Föreläsning 6, vektorrum

1) Definition

Def: Ett vektorrum (V, +, ., 0) är
i) en mängd V av "vektorer"
ii) som kan adderas med +,
iii) som kan skalas med reella skalärer
iv) som innehåller en "nollvektor"

Definition 5.2.1. En icke-tom mängd $\mathbb{V}$ säges vara ett *vektorrum över de reella talen* om följande gäller:

I. Det finns i $\mathbb{V}$ en operation kallad *addition*, betecknad $+$ sådan att

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V} \Longrightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

För $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}$ har denna addition egenskaperna

ADD 1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ *(Kommutativa lagen)*

ADD 2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ *(Associativ lag)*

ADD 3. I $\mathbb{V}$ finns ett nollelement, $\mathbf{0}$ så att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ *(Neutralt element)*

ADD 4. Till varje $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ finns ett element $-\mathbf{u}$ så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ *(Additiv invers)*

II. Det finns i $\mathbb{V}$ en operation kallad *multiplikation med tal*, betecknad $\cdot$ sådan att

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{V} \Longrightarrow \lambda \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{V}.$$

För $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ har denna multiplikation egenskaperna

MULT 1. $1 \cdot \mathbf{u}=\mathbf{u}$ *(Neutralt tal)*

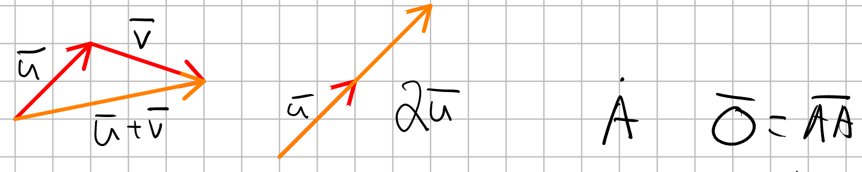
MULT 2. $\lambda \cdot(\mu \cdot \mathbf{u})=(\lambda \mu) \cdot \mathbf{u}$ *(Associativ lag)*

MULT 3. $(\lambda+\mu) \cdot \mathbf{u}=\lambda \cdot \mathbf{u}+\mu \cdot \mathbf{u}$ *(Distributiv lag)*

MULT 4. $\lambda \cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda \cdot \mathbf{u}+\lambda \cdot \mathbf{v}$ *(Distributiv lag)*

Vi kommer i fortsättningen inte att skriva ut multiplikationspunkten mellan tal och vektor, d v s vi skriver $\lambda \mathbf{u}$ istället för $\lambda \cdot \mathbf{u}$.

Ex 1 V = vektorer i planet



addition skalning nollvektor

Ex 2 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
n pos heltal

- addition: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$
- skalning: $c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n)$

Ex3 $\mathbb{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}\}$

- addition, skalning, som ovan
- EJ vektorrum!

Ex 4 V = alla $m \times n$ − matriser

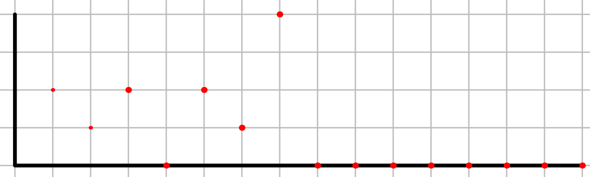
Ex 5 $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R},$ bara ändligt många $x_i \neq 0\}$

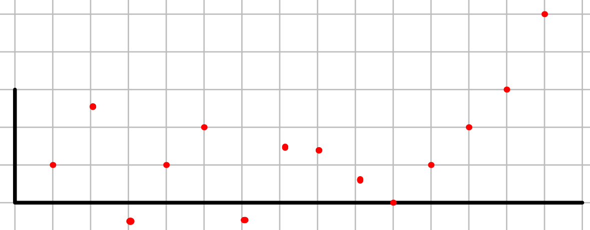
Ex 6 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+} = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

