Föreläsning 5, matriser

1) Def av matris
2) Addition, skalning
3) Matrismultiplikation
4) Räkneregler för matrismultiplikation
5) Matriser och ekvationssystem
6) Kvadratiska matriser
7) Matrisinvers
8) Elementära matriser
9) Beräkning av matrisinvers
10) Kvadratiska matriser, ekvationssystem
    med lika många ekvationer som obekanta

1) Def av matris

Def: en m x n -matris A

är en rektangulär uppsättning av (reella) tal, ordnade i m rader och n kolonner.

Exempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 4/5 \end{pmatrix}$

är en 2x3-matris, där $A_{1,2} = -1$

Raderna och kolonnerna är ett-indexerade, och elementet i rad r, kolonn k betecknas $A_{r,k}$

Def: Mat(m,n) står för mängden av alla mxn-matriser.

Def: Om m=n så är matrisen kvadratisk.

Exempel:

$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3/2 & 5 \end{pmatrix}$ är kvadratisk, tillhör Mat(2,2).

Speciella matriser: nollmatrisen

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

är den matris i Mat(m,n) som består av enbart nollor.

Enhetsmatrisen $I = I_n \in \mathrm{Mat}_{n,n}$ är den matris I så att $I_{i,j} = 1$ om i=j, 0 annars.

Ex:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En matris med en enda rad kallas för en radmatris,

en matris med en enda kolonn för en kolonnmatris.

$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(1,4)$

$K = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4,1)$

2) Addition, skalning

Addition:

Om A,B har samma dimension så är A+B definierad.

Addition komponentvis.

A+B = C, $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Skalning:

Om A mxn, s skalär, så sA mxn, och $(sA)_{i,j} = sA_{i,j}$

Exempel: $$5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Räkneregler:

A+B = B+A

A+(B+C) = (A+B)+C

A+0 = A

s(A+B) = sA + sB

(s+t)A = sA + tA

3) Matrismultiplikation

Def: A mxn, B nxr. Då är C=AB definierad,
C är mxr, och

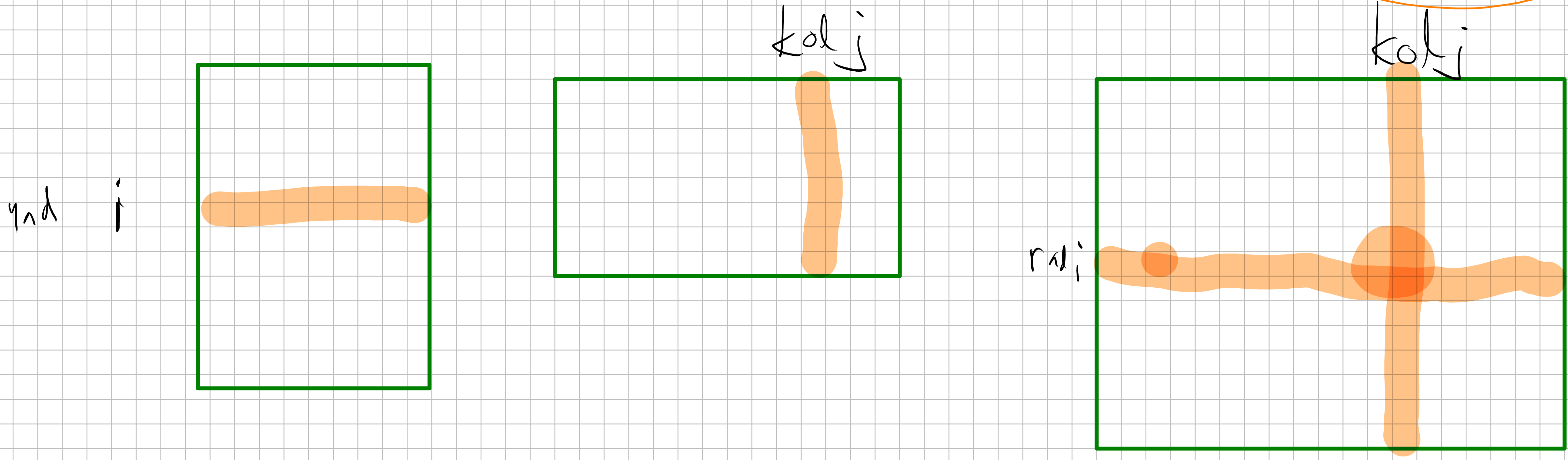
$$C_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} B_{\ell,j}$$

Exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3 \qquad 3} \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 3$$



Specialfall:

$$\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

kolonmatris till höger ger linjkomb av kol.

$$\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_1+4c_2+5c_3\\2c_1+3c_2+6c_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c:c}c_1&d_1\\c_2&d_2\\c_3&d_3\end{array}\right)=\left(\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\;\vdots\;\begin{pmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}\right)$$

blockstruktur

$$=\left(\begin{pmatrix}c_1+4c_2+5c_3\\2c_1+3c_2+6c_3\end{pmatrix}\;\vdots\;\begin{pmatrix}d_1+4d_2+5d_3\\2d_1+3d_2+6d_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}c_1+4c_2+5c_3&d_1+4d_2+5d_3\\2c_1+3c_2+6c_3&2d_1+3d_2+6d_3\end{pmatrix}$$

Blockmatriser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ae = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad bg = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ae+bg = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \cdot & \cdot \\ 7 & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

4) Räkneregler multiplikation

$A(BC) = (AB)C$

$AI = A$

$IB = B$

$A(sB) = s(AB)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$A0 = 0$

$AB \neq BA$ i allmänhet

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+cf & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$