

Föreläsning 7 och 8, linjärt hölje, linjärt beroende, baser

- 1) Repetition: linjärkombinationer, linjärt hölje
- 2) Beroendeeckvationen, linjärt beroende
- 3) Baser, koordinater
- 4) Satser om för få, för många, rätt antal element
- 5) Dimension
- 6) Direkt summa

Repetition: V v., $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in V$

- $\bar{w} = \sum_{j=1}^m c_j \bar{v}_j \in V$, linjärkombination av $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$

- Om $S \subseteq V$ oändlig så är en linjärkomb. $\sum_{j=1}^n c_j \bar{v}_j$, $\bar{v}_j \in S$ dvs linjärkomb. är ändliga

- $[S] = \{\bar{w} : \bar{w} \text{ linj. komb. av } S\}$
linjär hölj

- $0 \in [S] \subseteq V$

Ex $V = C^0(\mathbb{R})$

$$S = \{1, x, x^2, \dots\}$$

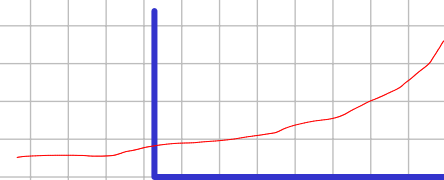
$$\exp(x) \in V$$

$$\bar{v}_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \in [S]$$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \notin [S]$$

$$[S] = P_n$$

$$[S] = P$$



Ex: $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(\underset{\bar{v}_1}{1,0,0,1}), (\underset{\bar{v}_2}{0,1,1,0}), (\underset{\bar{v}_3}{-1,0,1,-1})\}$

$\bar{w} = (a,b,c,d) \in [S]$ om $c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + c_3 \bar{v}_3 = \bar{w}$ lösbar:

$$\begin{array}{c|c} c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \sim \begin{array}{c|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ -a+d \end{array}$$

om $a=d$

2) Beroendeekvationen

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in V$$

$$\sum_{j=1}^m c_j \vec{v}_j = \vec{0} \quad (\text{b.e.})$$

Ans: hur kan nollvektorn skrivas som linj. komb.
av $\vec{v}_j$ -n?

Def $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ linjärt **o**beroende om
enda lösningen är den "triviala",
allt $c_j = 0$. Annars: beroende

$$\underline{\text{Ex}} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \vec{v}_2 = (2, -1, -1), \vec{v}_3 = (4, 1, 1)$$

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 = (0, 0, 0) \quad (\text{b.e.})$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 0 & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & \\ 0 & -3 & -3 & 0 & \\ 0 & -3 & -3 & 0 & \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} c_1 = -2t \\ c_2 = -t \\ c_3 = t \end{array}$$

Alla beroenden: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $t=0$: trivialt beroende
 $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}$

$t=-1$ (t.ex.): $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = -1$

$$2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}, \quad \vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\underline{\text{Ex}} \quad V = \mathbb{R}^4, \quad \vec{v}_1 = (1, 0, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0), \\ \vec{v}_3 = (1, 0, 1, 0)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} c_1 & c_2 & c_3 & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Enda beroende $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 = \vec{0}$

Def V vektorrum, $S \subseteq V$.

Dä S linjärt oberoende om varje ändlig delmängd till S är linjärt oberoende.

Ex $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $S = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

S linjärt oberoende ty:

välj $x^{a_1}, \dots, x^{a_n} \in S$, alla a_i olika, kan anta $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

Beroendeeckvation: $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^{a_j} = 0$ dvs konstanta nollfunktioner

Antag inte alla $c_j = 0$, låt y vara minsta index så $c_y \neq 0$

$$f(x) = \overset{\neq 0}{c_y} x^{a_y} + O(x^{a_{y+1}})$$

$f^{(a_y)}(0) = c_y a_y!$ men nollfunkt har alla derivator 0 överallt.

3) Baser och koordinater

V vektorrum, $S \subseteq V$

Def: S är en **bas** för V om

- 1) S linjärt **oberoende**
- 2) $[S] = V$

Sats: S bas för V



V varje $\bar{v} \in V$ kan **unikt** skrivas $\bar{v} = \sum_{\bar{s} \in S} c_{\bar{s}} \bar{s}$ ändlig

Beweis unikt $\Rightarrow$ bas uppenbart

Antag bas. Togs $\bar{w} \in V$. Då $\bar{w} \in [S]$ så $\bar{w} = \sum_{\bar{s} \in S} c_{\bar{s}} \bar{s}$ ändlig.

