TATA24 Linjär Algebra, Fö 10

Överbestämda linjära ekvationssystem, minsta kvadratmetoden

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Definition

Låt $AX = B$ vara ett linjärt ekvationssystem på matrisform, med en koefficientmatris A av format $m \times n$, en variabelvektor

$$X = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

samt en högerledsvektor

$$B = (b_1, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Vi säger att systemet är *överbestämt* om $m > n$, dvs om det finns fler ekvationer än obekanta. Vi kallar systemet *verkligt överbestämt* om (rad)rangen r av den augmenterade matrisen

$$\left[A \;\middle|\; B\right]$$

uppfyller $r > n$.

Exempel

Definitionen innebär att

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

skall räknas som ett överbestämt ekvationssystem, trots att det är ekvivalent med det *underbestämda* systemet

$$x + y = 1.$$

Det är dock inte verkligt överbestämt.

Definition

Låt $AX = B$ vara ett linjärt ekvationssystem, samma som tidigare. För en $n \times 1$-vektor X_1 så är *felvektorn*

$$AX_1 - B$$

och *felets magnitud*

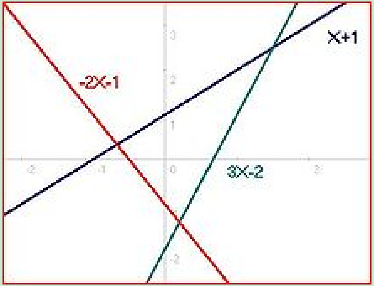
$$\|AX_1 - B\| = \sqrt{(AX_1 - B|AX_1 - b)}$$

Så X_1 är en lösning till $AX = B$ omm felvektorn är nollvektorn, och felets magnitud är noll.
Om systemet inte är lösbart, så kan vi i alla fall försöka hitta en *approximativ lösning* X_1 med liten felvektor; helst med så liten felvektor som möjligt. En vektor som minimerar felets magnitud kallas för en *minstakvadrat-lösning* till $AX = B$.

Exempel

Vi studerar följande system (från Wikipedia):

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -3x + y &= -2 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$



Exempel (forts)

Tar vi $X_1 = (0,0)$ så blir felvektorn

$$AX_1 - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vilket har norm $\sqrt{6}$. Tar vi istället $X_2 = (1/4, 1/2)$ får vi

$$AX_2 - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

som har norm $\sqrt{64+49+9}/4 > \sqrt{6}$.
Så den första approximationen är bättre, men den är inte optimal.

Ortogonal projektion minimerar avstånd

I definition 6.2.6 (b) definierades avstånd mellan två element i ett euklidiskt rum. Vi definierar nu

$$\text{avståndet mellan } \mathbf{v} \text{ och underrummet } \mathbb{U} \text{ som} \quad \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}|.$$

Utnyttjar vi uppdelningen i Sats 6.3.9 får vi svaret på vilket $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ som minimerar avståndet. För alla $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$ gäller att

$$\mathbf{v}-\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} - \mathbf{u} = \left(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}\right) + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \quad \text{och} \quad \left(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}\right) \perp \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$$

eftersom $\left(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}\right) \in \mathbb{U}$ och $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^\perp$. Pythagoras sats ger då att

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = \left|\left(\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}\right) + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|^2 = \left|\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{u}\right|^2 + \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|^2 \geq \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|^2$$

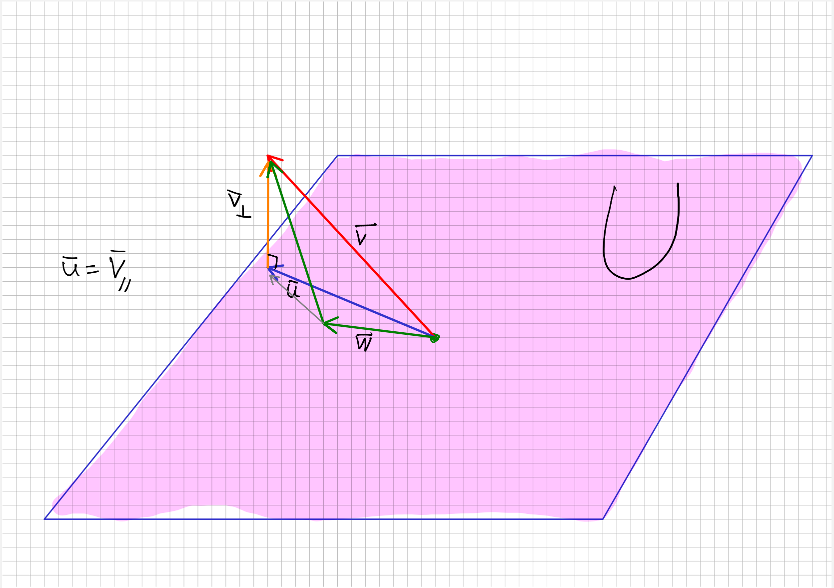
och vi har likhet i olikheten omm $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$. Följaktligen är $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ det element i $\mathbb{U}$ som ligger närmast $\mathbf{v}$ och avståndet dem emellan är $\left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|$. Vi har visat

