Fourierserier

Matte D :

Additionsformler $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) =$
$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$

$\alpha = mx,\ \beta = nx \Rightarrow 2\sin mx\sin nx = \cos(m-n)x-\cos(m+n)x$

Derivata $f(x) = \sin kx \Rightarrow f'(x) = k\cos kx$

Primitiv funktion $\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$

Integral $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = [\frac{1}{k}\sin kx]_{-\pi}^{\pi} =$
$= \frac{1}{k}(\sin k\pi - \sin k(-\pi)) = \frac{1}{k}(0-0) = 0$ om $k \neq 0$ heltal.

Då fås för $n \neq m$ positiva heltal :
$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)\,dx = 0-0 = 0$

Dessutom $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)\,dx = \pi+0 = \pi$

Vi har nu för $m > 0$ och $n > 0$ heltal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad n \neq m \\ \pi & \text{om} \quad n = m \end{cases}$$

Med samma teknik fås för $m \geq 0$ och $n > 0$ heltal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

och för $m \geq 0$ och $n \geq 0$ heltal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad n \neq m \\ \pi & \text{om} \quad n = m > 0 \\ 2\pi & \text{om} \quad n = m = 0 \end{cases}$$

Låt $w(x) > 0$ för alla x. Då gäller

1. $\int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)w(x)\,dx$
2. $\int_a^b f(x)(g(x)+h(x))w(x)\,dx =$
   $= \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx + \int_a^b f(x)h(x)w(x)\,dx$
3. $\int_a^b f(x)(cg(x))w(x)\,dx = c\int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$, $c \in \mathbb{R}$
4. $\int_a^b f(x)^2 w(x)\,dx \geq 0$
5. $\int_a^b f(x)^2 w(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ för alla x

Ja, den sista behöver ju inte gälla om $f(x) \neq 0$ bara i vissa enskilda punkter t.ex., men för kontinuerliga f är 5 garanterat sann.
1- 5 är kraven för en skalärprodukt. Om vi antar att vi har något vektorrum av envariabelfunktioner definierade för $a < x < b$ så är

$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$ en skalärprodukt.

$w(x) = 1$ för alla x, $a = -\pi$ och $b = \pi$ ger skalärprodukten

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Enligt vår tidigare beräkning är funktionerna

$$1 (= \cos 0x), \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots$$

alla ortogonala i denna skalärprodukt, t.ex.

$$(\cos 2x | \sin 7x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \sin 7x\,dx = 0$$
$$(\sin 3x | \sin 5x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin 5x\,dx = 0$$
$$(1 | \cos 8x) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos 8x\,dx = 0.$$

Normering ger ON-system $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$

Är det en ON-bas? Det är en svår fråga att svara på nu. Vektorrum av funktioner är (oftast) av oändlig dimension och då behövs oändligt många element i en bas. I kurser som Transformteori eller Fourieranalys studeras sådana frågor. Resultatet är att ON-systemet ovan fungerar som en ON-bas för vektorrum av "snälla" funktioner. Att t.ex. bara ta alla sin-funktionerna men inte cos-funktionerna skulle inte räcka.

En kontinuerlig funktion $f(x)$ kan på intervallet $-\pi < x < \pi$ skrivas
$f(x) = a_0 + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x + b_3 \sin 3x + \dots$
vilket kallas fourierserien för $f(x)$. Det ger en metod att studera $f(x)$ genom att studera dess enklare sin- och cos-beståndsdelar.

Hur bestäms koefficienterna? För t.ex. b_2, bilda
$(f|\sin 2x) = (a_0 + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x + \dots |\sin 2x) = a_0(1|\sin 2x) + b_1(\sin x|\sin 2x) + a_1(\cos x|\sin 2x) + b_2(\sin 2x|\sin 2x) + a_2(\cos 2x|\sin 2x) + \cdots = 0 \cdot a_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot a_1 + \pi \cdot b_2 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot b_3 + \cdots = \pi b_2$
(andra likheten här är inte självklar men kan motiveras)

En kontinuerlig funktion $f(x)$ kan på intervallet $-\pi < x < \pi$ skrivas
$f(x) = a_0 + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$
vilket kallas fourierserien för $f(x)$. Det ger en metod att studera $f(x)$ genom att studera dess enklare sin- och cos-beståndsdelar.

