Ekvationssystem och determinanter

Lös $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 = 6 & (2) \end{cases}$

$5\cdot(1) - 4\cdot(2)$ ger $(5 \cdot 3 - 4 \cdot 2)\, x_1 = (5 \cdot 7 - 4 \cdot 6) \quad \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{7 \cdot 5 - 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 - 4 \cdot 2} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{35 - 24}{15 - 8} = \frac{11}{7}$$

$3\cdot(2) - 2\cdot(1)$ ger $(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4)\, x_2 = (3 \cdot 6 - 2 \cdot 7) \quad \Rightarrow$

$$x_2 = \frac{3 \cdot 6 - 2 \cdot 7}{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{18 - 14}{15 - 8} = \frac{4}{7}$$

Finns något mönster?

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases} \iff x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}$$

Systemet $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ har lösning $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5})$

Notera att $\frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9 + 12 + 3 - 3 - 18 - 6}{-3 + 4 + 1 + 1 - 6 - 2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} = x_2$

Vi har kvoter med determinanten för vänsterledet i nämnaren och samma determinant men med en kolonn utbytt mot högerledet i täljaren !

Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ och $C^t = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$

Här är C_{jk} en kofaktor från A (C_{jk} är $(-1)^{j+k}$ gånger determinanten av matrisen som fås genom att ta bort rad j och kolonn k ur A).

$$AC^t = \begin{pmatrix} a_{11}C_{11} + \cdots + a_{1n}C_{1n} & \dots & a_{11}C_{n1} + \cdots + a_{1n}C_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}C_{11} + \cdots + a_{nn}C_{1n} & \dots & a_{n1}C_{n1} + \cdots + a_{nn}C_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementen på diagonalen är $\det A$ utvecklad längs olika rader. Elementen utanför diagonalen, t.ex. $a_{11}C_{n1} + \cdots + a_{1n}C_{nn}$ är som utveckling av $\det A$ men där rad n $a_{n1} \dots a_{nn}$ i A har bytts mot rad 1 $a_{11} \dots a_{1n}$, en matris med två lika rader vars determinant är 0. Alltså är element utanför diagonalen 0.

$$AC^t = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_n \Rightarrow \frac{1}{\det A} C^t = A^{-1}$$

(om $\det A \neq 0$). För en 2×2 - matris är $C_{11} = a_{22}$, $C_{12} = -a_{21}$, $C_{21} = -a_{12}$, $C_{22} = a_{11}$ och $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

T.ex. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Inte lika enkelt för 3×3 - matriser och större.

Lös $AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B$

Om $\det A \neq 0$ är entydiga lösningen

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} C^t B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Rad j i C^t ger $x_j = (C_{1j}b_1 + \cdots + C_{nj}b_n)/\det A$ där täljaren är utveckling längs kolonn j av determinanten för A med kolonn j bytt mot B.

Detta kallas Cramers regel: Lösningen på $AX = B$ ges av $x_j = \det A_j / \det A$ $(j = 1, \dots, n)$ där A_j är A med j:te kolonnen utbytt mot B.

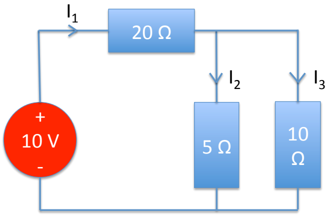
Cramers regel: $AX = B \;\Rightarrow\; x_j = \det A_j / \det A$

Principiellt intressant: kvadratiska system kan lösas med enbart determinantberäkningar.
Mindre praktisk då determinantberäkningar kostar mer arbete än vanliga lösningsmetoder.

Formel för matrisinvers: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$

Ungefär samma kommentarer.

Exempel (liten elkrets): Bestäm strömmen I_2 (I_1 och I_3 söks ej) i kretsen:



Vi har $I_1 = I_2 + I_3$, $5I_2 = 10I_3$ (samma spänning över motstånden med 5Ω och 10Ω) och $20I_1 + 5I_2 = 10$ (totalt 10 V över motstånden med 20Ω och 5Ω). Ekvationssystem för I_1, I_2 och I_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \\ 20 & 10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -10 \\ 20 & 5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{100}{350} = \frac{2}{7} \text{ (A)}$$