Sats 6.3.15. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Då gäller att*

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} |\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}\right| = \left|\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}\right|,$$

d v s minsta avståndet = ortogonala avståndet.

Ortogonal projektion minimerar avstånd



Sats

Låt A vara en matris av format $m \times n$, och B en kolonnvektor i $\mathbb{R}^m$. Kalla kolonnrummet till A för V.

1. *Vektorn X minimerar $\|AX - B\|$ om och endast om AX är ortogonala projektionen av B på V, vilket inträffar precis då $AX - B$ är ortogonal mot varje kolonn i A, dvs ligger i det ortogonala komplementet till V.*
2. *Ett ekvivalent villkor är att normalekvationerna*

$$A^t(AX - B) = \overline{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^tAX = A^tB$$

   är uppfyllda.

Bevis.

1. Lämnas därhän.
2. AX ger en godtycklig linjärkombination av kolonnerna i A, så varierar fritt i kolonnrummet. Tag $\overline{\mathrm{u}} = AX$, $\overline{\mathrm{v}} = B$ i föregående sats.
3. Låt Y vara ortogonala projektionen av B på V. Det innebär att $Y \in V$, $Y - B \perp V$, dvs att $Y - B$ är ortogonal mot varje kolonn i A. Detta kan uttryckas som att $A_j^t(Y - B) = 0$ för varje kolonn A_j, vilket kan sammanfattas som $A^t(Y - B) = \overline{0}$.

$\square$

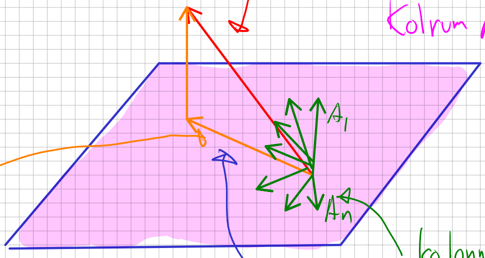
Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Högerledsvektor B

Kolrum A



proj(B, kolrum A)

ligger i kolrum A

kolonnerna i A

så kan skrivas $x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = AX$

Alternativ härledning

Skriv $X' = X + Z$ med X en lösning till $A^t AX = A^t B$. Eftersom detta är likvärdigt med $A^t(AX - B) = \overline{0}$ så finns lösning, välj X så att $AX - B$ ortogonalt mot kolonrummet av A; detta gör vi genom att se till att AX är ortogonalprojektionen av B på kolonnrummet till A.
Då har vi att

$$\begin{aligned}
\left\|AX' - B\right\|^2 &= \|AX + AZ - B\|^2 \\
&= (AX + AZ - B)^t(AX + AZ - B) \\
&= (AX - B)^t(AX - B) + (AZ)^T(AZ) + (AZ)^t(AX - B) + (AX - B)^t(AZ) \\
&= (AX - B)^t(AX - B) + (AZ)^T(AZ) + 2(AZ)^t(AX - B) \\
&= \|AX - B\|^2 + \|AZ\|^2 + 2Z^t(A^t AX - A^t B) \\
&= \|AX - B\|^2 + \|AZ\|^2
\end{aligned}$$

vilket minimeras omm $AZ = \overline{0}$, vilket bland annat sker då $Z = \overline{0}$.
Om kolonnerna i A är linjärt oberoende så är $AZ = \overline{0}$ omm $Z = \overline{0}$.

Sats

Låt $AX = B$ vara ett linjärt ekvationssystem.