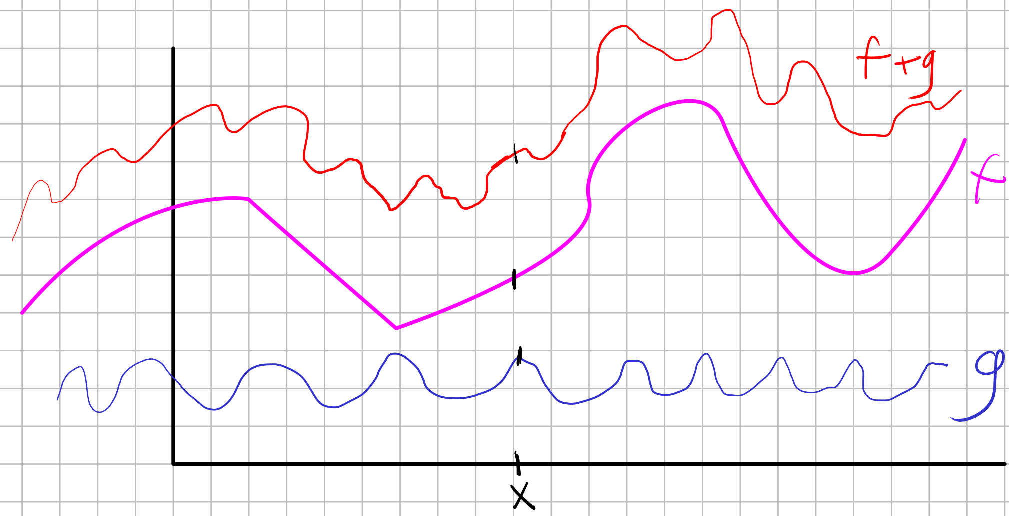
Ex 7 $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ kont$\}$

$f+g$ def av $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

cf $(cf)(x) = cf(x)$







2) Delrum

Def: Antag $(V,+,\cdot,\bar{0})$ v.r, $U \subseteq V$

Då är U ett delrum till V, $U \leq V$,

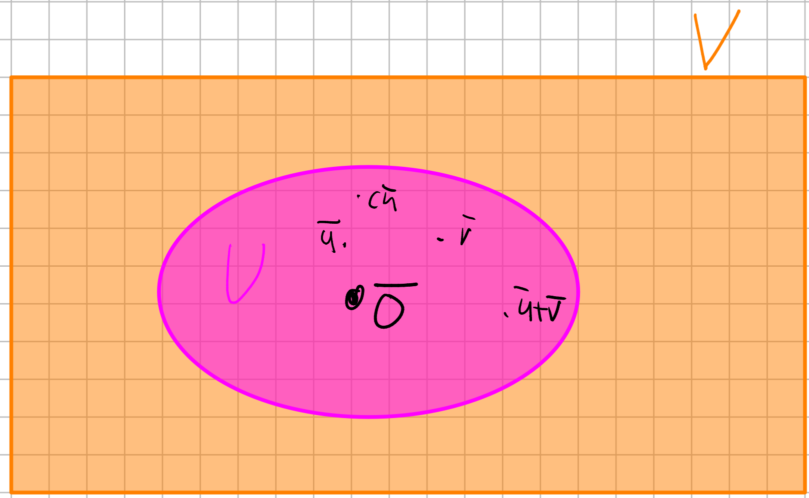
om (i) $\bar{0} \in U$

(ii) $\bar{u} \in U,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\bar{u} \in U$

(iii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$

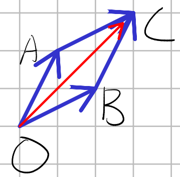
Följd: $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U \Rightarrow \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 \in U$,

mer allmänt: varje linj. komb.



Ex V = punkter i planet, addera

via $A + B = C$ med $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$



U_1 = linje genom origo

U_2 = linje ej genom origo

$U_1 \leq V$, $\quad U_2 \not\leq V$

Ex $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{ t \binom{1}{2} : t \in \mathbb{R} \}$ delrum

$U_2 = \{ \binom{1}{0} + t \binom{0}{1} : t \in \mathbb{R} \}$ ej delrum

Ex $P = \{$polynom i variabeln $x\}$

$$= \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j : c_j \in \mathbb{R}, \text{ nästan alla } c_j = 0 \right\}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (c_j + d_j) x^j$$

n pos heltal: $\mathbb{P}_n = \{ f(x) \in \mathbb{P} : \deg(f(x)) \leq n \}$

delrum

Ex $\{ f(x) \in \mathbb{P} : \deg f(x) = n \}$

ej delrum

(ty nollpolynomet ej med)

Ex $U = \{ f(x) \in \mathbb{P} : f(5) = 0 \}$

Delrum?

(i) $\text{noll}(5) = 0$ så $\text{noll} \in U$

(ii) $f(5) = 0$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf(5) = c \cdot 0 = 0$

så $cf \in U$

(iii) $f(5) = 0$, $g(5) = 0 \Rightarrow (f+g)(5) = 0 + 0 = 0$

ja, delrum!