Hur bestäms koefficienterna? För t.ex. b_2, bilda
$(f|\sin 2x) = (a_0 + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x + \ldots |\sin 2x) =$
$a_0(1|\sin 2x) + b_1(\sin x|\sin 2x) + a_1(\cos x|\sin 2x) + b_2(\sin 2x|\sin 2x) +$
$a_2(\cos 2x|\sin 2x) + \cdots = 0\cdot a_0 + 0\cdot b_1 + 0\cdot a_1 + \pi\cdot b_2 + 0\cdot a_2 + 0\cdot b_3 + \cdots = \pi b_2$
(andra likheten här är inte självklar men kan motiveras)

Ex. $f(x) = x \Rightarrow$ ($=$ nedan är partiell integration, Envariabelanalys eller Gymn.)
$\pi b_n = (x|\sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = [-x \cdot \frac{\cos nx}{n}]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx =$
$-\pi \frac{\cos n\pi}{n} - \pi \frac{\cos(-n\pi)}{n} + 0 = -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi = -\frac{2\pi}{n}(-1)^n \Rightarrow b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$
På liknande sätt beräknas $a_n = \frac{1}{\pi}(x|\cos nx) = 0$ för alla n.

Detta betyder att för $-\pi < x < \pi$ gäller
$x = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{7}\sin 7x - \ldots)$

Bild av x, $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x)$, $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x)$, $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{8}\sin 8x)$ och $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots - \frac{1}{32}\sin 32x)$ för $-\pi < x < \pi$.

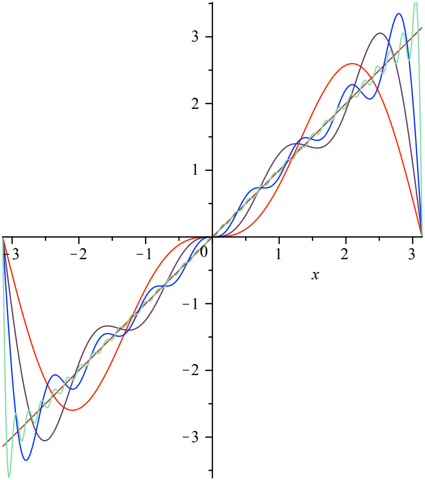
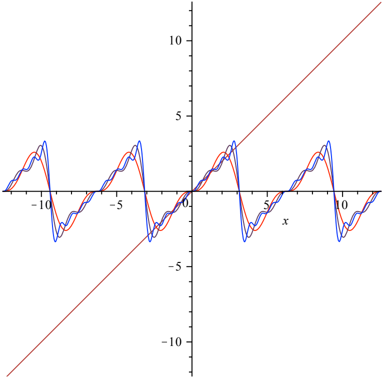


Bild av x, $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x)$, $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x)$ och $2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{8}\sin 8x)$ för $\underline{-4\pi < x < 4\pi}$.



Utanför intervallet $-\pi < x < \pi$ upprepar sig alla $\sin nx$ med period 2π och även hela fourierserien. $f(x) = x$ är bara lika med fourierserien på $-\pi < x < \pi$. Funktioner som är periodiska på hela reella axeln kan uttryckas med fourierserier på hela axeln.

Fourierserier är ett standardverktyg i Signaler och system och för problem i fysik (t.ex. svängningar), och de studeras i Transformteori och Fourieranalys.

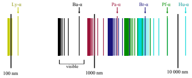
Exempel på andra ortogonala system (här bestående av polynom):

Chebyshev-polynomen $1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$ av ökande grad är ortogonala i skalärprodukten $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)/\sqrt{1-x^2}\,dx$. Tillämpas vid approximationer, t.ex. vid design av signalfilter.

Legendre-polynomen $1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \ldots$ är ortogonala i skalärprodukten $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Tillämpas i t.ex. fysik.

Hermite-polynomen $1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 12x, \ldots$ är ortogonala i skalärprodukten $(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$. Tillämpas i kvantmekanik.

Laguerre-polynomen $1, -x + 1, \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \ldots$ är ortogonala i skalärprodukten $(f|g) = \int_{0}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,dx$. Tillämpas tillsammans med Legendre-polynomen i kvantmekanik för att beskriva väteatomen och förklara dess energinivåer och spektrallinjer. (Bilder: Wikipedia)



Funktioner studeras genom studier av deras enklare beståndsdelar av ortogonala funktioner. Ofta kommer skalärprodukter automatiskt från tillämpningar, man behöver inte själv avgöra vilken skalärprodukt som ska användas.