Om också $\bar{w} = \sum_{\bar{s} \in S} d_{\bar{s}} \bar{s}$ så $\bar{0} = \bar{w} - \bar{w} = \sum_{\bar{s} \in S} (c_{\bar{s}} - d_{\bar{s}}) \bar{s}$.

Men S linj. oberoende $\Rightarrow$ alla $c_{\bar{s}} - d_{\bar{s}} = 0$, så lika.

Ex $V = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$
 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

- S linj. oberoende?
- $[S] = ?$
- $\bar{w} = (x, y, z) = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + c_3 \bar{v}_3$ unikt?

$$\begin{array}{ccc|ccc|cc} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & x & 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x & 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & 2 & 0 & y & 0 & 1 & 0 & -x+y \\ 1 & 3 & 4 & 0 & z & 0 & 2 & 3 & -x+z \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & x & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -x+y & 0 & 1 & 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x-2y+z & 0 & 0 & 1 & 0 & x-2y+z \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2y-z & 1 & 0 & 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2x+y-z & 0 & 1 & 0 & 0 & -2x+y-z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x-2y+z & 0 & 0 & 1 & 0 & x-2y+z \end{array}$$

Så 1) enda linj. bas är $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

2) alla (x, y, z) linj. komb.

3) $(x, y, z) = (2x+y)\bar{v}_1 + (-2x+y-z)\bar{v}_2 + (x-2y+z)\bar{v}_3$

Ex $V = \mathbb{R}^2$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 4 & 0 & y \end{array} \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & -2x+y \end{array}$$

- Så 1) linj. bas $2 \cdot \bar{v}_1 - 1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{0}$
 2) $[S] = [\bar{v}_1]$

Koordinater

V vektorrum, $S = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ bas

OyA55A bas: $\bar{e}_1$ först, osv

$$\underline{e} = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_n)$$

$$\forall \bar{w} = \sum_{j=1}^n g_j \bar{e}_j \quad \text{unik}$$

$c_1, \dots, c_n$ koordinater för $\bar{w}$ m.h.p. $\underline{e}$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n,1) \quad \text{koordinatmatrix}$$

Skriver $\bar{w} = \sum_{j=1}^n g_j \bar{e}_j = (\bar{e}_1 \ \dots \ \bar{e}_n) \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \underline{e} C$

Ex $V = \mathbb{P}_1$, $S = \left\{ \underset{\bar{e}_1}{1+x}, \underset{\bar{e}_2}{2-x} \right\}$

$$\underline{e} = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2)$$

$$\bar{w} = 3+5x = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2$$

$$= c_1 (1+x) + c_2 (2-x) = c_1 + 2c_2 + (c_1 - c_2)x$$

$$\text{Så } \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 - c_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\text{Så } \bar{w} = 3+5x = (1+x \ 2-x) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ex $\mathbb{R}^3 \supseteq V = \left[\underset{\bar{f}_1}{(1,1,1)}, \underset{\bar{f}_2}{(1,2,3)} \right]$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x+y \\ -x+y \\ -x+z \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x+y \\ -x+y \\ x-2y+z \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} 2x+y \\ 0-x+y \\ 0-x+y+z \end{array}$$

$$\text{Så } V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y+z=0 \}$$

Ämte $\bar{w} = (0,1,-2) \in V$. Koordin m.h.p. $\underline{f}$?

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \sim \dots \sim \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} 2x+y \\ 0-x+y \\ 0-x+y+z \end{array} = \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ 0+1 \\ 0-2+2 \end{array} \quad \text{Så } \bar{w} = \underline{f} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 1 Bestäm bas för

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^4 x_i = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\textcircled{1} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad x_1 = s, x_2 = t, x_3 = u, x_4 = -s-t-u$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3$

Menj oben: $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex 2 Bestäm bas för $U \cap V$

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^4 i x_i = 0 \right\}, V \text{ från Ex 1.}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$x_3 = s, x_4 = t$$

