TATA24 Linjär Algebra, Fö 1

Linjära ekvationssystem

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Definition

- En *linjärform* i n variabler är en funktion

$$\ell : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\ell(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad c_j \in \mathbb{R}$$

- En *linjär ekvation* är en ekvation på formen

$$\ell(x_1, \ldots, x_n) = a$$

- En *lösning* till ovanstående linjära ekvation är en n-tuppel $(b_1, \ldots, b_n)$ så att $\ell(b_1, \ldots, b_n) = a$.

Exempel

- $(x, y) \mapsto 2x + 3y$ är en linjärform i två variabler, $2x + 3y = 3$ är en linjär ekvation. Den har oändligt många lösningar; en av dessa är $(x, y) = (0, 1)$.
- $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ är inte en linjärform, $x^2 + y^2 = 2$ är inte en *linjär* ekvation. $(x, y) = (1, 1)$ är en lösning (till den icke-linjära ekvationen).

Exempel

- $$13x_1 - 27/4x_2 - \exp(5)x_3 + \log(13)x_4 = \pi$$
  är en linjär ekvation.
- $$13x_1 - 27/4x_2 - 5\exp(x_3) + \log(13)x_4 = \pi$$
  är inte en linjär ekvation.
- $$x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 5$$
  är inte en linjärform men
  $$x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 5 = 7$$
  är en linjär ekvation.

Sats

1. *Den linjära ekvationen (i en variabel)*
$$ax = b$$
har en unik lösning $x = b/a$ *om* $a \neq 0$*. Om* $a = 0$, $b \neq 0$ *så saknas lösning. Om* $a = b = 0$ *så är* $x = c$ *lösning för alla* $c \in \mathbb{R}$*.*
2. *I två eller fler variabler så har den linjära ekvationen*
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$
oändligt många lösningar om någon $a_i \neq 0$*, eller omm alla* $a_i = 0$ *och* $b = 0$*. Om alla* $a_i = 0$ *och* $b \neq 0$ *så saknas lösningar.*

Exempel

1. $2x = 5/2$ har den unika lösningen $x = 5/4$.
2. $3x - 2y = 6$ har oändligt många lösningar $x = 2 - 2/3y$, dvs vi kan ange godtyckligt värde för y, och då blir $(2 - 2/3y, y)$ en lösning. Alternativt kan vi specifiera x godtyckligt, och lösa ut $y = 3/2x - 3$.

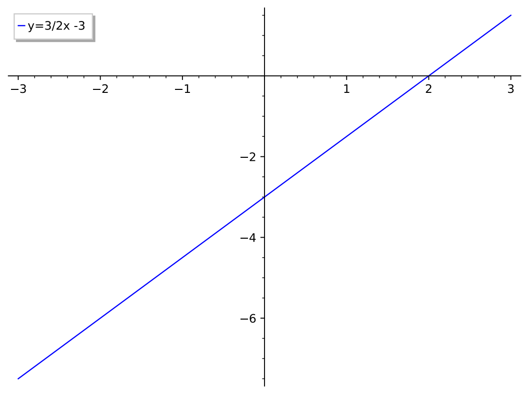
Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Anmärkning

Lösningsmängden till en linjär ekvation i två variabler är en linje. Vi skall studera detta mer ingående längre fram i kursen.

Här är lösningsmängden till $3x - 2y = 6$.



Definition

Ett linjärt ekvationssystem med k ekvationer, i n variabler, är på formen

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1,\dots,x_n) &= b_1 \\ \ell_2(x_1,\dots,x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ \ell_k(x_1,\dots,x_n) &= b_k \end{aligned} \tag{1}$$

med ℓ_j linjärform, d.v.s $\ell_j(x_1,\dots,x_n) = a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,n}x_n$, och $b_j \in \mathbb{R}$. M.a.o är det ett ekvationssystem där de ingående ekvationerna är linjära.

En lösning till (1) är en n-tuppel $(c_1,\dots,c_n)$ som *samtidigt* är en lösning till *varje* ingående linjär ekvation, dvs

$$\forall 1 \le j \le n : \ell_j(c_1,\dots,c_n) = b_j$$

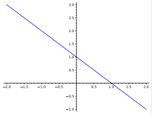
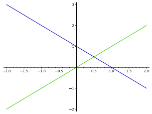
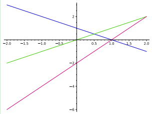
Exempel (Rättat)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 0x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

är ett linjärt ekvationssystem; $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,0)$ är en lösning till systemet, medan $(1/3,1/3,1/3)$ inte är en lösning, eftersom endast den första ekvationen uppfylls.