1. *Felvektorns norm $\|AX - B\|$ är minimal för varje X som är en lösning till normalekvationerna $A^t AX = A^t B$*
2. *Normalekvationerna har alltid minst en lösning, som kan fås genom att lösa $AX = B_{\|}$, där $B_{\|}$ är ortogonalprojektionen av högerledsvektorn B på kolonnrummet till A.*
3. *Om kolonnerna i A är linjärt oberoende så är denna minstakvadrat-lösning unik, och ges av*

$$X = (A^t A)^{-1} A^t B$$

Exempel (forts)

Vi går tillbaka till det överbestämda linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -3x + y &= -2 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

med

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kolonnrummet till A har en ON-bas

$$\left[\left(\frac{1}{7}\sqrt{14}, -\frac{3}{14}\sqrt{14}, -\frac{1}{14}\sqrt{14} \right), \left(\frac{9}{19}\sqrt{\frac{19}{7}}, \frac{4}{19}\sqrt{\frac{19}{7}}, \frac{6}{19}\sqrt{\frac{19}{7}} \right) \right]$$

med vars hjälp vi kan beräkna

$$B_{\|} = \left(-\frac{6}{19}, -\frac{37}{38}, -\frac{27}{38} \right)$$

Exempel (forts)

Eftersom $B_{||}$ per definition ligger i kolonnrummet till A så är $AX = B_{||}$ lösbart; i det här fallet unikt lösbart eftersom A har linjärt oberoende kolonner. Vi får

$$X = \left(\frac{5}{38}, -\frac{11}{19}\right)$$

med felvektor

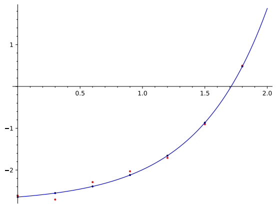
$$AX - B = \left(\frac{13}{19}, \frac{39}{38}, -\frac{65}{38}\right)$$

som har norm

$$\|AX - B\| = 13\sqrt{\frac{1}{38}} \approx 2.10887847469991.$$

Vi kan förstås hitta minstakvadrat-lösningen genom att lösa normalekvationerna $A^tAX = A^tB$, vilket i detta fall blir

$$\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{38}, -\frac{11}{19}\right)$$



1. Givet en vektor
$$\begin{bmatrix}(x_1, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_n, y_n)\end{bmatrix}^t$$
av punkter i planet
2. Vill anpassa funktion
$$f(x; c_1, \ldots, c_n)$$
där $c_1, \ldots, c_m$ är parametrar, vilka skall väljas väl
3. Mål:
$$\begin{bmatrix}(x_1, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_n, y_n)\end{bmatrix}^t$$
och
$$\begin{bmatrix}(x_1, f(x_1)) & (x_2, f(x_2)) & \cdots & (x_n, f(x_n))\end{bmatrix}^t$$
skall vara så nära varandra som möjligt

Kurvanpassning (forts)

4. Rimligt avståndsmått (beror av parametrarna c):

$$\sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - y_j)^2 = \left\| \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^t \right\|^2$$

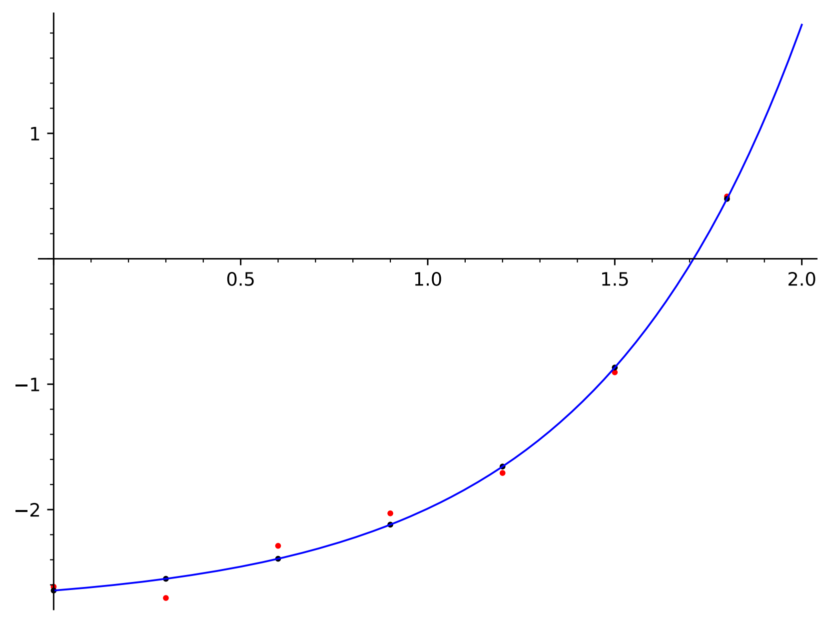
5. Om $f(x; c_1, \ldots, c_m)$ beror linjärt av parametrarna, så blir detta ett minstakvadratproblem. Att försöka få kurvan att gå genom alla punkter blir ett överbestämt linjärt ekvationssystem, olösligt, vi kan bara hoppas på bästa approximation.