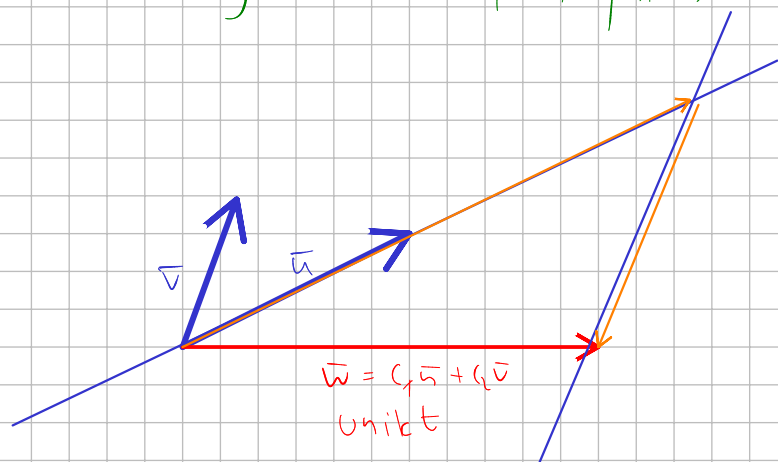
$$x_2 = -2s - 3t$$

$$x_1 = s + 2t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{f}_1 \quad \vec{f}_2$

Ex 3 2 icke-parallella vektorer i planet utgör bas för planet



Ex 4 $V =$ alla 2×2 -mat. Även $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ är!

• Skriv m.s.p. basen $\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

• Räkna i $\mathbb{R}^4 / \ker(\varphi)$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -a+b \\ 0 & 2 & 2 & -a+c \\ 0 & 3 & 0 & -a+d \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{2a}{2} + b - \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{a}{2} + c - \frac{2a}{2} \end{array}$$

$$\text{Ans: } \ker(\varphi) = \left\{ (s, t, u, v) : -s + 3t - 3u + v = 0 \right\}$$

4) Satser om antal element

Satz V har bas med n elem

(i) $S \subseteq V, |S| > n \Rightarrow S$ linj. ber.

(ii) $S \subseteq V, |S| < n \Rightarrow [S] \neq V$

(iii) $S \subseteq V, S$ bas för $V \Rightarrow |S| = n$

(iv) $S \subseteq V, |S| = n \Rightarrow$ Antingen: S bas för V

Eller: $[S] \neq V$ och S linj. ber.

Def Antalet element, n , i en bas S för V ,
kallas **dimension** för V , $n = \dim(V)$

Ex, $\dim(\text{Planer}) = 2, \dim(\text{Rummet}) = 3$

$$\dim(\{l(x_1, x_2, x_3) = 0\}) = 2$$

$$\textcircled{a} \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ b & c & & \end{array} \quad x_2 = s, x_3 = t, x_1 = -\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t \quad \text{har} \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex } V = \{p(x) \in \mathbb{P}_1 : xp'(x)|_{x=1} = 0\}$$

$$x \frac{d}{dx}(s+tx) = bx$$

$$S \subseteq b \mapsto \{3x\}, \dim(V) = 1$$

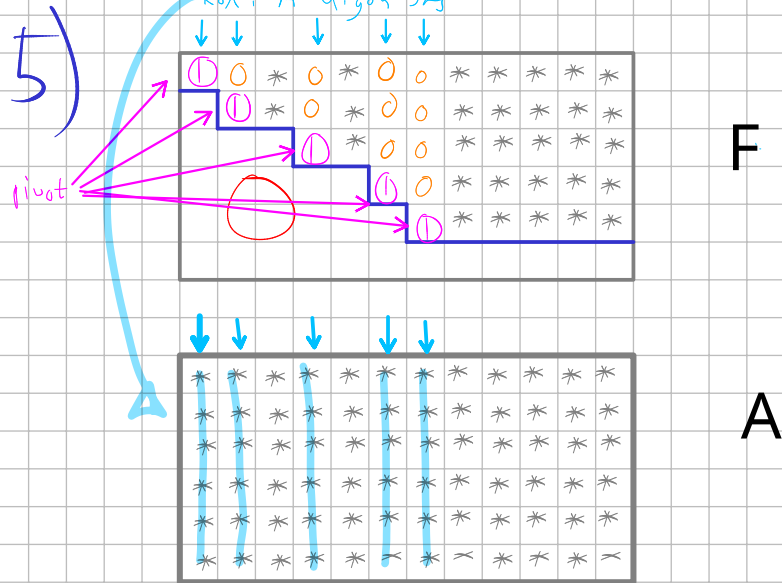
Baser för delrum till $\mathbb{R}^n$

1) $V = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m]$

2) Beroendekvation $\sum_{j=1}^m c_j \vec{v}_j = \vec{0}$

3) Matrisekvation $AX = 0$

4) $A \sim \dots \sim F$, F i rad trappstegsform



6) $\dim(V) = \# \text{pivot elem}$

7) $\dim(\text{rummet av linj ber}) = n - \dim(V)$

Ex

• $V = [\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (-1, 0, 0, 2)\}]$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$