I två variabler så kan lösningarna till ett linjärt ekvationssystem ses som skärningen till ett antal linjer. Denna skärning kan vara tom, en enda punkt, eller en hel linje.

Exempel

- $x + y = 1$ har en linje som lösningsmängd. 
- $x + y = 1, \quad x - y = 0$ har en enda punkt som lösningsmängd. 
- $x + y = 1, \quad x - y = 0, \quad 2x - y = 2$ har tom lösningsmängd. 

Linjära ekvationssystem kan lösas m.h.a *successiv elimination* (eller Gausselimination). Det går till som följer:

1. Antag att vi har k ekvationer i n variabler.
2. Lös ut första variabeln ur en ekvation.
3. Sätt in detta samband i de övriga ekvationerna, och *eliminera* den variabeln från dessa.
4. Om vi bortser från den första ekvationen, så har vi nu ett system med $k-1$ ekvationer i $n-1$ variabler.
5. Upprepa förfarandet på detta mindre system.
6. Ett system med en enda ekvation (eller en enda variabel) är lätt att lösa.
7. Ta i beaktande de ekvationer som vi använde för att lösa ut variablerna för att skriva ner den fullständiga lösningen.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

Vi löser ett ekvationssystem i två variabler:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}$$

- Lös ut x ur den första ekvationen, får $x = 3 - 3/2y$.
- Stoppa in i den andra ekvationen, får

$$3(3 - 3/2y) - y = 4 \quad \Longrightarrow \quad 9 - 11/2y = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = 5 * 2/11$$

- Vi stoppar in y-värdet i den första ekvationen, och får

$$2x + 3 * 10/11 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 66/11 - 30/11 = 36/11 \Longrightarrow \quad \Longrightarrow \ x = 18/11.$$

I stället för att lösa ut en variabel från den första ekvationen, och använda detta för att eliminera den variabeln från övriga ekvationer, så kan vi *addera lämpliga multiplar* av första ekvationen till de övriga. Det blir samma sak!

Exempel (forts)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3/2y = 3 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3/2y = 3 \\ -11/2y = -5 \end{cases} \Longrightarrow$$

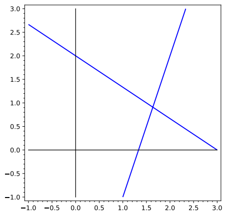
$$\begin{cases} x + 3/2y = 3 \\ y = 10/11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 - \frac{3}{2} * \frac{10}{11} = \frac{18}{11} \\ y = 10/11 \end{cases}$$

Här delar vi första ekvationen med 2 (så att koefficienten för x blir 1) och subtraherar sedan 3 gånger den resulterade ekvationen från ekvation 2. Vi normaliserar den nya ekvation 2, och subtraherar 3/2 av den från den första.

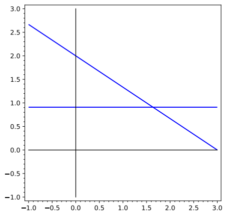
Exempel (forts)

Genom att skriva om ekvationerna så ändrar vi de linjer vars skärningspunkt lösningen är (men inte lösningsmängden):

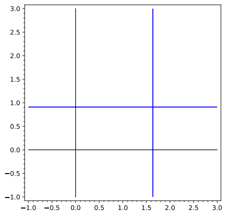
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + 3/2y = 3 \\ -11/2y = -5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 18/11 \\ y = 10/11 \end{cases}$$



Givet ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1,\dots,x_n) &= h_1 \\ \ell_2(x_1,\dots,x_n) &= h_2 \\ &\vdots \\ \ell_k(x_1,\dots,x_k) &= h_k \end{aligned} \tag{2}$$

så kan vi, utan att ändra lösningsmängden

1. Byta plats på två ekvationer
2. Multiplicera en ekvation med en nollskiljd konstant
3. Addera en ekvation till en annan
4. Subtrahera en ekvation från en annan
5. Addera en multipel av en ekvation till en annan
6. Lägga till en ekvation som är en konsekvens av de befintliga ekvationerna
7. Ta bort en ekvation som är en konsekvens av de kvarvarande
8. Ta bort ekvationen $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$

Vi kommer att använda oss av "byta plats", "multiplicera med konstant" och "addera multipel" för att överföra systemet till standardform.