Ex $U = \{ f(x) \in \mathbb{P}_3 : f(5) = 1 \}$

$\text{noll}(5) = 0 \neq 1$, så $\text{noll} \notin U$

ej delrum.

3) Lösningsmängder som delrum

Sats (i) Lösningsmängden $U = \{X : \underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{X} = 0\}$ till ett homogent linj. ekv.sys är ett delrum $U \leq \mathbb{R}^n$

(ii) Om $B \neq 0$ så $L = \{X : AX = B\}$ ej delrum,

men $L = X_p + U$, U delrummet ovan

(iii) Varje delrum $U \leq \mathbb{R}_n$ är lösningsrum till $AX = 0$, ngt A $n \times n$.

Ex

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

lösningsmängd $U_H = \left\{ t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

delrum

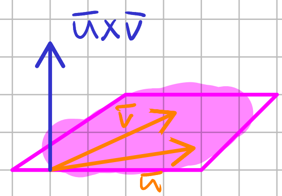
Ex

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

lösningsmängd $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + U_H$$

Ex



U = planet genom origo spännt av $\bar{u}, \bar{v}$

$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$

linj ekv: $\bar{n} \bullet \underline{e}X = \bar{0}$

$n = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad 2x + y - z = 0$

3) Linjärkombinationer, linjärt hölje

Def • V v.r., $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m \in V$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$

Då: $\bar{w} = \sum_{j=1}^{m} c_j \bar{v}_j$ linjärkombination

av element i V, $\bar{w} \in V$.

• $[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m]$ = alla linjkomb. "linjära höljet"

Sats: $[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m] \leq V$

B: $\bar{w}, \bar{u} \in [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m]$. Då $\bar{w} = \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{v}_j$, $\bar{u} = \sum_{j=1}^{n} d_j \bar{v}_j$

Så $\bar{u} + \bar{w} = \sum_{j=1}^{m} (c_j + d_j) \bar{v}_j \in [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m]$

P.s.s. för skalning.

Ex $V = \mathbb{R}^4$

$\bar{v}_1 = (0,1,1,1)$ $\bar{v}_2 = (2,1,0,2)$

$\bar{w} = 3\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (0,3,3,3) + (2,1,0,2)$
$= (2,4,3,5)$

$[\bar{v}_1, \bar{v}_2] \ni (a,b,c,d)$ om

$c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 = (a,b,c,d)$ lösbar.

$$\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & d \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & 2 & d-c \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & a/2 \\ 0 & 0 & b-c-a/2 \\ 0 & 0 & d-c-a \end{array}$$

delrum: $\{(a,b,c,d) : b-c-a/2 = 0$ och $d-c-a=0\}$

Obs: Linjärkombinationer är ändliga!

Så om $S \subseteq V$, V vr, S oändlig

så $[S] = \{ \sum_{\bar{t} \in S} c_{\bar{t}} \cdot \bar{t} \mid c_{\bar{t}} \in \mathbb{R},$

nästan alla $c_{\bar{t}} = 0 \}$

Obs $\bar{0} \in [S]$ alltid, ty $S \neq \emptyset$

$$\bar{0} = \sum_{\bar{t} \in S} 0 \cdot \bar{t}$$

Obs: Om $S \subseteq T \subseteq V$

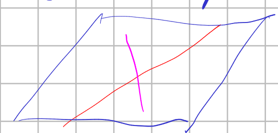
så $[S] \leq [T] \leq V$

Ex $V = C^0(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$

$[S] = \mathbb{P} \not\ni e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Ex $V = \mathbb{R}^3$ / rummet

$S = \{(1,1,1)\}$, $T = \{(1,1,1), (1,2,3)\}$



$[S] = \{t(1,1,1) : t \in \mathbb{R}\}$

$[T] = \{t(1,1,1) + s(1,2,3) : s,t \in \mathbb{R}\}$

4) Löjliga element

Sats: Om $\bar{w} \in [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n] = U_1$, $[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n, \bar{w}] = U_2$, så $U_1 = U_2$

B $U_1 \subseteq U_2$ uppenbart. Tag $\bar{u} \in U_2$,

dvs $\bar{u} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_n\bar{v}_n + t\bar{w}$. Men $\bar{w} \in U_1$, så

$\bar{w} = d_1\bar{v}_1 + \cdots + d_n\bar{v}_n$. Alltså

$$\bar{u} = c_1\bar{v}_1 + \cdots + c_n\bar{v}_n + t(d_1\bar{v}_1 + \cdots + d_n\bar{v}_n) = (c_1 + td_1)\bar{v}_1 + \cdots + (c_n + td_n)\bar{v}_n$$

Så $\bar{u} \in U_1$.