• $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Så V har bas $\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2)\}$ medan $(-1, 0, 0, 2) \in \text{span}\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2)\}$ är lösligt element

• Linjärt beroende:

$\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} c_3 = t \\ c_2 = -t \\ c_1 = t \end{matrix} & t=1 \text{ ger } 1 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \\ & & \text{så } \vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \end{matrix}$

• $\dim(V) = 2$

• 1-dim rum av linj ber mellan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

Ex $V = \mathbb{R}^4$, $\bar{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$
 $\bar{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$
 $\bar{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$
 $\bar{v}_4 = (1, -1, 1, -1)$
 $\bar{v}_5 = (1, 0, 0, 1)$

$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5\}$, bestäm bas för $[S]$.

1) B.c $\sum_{j=1}^m c_j \bar{v}_j = \bar{0}$ används för

att **stryka** lösliga element.

2) Villkor för att ligga i $[S]$ härleds
 Lös ev. sys.

3) Skriv om $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_5$ och att
 höjdet ändras

1)

$$c_1 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_5 \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & d \end{array} \sim \begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -a+c \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & d \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b+d \end{array} \sim \begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b+c+d \end{array}$$

$$2) [S] = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a+b=c+d \}$$

$$\textcircled{1} \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad b=r, c=s, d=t, a=-r+s+t$$

$$\underline{e} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = r \underline{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bas

$$\begin{array}{c}
 1) \\
 \begin{array}{ccccc|c}
 c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

gey $c_5 = 0, c_3 = s, c_4 = t,$

$c_2 = -s + t, c_1 = -s - t$

$s=1, t=0: c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1, c_4 = 0, c_5 = 0$

$-\bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = 0 \Rightarrow \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ *lösligt, stryk $\bar{v}_3$*

$s=0, t=1: c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = 0$

$-\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_4 = 0, \bar{v}_4 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ *lösligt, stryk $\bar{v}_4$*

Så $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_5$ räcker, och är
uppenbarligen linj oberoende!

A

$$\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0
 \end{array}$$

B

$$\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$\sim$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_5$

3)

1 0 1 0

1 0 1 0

1 0 1 0

0 1 0 1

0 1 0 1

0 1 0 1

1 1 1 1 ~

0 1 0 1 ~

0 0 0 0

1 -1 1 -1

0 -1 0 -1

0 0 0 0

1 0 0 1

0 0 -1 1

0 0 1 -1

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$
 4. 5
 50% reber

S^0 has $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)$

Sats: V vektorrum, $S = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

(i) Om S linj. obero så $S \hookrightarrow$ för $[S]$

(ii) Om S linj. obero, $\bar{w} \in V \setminus [S]$

så $S \cup \{\bar{w}\}$ linj. obero

(iii) Om S linj. obero så $S \setminus \{\bar{v}_1\}$
linj. obero.

(iv) Om S linj. bero så finns
 $\bar{v}_j \in S$ s.k. $[S \setminus \{\bar{v}_j\}] = [S]$

(v) Om $[S] \neq V$ och S linj. obero
så finns $\bar{w} \in V \setminus [S]$ s.k.
 $S \cup \{\bar{w}\}$ linj. obero

(vi) Om $\dim(V) = n < \infty$ så kan
Varje linj. obero mängd fylls ut till bas,
varje uppsättningen "ganska" till bas.

Ex $S = \{(1,1,1), (1,2,3), (1,3,3), (2,3,7)\}$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & y \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 0 & z \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -x+y \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & -x+z \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & x-2y+z \end{array}$$

$$\sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z \\ -y + z \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z \end{array}$$

så $[S] = \mathbb{R}^3$, eftersom $\sum c_i \bar{v}_i = (x, y, z)$

har lösning (oändligt många!)