1. "Byta plats":

$$\begin{cases} \ell_1(x_1,\ldots,x_n) = h_1 \\ \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = h_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = h_2 \\ \ell_1(x_1,\ldots,x_n) = h_1 \end{cases}$$

2. "Multiplicera med nollskiljd konstant":

$$\begin{cases} \ell_1(x_1,\ldots,x_n) = h_1 \\ \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = h_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c\ell_1(x_1,\ldots,x_n) = ch_1 \\ \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = h_2 \end{cases}$$

3. "Addera multipel av en ekvation till en annan":

$$\begin{cases} \ell_1(x_1,\ldots,x_n) = h_1 \\ \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = h_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \ell_1(x_1,\ldots,x_n) = h_1 \\ c\ell_1(x_1,\ldots,x_n) + \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = ch_1 + h_2 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \ell_1(x_1,\ldots,x_n) = h_1 \\ \ell_2(x_1,\ldots,x_n) = h_2 \end{cases}$$

I det sista steget så lade vi till $-c$ gånger första ekvationen till den andra, och fick till baka det ursprungliga systemet; operationen är alltså reversibel, och vi har ekvivalens.

Definition

Till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1,\dots,x_n) &= h_1 \\ \ell_2(x_1,\dots,x_n) &= h_2 \\ &\vdots \\ \ell_k(x_1,\dots,x_k) &= h_k \end{aligned} \tag{3}$$

ordnar vi dess *totalmatris*, som är en *matris* med k rader och $n+1$ kolumner. I rad i, kolumn j, om $1 \leq j \leq n$, står koefficenten för x_j i ℓ_i; i rad i, kolumn $n+1$ står h_i. Vi separerar (ofta) den sista kolumnen från de övriga med ett streck.

Exempel

Till $\begin{cases} 7x_1 - 11/3x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ hör totalmatrisen $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -\frac{11}{3} & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$. Observera nollan!

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

De tre operationerna på ekvationer som vi nämnt tidigare översätts till *radoperationer* på totalmatrisen. Vi använder $\sim$ mellan totalmatriser för att indikera att motsvarande linjära ekvationssystem är ekvivalenta, d.v.s har samma lösningsmängd.

- Radbyte: $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -\frac{11}{3} & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & -\frac{11}{3} & 5 & 3 \end{array}\right)$
- Skalning: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & -\frac{11}{3} & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -\frac{11}{21} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right)$
- Addera multipel av rad till en annan rad:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -\frac{11}{21} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{11}{21} & -\frac{9}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right)$

Målet med den successiva eliminationen är att få fram en ekvation involverande så få variabler som möjligt. Om systemet har en unik lösning, så kan man alltid få fram en ekvation i *en enda variabel*; en sådan är förstås enkelt lösbar. Sedan kan detta resultat substitueras tillbaka in i övriga ekvationer, och systemet kan benas upp bakifrån.
Om man tar sig tid att snygga till totalmatrisen så mycket som det går, blir denna process väldigt enkel. Vi visar några exempel innan vi ger en algoritm för successiv eliminering, och formellt definierar (reducerad) trappstegsform.

Exempel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 7 & 8 & 8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -13 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & -6 & -13 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Vi kan stanna här och tolka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2/3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Exempel (forts)

Substituering av den sista ekvationen i den andra ger

$$x_2 + 2 * (-2) = 2/3 \implies x_2 = 14/3.$$

Sätter vi in värdena för x_2, x_3 i den första ekvationen får vi

$$x_1 + 2 * (14/3) + 3 * (-2) = 1 \implies x_1 = -7/3$$

och vi har löst ekvationssystemet; det hade en unik lösning.

