar{e}_3$ är ett plan och har bas $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}$ och dimension 2.

4. $\Gamma = 3\Phi + 5\Psi + 4\Upsilon$ i Ξ har koordinater 3, 5 och 4 i basen $\{\Phi, \Psi, \Upsilon\}$ och koordinater 3, 2 och -1 i basen $\{\Phi + \Psi + \Upsilon, \Psi + \Upsilon, \Upsilon\}$. Underrummet av element av typen $a\Phi + c\Upsilon$ har bas $\{\Phi, \Upsilon\}$ och dimension 2.

Övning 9: Vad är det för skillnad mellan olika 3-dimensionella vektorrum?

Linjär algebra definieras ibland som teorin för vektorrum (av ändlig dimension). Genom att man har utvecklat en allmän teori för vektorrum kan man studera många typer av objekt samtidigt trots att de kan verka helt olika till sin natur. Termer som förekommer i allmänna teorin är bl.a. koordinater, bas, linjärkombination, linjärt oberoende och dimension. Priset för att studera så allmänna objekt är att det kan kännas abstrakt vilket får balanseras av att man ger olika konkreta exempel. Exempel underlättar förståelsen av teorin men kan inte ersätta den.

Svar på övningar. 1. T.ex. $x^2 + (x - x^2) = x$ har grad 1. 2. $0 \cdot p(x) = \bar{0}$ har inte grad 2. 3. 1, 3 och -2. 4. 1, 2 och -3 5. p ja, q nej 6. $\alpha \neq 2$ 7. samma som för $\mathbb{P}_2$ (1 - 10 uppfylls trivialt) 8. 1 och 2 uppfylls ej (se övn. 1 och 2) 9. olika tolkning av element men lika beräkningsmässigt