Effektiv matrismultiplikation ?

Multiplikation av komplexa tal

Låt $z = a + ib$ och $w = c + id$. Enligt definition (Grundkurs/Gymn.) :

$zw = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

Ex: $(2 + i)(5 + 3i) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 + i(2 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 7 + 11i$

Fyra multiplikationer av reella tal behövdes, ac, bd, ad och bc.

Multiplikation av komplexa tal

Låt $z = a + ib$ och $w = c + id$. Enligt definition (Grundkurs/Gymn.) :

$zw = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

Ex: $(2 + i)(5 + 3i) = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 + i(2 \cdot 3 + 1 \cdot 5) = 7 + 11i$

Fyra multiplikationer av reella tal behövdes, ac, bd, ad och bc.
Sätt nu $\alpha = a(c + d)$, $\beta = (b - a)c$ och $\gamma = (a + b)d$. En reell multiplikation behövs för att beräkna var och en av α, β och γ, totalt tre multiplikationer. Nu gäller

$\alpha - \gamma = ac + ad - ad - bd = ac - bd$ och
$\alpha + \beta = ac + ad + bc - ac = ad + bc$, d.v.s.
$zw = \alpha - \gamma + i(\alpha + \beta)$

så zw kan beräknas med bara tre multiplikationer (kostar lite fler additioner visserligen).
Med $z = 2 + i$ och $w = 5 + 3i$ fås $\alpha = 2 \cdot (5 + 3) = 16$,
$\beta = (1 - 2) \cdot 5 = -5$, $\gamma = (2 + 1) \cdot 3 = 9$ och

$zw = 16 - 9 + i(16 + (-5)) = 7 + 11i$

Multiplikation av 2×2 - matriser

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Enligt definition:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

8 multiplikationer av reella tal behövdes, ae, bg, af, bh, ce, dg, cf, dh.

Multiplikation av 2×2 - matriser

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Enligt definition:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

8 multiplikationer av reella tal behövdes, ae, bg, af, bh, ce, dg, cf, dh. Sätt nu $\alpha = (a+d)(e+h)$, $\beta = (c+d)e$, $\gamma = a(f-h)$, $\delta = d(g-e)$, $\varepsilon = (a+b)h$, $\lambda = (c-a)(e+f)$ och $\mu = (b-d)(g+h)$. En reell multiplikation behövs för att beräkna var och en av α till μ, totalt 7 multiplikationer. Nu gäller

$\alpha + \delta - \varepsilon + \mu = ae + ah + de + dh + dg - de - ah - bh + bg + bh$
$-dg - dh = ae + bg$, $\quad \beta + \delta = ce + de + dg - de = ce + dg$,
$\gamma + \varepsilon = af - ah + ah + bh = af + bh$ och $\alpha - \beta + \gamma + \lambda =$
$ae + ah + de + dh - ce - de + af - ah + ce + cf - ae - af = cf + dh$

Multiplikation av 2×2 - matriser

$\alpha = (a+d)(e+h)$, $\beta = (c+d)e$, $\gamma = a(f-h)$, $\delta = d(g-e)$, $\varepsilon = (a+b)h$, $\lambda = (c-a)(e+f)$ och $\mu = (b-d)(g+h)$ ger alltså

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta-\varepsilon+\mu & \gamma+\varepsilon \\ \beta+\delta & \alpha-\beta+\gamma+\lambda \end{pmatrix}$$

så AB kan beräknas med bara 7 multiplikationer.

Med $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=6$, $g=7$ och $h=8$ fås $\alpha = (1+4)(5+8) = 65$, $\beta = (3+4)\cdot 5 = 35$, $\gamma = 1\cdot(6-8) = -2$ $\delta = 4\cdot(7-5) = 8$, $\varepsilon = (1+2)\cdot 8 = 24$, $\lambda = (3-1)(5+6) = 22$, $\mu = (2-4)(7+8) = -30$ och

$$AB = \begin{pmatrix} 65+8-24+(-30) & (-2)+24 \\ 35+8 & 65-35+(-2)+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Multiplikation av $n \times n$ - matriser

I definitionen av matrisprodukt krävs vid multiplikation av två $n \times n$ - matriser A och B att n^2 element i AB ska beräknas. För varje element görs n multiplikationer av reella tal, totalt behövs då n^3 multiplikationer. För $n = 2$ behövs $2^3 = 8$ multiplikationer. Den alternativa metoden med 7 multiplikationer upptäcktes 1969 (ej forntid!) av Volker Strassen då han försökte bevisa att det skulle vara omöjligt att klara det med färre än 8. Färre än 7 är dock omöjligt.

Multiplikation av $n \times n$ - matriser

I definitionen av matrisprodukt krävs vid multiplikation av två $n \times n$ - matriser A och B att n^2 element i AB ska beräknas. För varje element görs n multiplikationer av reella tal, totalt behövs då n^3 multiplikationer. För $n = 2$ behövs $2^3 = 8$ multiplikationer. Den alternativa metoden med 7 multiplikationer upptäcktes 1969 (ej forntid!) av Volker Strassen då han försökte bevisa att det skulle vara omöjligt att klara det med färre än 8. Färre än 7 är dock omöjligt.

För 3×3 - matriser har man hittat en algoritm som behöver 23 multiplikationer vilket är färre än $3^3 = 27$. Det är okänt om det går med färre än 23 men man vet att färre än 19 är omöjligt.

För små matriser tjänar man inte på att använda dessa metoder jämfört med definitionen.

Multiplikation av $n \times n$ - matriser

I definitionen av matrisprodukt krävs vid multiplikation av två $n \times n$ - matriser A och B att n^2 element i AB ska beräknas. För varje element görs n multiplikationer av reella tal, totalt behövs då n^3 multiplikationer. För $n = 2$ behövs $2^3 = 8$ multiplikationer. Den alternativa metoden med 7 multiplikationer upptäcktes 1969 (ej forntid!) av Volker Strassen då han försökte bevisa att det skulle vara omöjligt att klara det med färre än 8. Färre än 7 är dock omöjligt.

För 3×3 - matriser har man hittat en algoritm som behöver 23 multiplikationer vilket är färre än $3^3 = 27$. Det är okänt om det går med färre än 23 men man vet att färre än 19 är omöjligt.

För små matriser tjänar man inte på att använda dessa metoder jämfört med definitionen.

För stora matriser (n mycket stort) har man lyckats visa att det finns algoritmer som kräver storleksordning $k \cdot n^{2.37}$ multiplikationer vilket är mycket bättre än n^3 (med reservation för storlek på konstanten k). För $n = 10^6$ är $n^3 = 10^{18}$ medan $n^{2.37} \sim 10^{14}$. Hur bra algoritmer som teoretiskt kan hittas är inte känt men de kan inte vara bättre än storleksordning n^2.