Exempel (forts)

Vi kan istället utföra "bakåtsubstitueringen" i totalmatrisen, och sedan bara läsa av lösningen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Exempel

Om vi bara ändrar vårt exempel lite grann så får vi (räkna själv som kontroll!)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det svarar mot systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1/3 \\ x_2 + 2x_3 = 2/3 \end{cases}.$$

Här har vi oändligt många lösningar, vilka kan *parametriseras* genom att sätta $x_3 = t$ (godtyckligt) och sedan lösa ut $x_2 = 2/3 - 2t$, $x_1 = -1/3 - t$.

Exempel

Om vi ånyo ändrar systemet (vi ändrar högerledet från föregående) så får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det svarar mot systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1/3 \\ x_2 + 2x_3 = 2/3 \\ 0 = 1 \end{cases}.$$

Den sista ekvationen är inte lösbar, så hela systemet är olösligt.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Definition

En matris är på reducerad trappstegsform om

1. Varje nollskiljd rad inleds med ett antal nollor (kan vara inga nollor) följt av en etta, ett s.k *pivotelement*
2. Övriga element i den kolumn som pivotelementet befinner sig i är noll.

Exempel

En slumpad matris (tänk dig strecket)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Mer typiskt är att "trappstegen" alla har höjd ett:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 87 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -56 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 11 & -8 & 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7631}{21545} & \frac{87}{4309} & \frac{2436}{4309} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{521}{21545} & \frac{157}{8618} & \frac{87}{8618} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7569}{21545} & -\frac{8947}{8618} & -\frac{22139}{8618} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{583}{21545} & -\frac{1}{4309} & -\frac{28}{4309} \end{array}\right)$$

Följande algoritm överför en matris till reducerad trappstegsform:

1. Sätt $R = 1$, $K = 0$
2. Hitta den första kolumn $k > K$ som innehåller ett nollskiljt element (på en rad med index $\geq R$), hitta den första raden $r \geq R$ där ett sådant elemement förekommer i kolumn k. Detta element blir ett pivotelement.
3. Dela alla elemement i raden med pivotelementet.
4. Addera lämpliga multiplar av rad r till övriga rader, så att kolumn k får nollor överallt utom i rad r
5. Byt plats på rad r och rad R (om $r \neq R$).
6. Sätt $K = k$ och $R = R + 1$
7. Iterera

Exempel

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & 0 & -1 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 17 & 20 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 & 22 \\ 2 & 4 & 6 & 17 & 20 & 9 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 & -5 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{233}{54} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{67}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{27} & \frac{233}{54} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{9} & -\frac{5}{9} \end{array}\right)
$$

Notera att det andra pivotelementet återfinns i kolumn 3, snarare än kolumn 2; det är atypiskt, men kan inträffa.

Om ett linjärt ekvationssystem med k ekvationer och med n obekanta har överförts till reducerad trappstegsform, kan det lösas, och lösningsmängden anges m.h.a *parametrisering*.

1. En nollrad med ickenoll högerled ger att systemet är olösligt
2. En fullständig nollrad stryks
3. Kolumner med pivotelement svarar mot variabler *som kan lösas ut*
4. Kolumner utan pivot element, säg att det är d sådana, svarar mot variabler som *ansätts till parametrar* $t_1, \ldots, t_d$.
5. Lösningsmängdens *dimension* är d
6. Antalet "oberoende ekvationer" är antalet ostrukna rader

Exempel

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}$$

Pivotelement i kol 1,3, så parametriserar $x_2 = t_1 \in \mathbb{R}$, $x_4 = t_2 \in \mathbb{R}$, och löser ut $x_1 = 5 - t_1 - t_2$, $x_3 = -5 - t_2$. Lösningsmängden är två-dimensionell (två parametrar/frihetsgrader). Två "effektiva" ekvationer.

Exempel

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	1	7	5
0	0	1	1	-2	-5
0	0	0	0	0	0

Pivotelement i kol 1,3, så parametriserar $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$och löser ut $x_1 = 5 - t_1 - t_2 - 7t_3$, $x_3 = -5 - t_2 + 2t_3$. Lösningsmängden är två-dimensionell. Två “effektiva” ekvationer, det var tre ekvationer från början, men dessa var inte oberoende. Originalsystemet kan t.e.x ha varit

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	1	7	5
0	0	1	1	-2	-5
10	10	1	11	68	45

Exempel (Rättat)

Systemet
$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$
saknar lösning, eftersom den sista ekvationen är olöslig.