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ bas, $\underline{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ oändligt bas

Ex: $S = \{(1,1,1), (1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & y \\ 1 & 3 & 0 & z \end{array} \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 2 & 0 & -x+z \end{array} \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2x-y \\ 0 & 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{array}$$

• $[S] = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$

• $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ linj. obero

• $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}\} \hookrightarrow$ om $\bar{w} = (x, y, z)$ med $x - 2y + z \neq 0$
tex $\bar{w} = (1, 0, 0)$

$$\underline{EI} \quad V = \mathbb{R}^{\infty}$$

$$S = \{ \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_6, \dots \}$$

$$\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

$$\bar{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

$S \cup \{e_1\}$ blir obero-
etter ändligt många sty,

Så fortfarande
inte hela $\mathbb{R}^{\infty}$.

Sats ^{Om} 1) $U \leq V$

2) $\dim U = \dim V = n < \infty$

Så : $U = V$.

B: Finns bas $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ för U .

Kan utvidgas till bas för V .

Lägg till 0sf, så var redan bas
för V .

Ex Visa att $\left[\overset{U}{(1, 2, 3)}, \overset{V}{(5, 6, 11)} \right] = \left\{ \overset{V}{(x, y, z)} : z = x + y \right\}$

B 1) U, V delrum till $\mathbb{R}^3$

2) $(1, 2, 3), (5, 6, 11) \in V$ så $U \leq V$

3) Så $U \leq V$

4) $\dim V = 3 - 1$

5) $\dim U = 2$

6) $U = V$

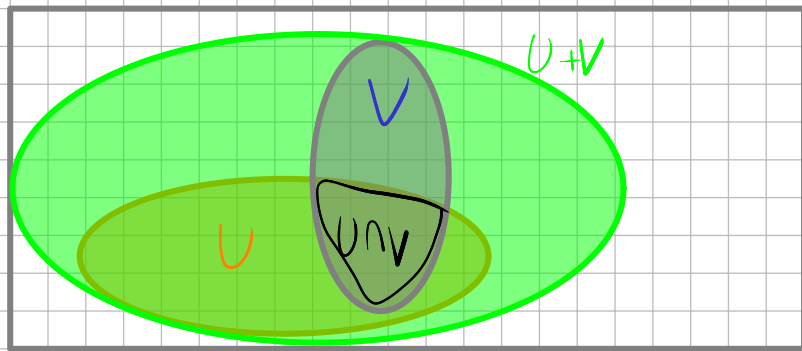
6) Direkt summa av delrum

$$\forall V, U_1, U_2 \leq V$$

Om 1) $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

2) $U_1 + U_2 = \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in U_1, \vec{v} \in U_2\} = V$

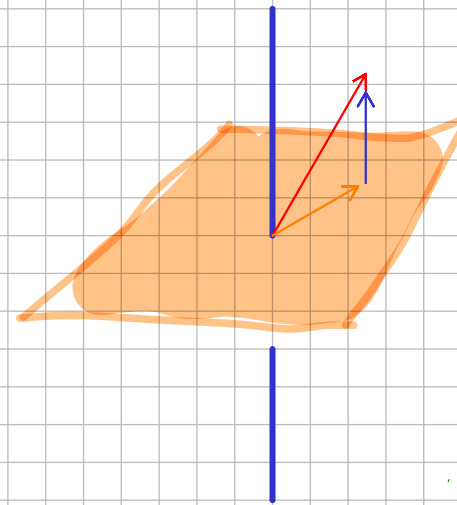
S^0 $V = U_1 \oplus U_2$, direkt summa.



All: varje $\vec{w} \in V$ kan **unikt**

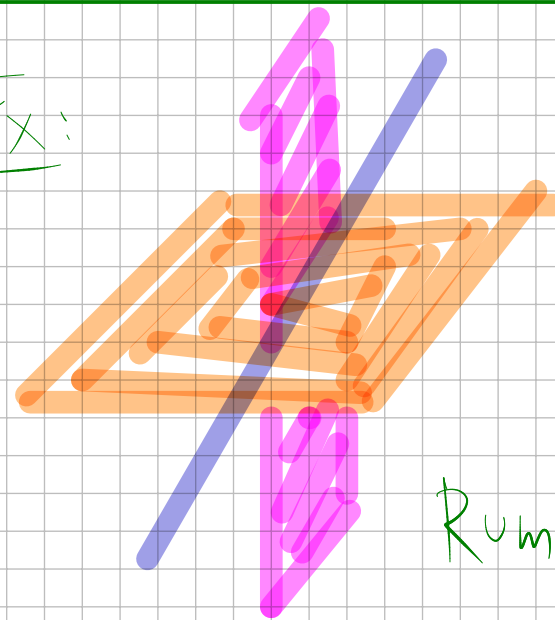
skrivs $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} \in U_1, \vec{v} \in U_2$