6. Observera att $f(x; c_1, \ldots, c_m)$ inte behöver vara linjär i x, bara i parametrarna c. Vi repeterar den tidigare bilden, som är kurvanpassning till de röda punkterna med funktionen

$$f(x; c_1, c_2, c_3) = c_1 + c_2 e^{c_3 x}$$

vilket med optimerade parametrar blir

$$x \mapsto 0.1331922358070072\, e^{(1.7758472058077772\, x)} - 2.7785938212047143$$


1
−1
−2
0.5
1.0
1.5
2.0

Anpassning av rät linje

1. Enklaste fallet: anpassa $f(x) = c_1 + c_2 x$
2. Kallas för *linjär regression*, används i statistik
3. Linjära ekvationer

$$\begin{aligned} c_1 + x_1 c_2 &= y_1 \\ c_1 + x_2 c_2 &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ c_1 + x_n c_2 &= y_n \end{aligned}$$

4. På matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Anpassning av rät linje (forts)

5. Normalekvationer

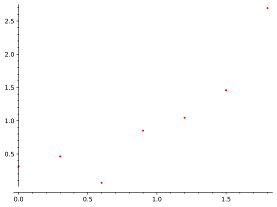
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

6. Förenklas till

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{j=1}^n x_j \\ \sum_{j=1}^n x_j & \sum_{j=1}^n x_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n y_j \\ \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{bmatrix}$$

Exempel

Vi har punkterna



och vill anpassa linjen $f(x) = c_1 + c_2 x$ till dessa.
Vi bildar vektorn av x-koordinater och av y-koordinater:

$$X = \begin{pmatrix} 0.000000000000000 \\ 0.300000000000000 \\ 0.600000000000000 \\ 0.900000000000000 \\ 1.20000000000000 \\ 1.50000000000000 \\ 1.80000000000000 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0.315493201330617 \\ 0.463576093268737 \\ 0.0670997232430671 \\ 0.851539585175487 \\ 1.04521962744560 \\ 1.45980600706990 \\ 2.69407339557138 \end{pmatrix}$$

Exempel (LR forts)

Vi får det överbestämda linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & | & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = Y$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 1.00000000000000 & 0.000000000000000 \\ 1.00000000000000 & 0.300000000000000 \\ 1.00000000000000 & 0.600000000000000 \\ 1.00000000000000 & 0.900000000000000 \\ 1.00000000000000 & 1.20000000000000 \\ 1.00000000000000 & 1.50000000000000 \\ 1.00000000000000 & 1.80000000000000 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0.315493201330617 \\ 0.463576093268737 \\ 0.0670997232430671 \\ 0.851539585175487 \\ 1.04521962744560 \\ 1.45980600706990 \\ 2.69407339557138 \end{pmatrix}$$

Exempel (LR forts)

Normalekvationerna

$$\begin{bmatrix} 1^t \\ X^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & | & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^t \\ X^t \end{bmatrix} Y$$

blir

$$\begin{pmatrix} 7.00000000000000 & 6.30000000000000 \\ 6.30000000000000 & 8.19000000000000 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6.89680763310479 \\ 9.23902296415246 \end{pmatrix}$$

vilket har lösningen

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0975618003986527 \\ 1.20313337077704 \end{pmatrix}$$