Sats

Ett linjärt ekvationssystem kan

1. *sakna lösning,*
2. *ha en unik lösning, eller*
3. *ha oändligt många lösningar.*

Så inget linjärt ekvationssystem kan ha $1 < s < \infty$ *lösningar.*

Bevis.

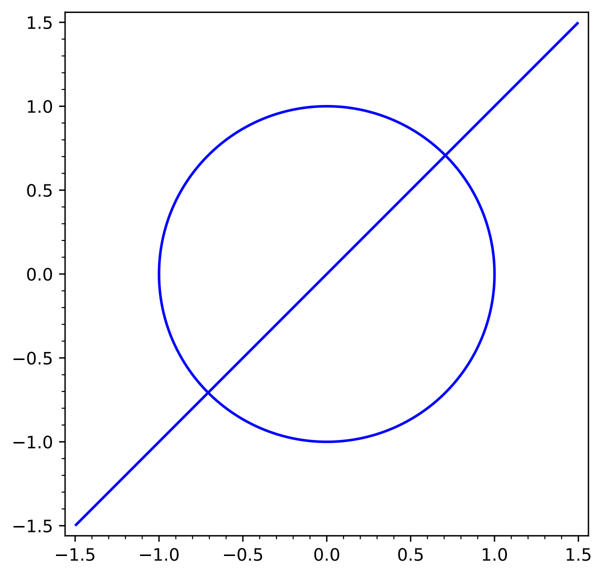
Följer av reducerad trappstegsform. □

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

har precis två lösningar – men så är det också inget *linjärt* ekvationssystem!


1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Ofta nöjer sig man med att “eliminera nedåt”, d.v.s algoritmen blir

1. Antag att vi har k rader och n kolumner
2. Sätt $R = 1$, $K = 0$
3. Hitta den första kolumn $j > K$ som innehåller ett nollskiljt element (på rad med index $\geq R$), hitta den första raden r där ett sådant elemement förekommer i kolumn j. Detta element blir ett pivotelement.
4. Dela alla elemement i rad r med pivotelementet.
5. Addera lämpliga multiplar av rad r till raderna $r + 1$ t.o.m k, så att kolumn j får nollor nedanför rad r
6. Byt plats på rad r och rad R (om $r \neq R$).
7. Sätt $K = j$ och $R = R + 1$
8. Iterera

Det kallas ibland för Gauss-elimination, och den erhållna matrisen får trappstegform (inte reducerad trappstegsform). Skillnaden är att i trappstegsform så har man nollor nedanför pivotelementet (i aktuell kolumn) medan man i reducerad trappstegsform har nollor även ovanför pivotelmentet (återigen i aktuell kolumn). Man kan omvandla trappstegsform till reducerad trappstegsform genom att utföra de reduceringar man utelämnade, i ordning från höger till vänster bland pivotelementen, och den resulterande algoritmen kallas för Gauss-Jordan-elimination. Den är något mer effektiv än den algoritm vi beskrev tidigare, eftersom den skriver om färre element.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -3 \\ 9 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -3 \\ 0 & -16 & -24 & -30 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{3}{4} \\ 0 & -16 & -24 & -30 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 8 & 18 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{7}{8} \end{array}\right)$$

är i trappstegsform. Nu eliminerar vi "uppåt":

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{7}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & -\frac{13}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{7}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{7}{8} \end{array}\right)$$

Detta är i reducerad trappstegsform, och vi har skrivit om elementen i första raden (k3 speciellt) färre gånger än om vi använt föregående naiva algoritm.

Reducerad trappstegsform är unik

Sats

Varje totalmatris har en unik reducerad trappstegsform (d.v.s det spelar ingen roll i vilken ordning vi utför tillåtna radoperationer).

Den oreducerade trappstegsformen är inte unik (olika trappstegsformer kan ha samma reducerade trappstegsform), men den tillåter en fortfarande att enkelt lösa det associerade linjära ekvationssystemet.

Antag att vi har ett linjärt ekvationssystem i tre variabler, med tre ekvationer (har vi fler ekvationer så är systemet antingen olösligt eller så kan vi stryka ekvationer). Vi skall se i en kommande föreläsning att ekvationen $ax + by + cz = d$ är ekvationen för att plan i rummet med *normalvektor* (a, b, c). Så vi studerar skärningen av tre plan i rummet; det kan bilda ett plan, en linje, en punkt, eller så saknas gemensam skärningspunkt.