Ex



Rummet = $l \oplus l$

Ex:



Rummet =

$l_1 + l_2$

utan

Rummet = $l_1 \oplus l_2$

"Multi-plus-satsen"

- $U_1, U_2 \leq V$
- $U_1 \text{ bas } \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}, U_2 \text{ bas } \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$
- $U_1 \cap U_2 = \{\bar{0}\}$

Då: $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n\}$ bas för $U_1 \oplus U_2$, så

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

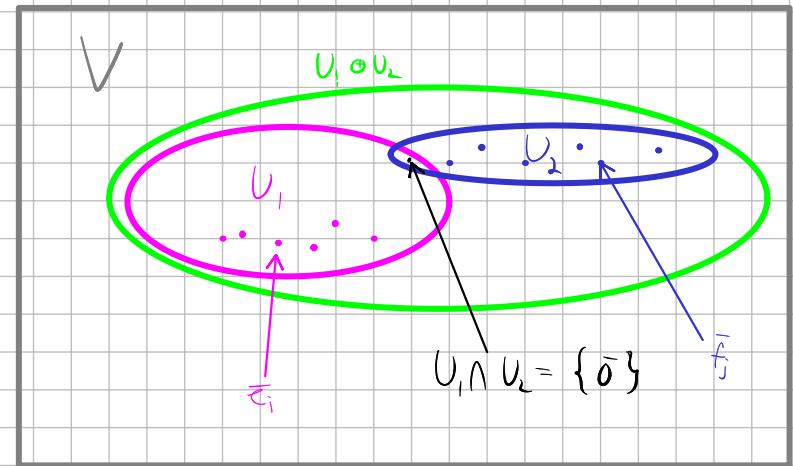
Beweis: Spännen: uppenbart

Unikt/linj. ober: Antag $\bar{0} = \sum_{i=1}^m c_i \bar{e}_i + \sum_{j=1}^n d_j \bar{f}_j$. Då $\sum_{i=1}^m c_i \bar{e}_i = -\sum_{j=1}^n d_j \bar{f}_j$.

Om något $c_i \neq 0$ så $VL \neq \bar{0} \Rightarrow HL \neq \bar{0} \Rightarrow$ något $d_j \neq 0$.

Då: $VL \in U_1 \setminus \{\bar{0}\}, HL \in U_2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Men: $VL = HL \in (U_1 \cap U_2) \setminus \{\bar{0}\}$ omöjligt.



Ex $U = [(\overset{\bar{f}_1}{(1,1,1,1)}, (\overset{\bar{f}_2}{(1,0,1,0)})] \in \mathbb{R}^4$

- Visa bas för U .
- F_3 ut till bas för $\mathbb{R}^4$
- Hitt bas för V s.k. $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$
och

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-b \end{array} \sim \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & -a+c \\ 0 & 0 & 0 & -b+c \end{array}$$

- $U = \{(a,b,c,d) : a=c \text{ och } b=c\}$
- U har bas $\bar{f}_1, \bar{f}_2$
- Behöver 2 linj. oberoende $\bar{f}_3, \bar{f}_4 \notin U$
- $(1,0,0,0) \notin U$, $(0,1,0,0) \notin U$, linj. oberoende
 $a \neq c$ $b \neq c$
- $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$ bas för $\mathbb{R}^4$
- $\{\bar{f}_3, \bar{f}_4\}$ bas för $V = [\bar{f}_3, \bar{f}_4]$,
 $U+V = \mathbb{R}^4$, $U \cap V = \{\bar{0}\}$, $U \oplus V = \mathbb{R}^4$

Ex $U_1 = \{x^3 + 2x^4, 2x^3 + x^4\}$

$U_2 = \mathbb{P}_2$

$U_1 \subseteq \mathbb{P}_4, U_2 \subseteq \mathbb{P}_4$

Visa $\mathbb{P}_4 = U_1 \oplus U_2$

- 1) $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ ej parallella, så linj. oberoende
- 2) $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in U_3 = [x^3, x^4]$
- 3) $\dim U_3 = 2$, så $U_1 = U_3$
- 4) $U_2 \cap U_3 = \{\bar{0}\}$, $U_2 + U_3 = \mathbb{P}_4$