$\bar{w}$ kallas för "löjligt element".

Sats Om $U_1 = U_2$ så är $\bar{w}$ linj. komb av $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$.

Bevis $\bar{w} \in U_2 = U_1 = [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n]$.

Ex $V = \mathbb{R}^4$,

$S = \{(1,0,1,0), (0,1,1,1), (2,1,3,1)\}$

Vi beräknar $[S]$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c-a \\ 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$

så $[S] = \{(a,b,c,d) : c-a-b = 0, d-b = 0\}$

Vi beräknar $[(1,0,1,0), (0,1,1,1)]$

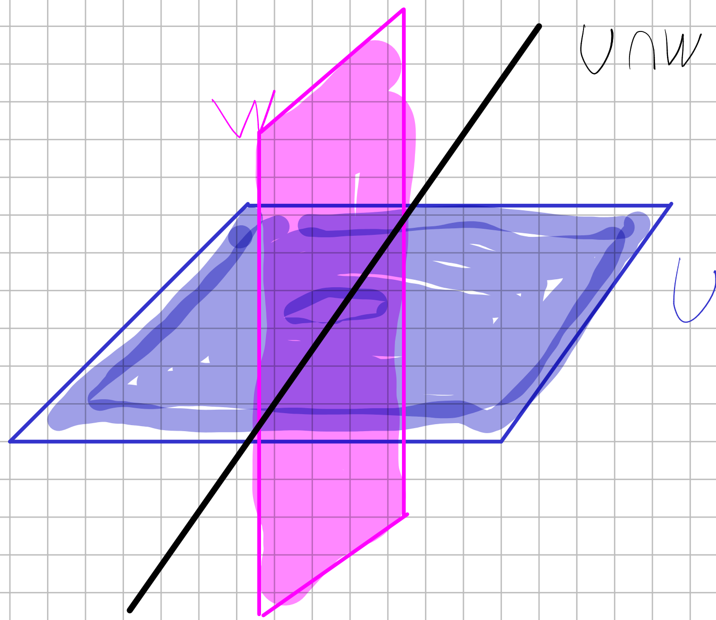
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c-a \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a-b \\ 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$$ samma

Så $(2,1,3,1)$ löjligt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(2,1,3,1) = 2 \cdot (1,0,1,0) + 1 \cdot (0,1,1,1)$

5) Snitt av delrum



Sats Om $U, W \leq V$ så

$(U \cap W) \leq V$

B) • $\bar{0} \in U \cap W$

• $\bar{f} \in U \cap W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\bar{f} \in \bar{U}, c\bar{f} \in \bar{W}$

• $\bar{f}, \bar{g} \in U \cap W \Rightarrow \bar{f} + \bar{g} \in U, \bar{f} + \bar{g} \in W$

Ex $U = [(1,0,1,0), (1,1,1,1)], W = [(1,2,3,4)]$

$U \cap W = ?$

Villkor för U: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & d-b \end{array}\right)$

För W: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$U \cap W$: $\begin{array}{l} a = t \\ b = 2t \\ c = 3t \\ d = 4t \end{array}$ och $\begin{array}{l} c = a \\ d = b \end{array}$ dvs $\begin{array}{l} 3t = t \\ 4t = 2t \end{array}$ dvs $t = 0$

$U \cap W = \{\bar{0}\}$

Ex $U = [(1,0,1,0),(1,1,1,1)]$, $W = [(1,2,3,4),(4,3,2,1),(1,1,1,1)]$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, villkor U: $a - c = 0$, $b - d = 0$

W: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 3 & 2 & c \\ 1 & 4 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & -2 & c-a \\ 0 & 3 & -3 & d-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \\ 0 & 0 & 0 & 2a-3b+d \end{array}\right)$

$U \cap W$

$$\begin{aligned} a \quad\quad - c \quad\quad &= 0 \\ b \quad\quad - d &= 0 \\ a - 2b + c \quad\quad &= 0 \\ 2a - 3b \quad + d &= 0 \end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$d = t$

$c = t$

$b = t$

$a = t$

$\boxed{(a,b,c,d) = t(1,1,1,1)}$

Skärningen!!