Vi använder oss av reducerad trappstegsform för att klassificera/illustrera dessa fall!

Exempel

x	y	z	
1	0	0	2
0	1	0	3
0	0	1	5

unik lösning $(x, y, z) = (2, 3, 5)$.

Exempel

x	y	z	
1	0	5	2
0	1	2	3
0	0	0	0

Lösning $z = t \in \mathbb{R}$, $y = 3/2t$, $x = 2 - 5t$, detta är en linje i rummet.

Exempel

x	y	z	
1	6	0	2
0	0	1	3
0	0	0	0

Lösning $z = 3$, $y = t \in \mathbb{R}$, $x = 2 - 6t$, detta är en linje i rummet.

Exempel

x	y	z	
0	1	0	2
0	0	1	3
0	0	0	0

Lösning $z = 3$, $y = 2$, $x = t$, detta är en linje i rummet.

Exempel

x	y	z	
1	-2	7	2
0	0	0	0
0	0	0	0

En enda effektiv ekvation, lösningsmängden är planet $x - 2y + 7z = 2$. Vi kan parametrisera lösningsmängden med $y = t_1$, $z = t_2$, $x = 2 + 2t_1 - 7t_2$.

Exempel

x	y	z	
1	0	0	2
0	1	0	3
0	0	0	5

lösning saknas.

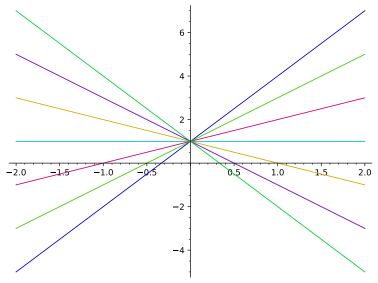
Parameter?

Det är skillnad på parameter och parameter:

Exempel

Den linjära ekvationen $x + y = 1$ har en lösningsmängd som kan parametriseras som $y = t$, $x = 1 - t$. En godtycklig lösningspunkt är $(x, y) = (1 - t, t)$. Genom att variera parametern t så genomlöper vi lösningsmängden, som är en linje.

Exempel



Den linjära ekvationen $ax + y = 1$ beror på en parameter a; om vi sätter $a = 1$ så får vi ekvationen ovan, sätter vi $a = 0$ så får vi ekvationen $y = 1$, o.s.v. Vi kan parametrisera lösningsmängden genom $y = t$, $x = \frac{1}{a} - 1at$ så länge som $a \neq 0$. För $a = 0$ så parametriseras lösningmängden av $x = t$,$y = 1$.

Om man i sina uträkningar dividerar med ett uttryck som innehåller en parameter, så måste man (nästan alltid) göra en falluppdelning innan: uttrycket kan vara noll, och då får man inte dividera, eller så är det noll, och man får dividera.
Det är oftast mödan värd att stuva om sina beräkningar så att man skjuter upp falluppdelningarna tills det inte går att undvika dem.

Exempel

Låt oss lösa

$$\begin{cases} ax + y = b \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

för alla värden på på parametrarna a, b.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & b \\ 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 5 \\ a & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ a & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & a+1 & -\frac{5}{2}a + b \end{array}\right)$$

Nu måste vi göra en falluppdelning: är $a + 1 = 0$ eller inte?

Exempel (forts)

1. Om $a \neq -1$ så får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & a+1 & -\frac{5}{2}\,a+b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5\,a-2\,b}{2\,(a+1)} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{5\,a-2\,b}{2\,(a+1)}+\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5\,a-2\,b}{2\,(a+1)} \end{array}\right)$$

d.v.s den unika lösningen beror på a och b.

2. Om $a = -1$ så får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & a+1 & -\frac{5}{2}\,a+b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & b+\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Här måsty vi ånyo göra en falluppdelning.

   i. $a = -1$, $b \neq -5/2$. Sista ekvationen olösbar, så systemet saknar lösning.
   ii. $a = -1$, $b = -5/2$. Systemet blir

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket har lösningarna $y = t$, $x = 5/2 + t$.