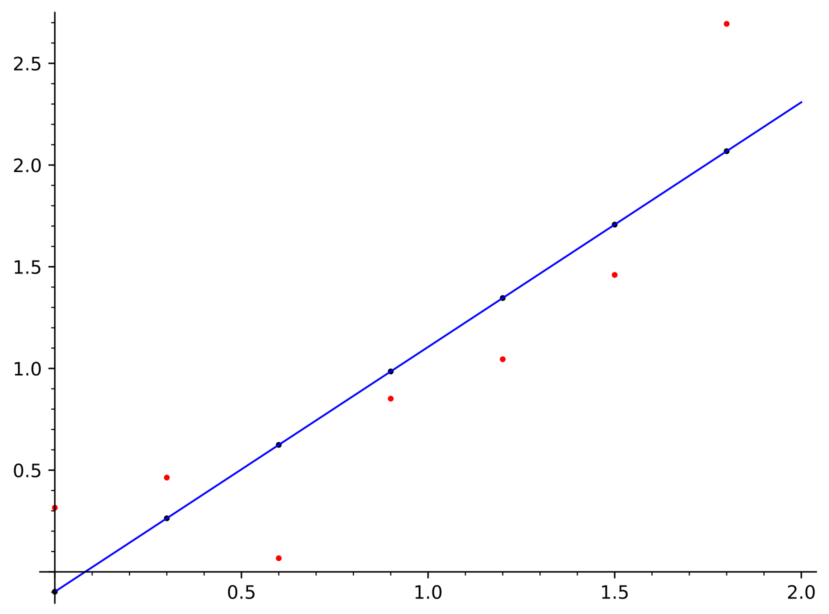
Felvektorn

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -0.413055001729270 \\ -0.200197882434277 \\ 0.557218498824505 \\ 0.133718648125198 \\ 0.300978617088193 \\ 0.247332248697008 \\ -0.625995128571357 \end{pmatrix}$$

har norm 1.04052776467440033.
Bästa linjära approximation är

$$x \mapsto 1.2031333750626523\, x - 0.09756180417121407$$

Exempel: Linjär regression



1. Vill anpassa till polynom $f(x) = c_0 + + c_1 x + \cdots + c_m x^m$
2. Linjära ekvationer

$$
\begin{aligned}
c_0 + x_1 c_1 + \cdots + x_1^m c_m &= y_1 \\
c_0 + x_2 c_1 + \cdots + x_2^m c_m &= y_2 \\
\vdots &= \vdots \\
c_0 + x_n c_1 + \cdots + x_n^m c_m &= y_n
\end{aligned}
$$

3. På matrisform

$$
\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

Exempel

1. Antag specifikt att vi vill anpassa till ett andragradspolynom $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$
2. Linjära ekvationer

$$\begin{aligned} c_0 + x_1 c_1 + x_1^2 c_2 &= y_1 \\ c_0 + x_2 c_1 + x_2^2 c_m &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ c_0 + x_n c_1 + x_n^2 c_m &= y_n \end{aligned}$$

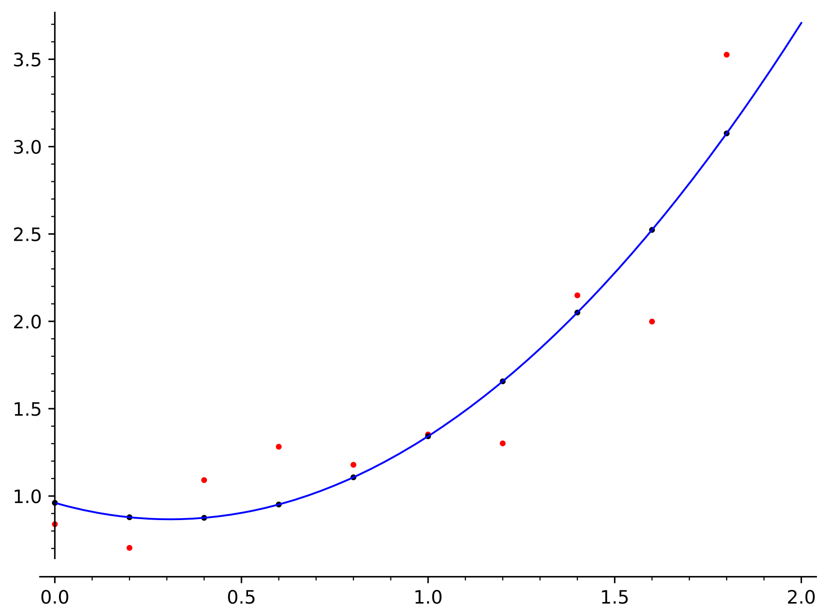
3. På matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

4. Normalekvationer

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{j=1}^n x_j & \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ \sum_{j=1}^n x_j & \sum_{j=1}^n x_j^2 & \sum_{j=1}^n x_j^3 \\ \sum_{j=1}^n x_j^2 & \sum_{j=1}^n x_j^3 & \sum_{j=1}^n x_j^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n y_j \\ \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ \sum_{j=1}^n x_j^2 y_j \end{bmatrix}$$

Exempel: Anpassning till andragradspolynom



Ortogonalprojektion via minstakvadrat

1. Minstakvadratlösning av $AX = B$ är lösning av $AX = B_{\|}$, där $B_{\|}$ är ortogonalprojektionen av B på kolonnrummet till A.
2. Metod med normalekvationer: lös $A^t AX = A^t B$
3. Effektivt!
4. Vill ortogonalprojicera B på $\mathrm{span}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$
5. Låt
$$A = \left[\bar{u}_1 \;\middle|\; \bar{u}_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \bar{u}_m\right]$$
matrisen med $\bar{u}_j$ som kolonner
6. Minstakvadratlös $AX = B$
7. AX är nu ortogonalprojektionen!
8. $B - AX$ är $B_{\perp}$
9. Kan parallelliseras: om man har fix $\mathrm{span}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$ och ett antal olika $\bar{v}_j$ att ortogonalprojisera på detta, låt
$$B = \left[\bar{v}_1 \;\middle|\; \bar{v}_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \bar{v}_\ell\right]$$

Exempel

Låt $V = \mathrm{span}(\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \overline{\mathrm{u}}_3) \leq \mathbb{R}^8$, $\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2 \in \mathbb{R}^8$ med

$$\overline{\mathrm{u}}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)\,,\ \overline{\mathrm{u}}_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2)\,,\ \overline{\mathrm{u}}_3 = (0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1)\,,$$
$$\overline{\mathrm{v}}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8)\,,\ \overline{\mathrm{v}}_2 = (2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 1)$$

Vi kan ortogonalprojisera $\overline{\mathrm{v}}_1, \overline{\mathrm{v}}_2$ på V samtidigt genom att sätta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

och sedan minstakvadrat-lösa $AX = B$, dvs lösa normalekvationerna $A^t AX = A^t B$.

Exempel (forts)

Vi får att

$$A^t A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 7 \\ 12 & 20 & 11 \\ 7 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

och

$$A^t B = \begin{pmatrix} 36 & 36 \\ 56 & 52 \\ 33 & 32 \end{pmatrix}$$

och lösningen till $A^t AX = A^t B$ är

$$X = \begin{pmatrix} \frac{55}{19} & \frac{112}{19} \\ \frac{18}{19} & -\frac{20}{19} \\ \frac{4}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

För denna lösning X så är

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{73}{19} & \frac{92}{19} \\ 5 & 4 \\ \frac{81}{19} & \frac{100}{19} \\ \frac{91}{19} & \frac{72}{19} \\ \frac{77}{19} & \frac{96}{19} \\ \frac{99}{19} & \frac{80}{19} \\ \frac{73}{19} & \frac{92}{19} \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

så vi kan läsa ut ortogonalprojektionen av $\overline{v}_1$ och $\overline{v}_1$ på V som kolonnerna i den matrisen.

Exempel (forts)

Antag att $V = \mathrm{span}(\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \overline{\mathrm{u}}_3)$ är fixt men att det med händanefter då och då kommer att drälla in en *massa* $\overline{\mathrm{v}}$, som alla skall ortogonalprojiseras på V. Då är det mest effektivt att förbereda sig genom att (med GS) räkna ut en ON-bas för V, eller:
beräkna först

$$C = A(A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{19} & 0 & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} & \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{7}{19} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{19} & 0 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{6}{19} & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & 0 \\ \frac{3}{19} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{19} & \frac{35}{76} & -\frac{1}{19} & \frac{3}{76} & \frac{3}{19} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{19} & 0 & \frac{6}{19} & -\frac{1}{19} & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & \frac{4}{19} & 0 \\ -\frac{3}{19} & \frac{1}{4} & \frac{5}{19} & \frac{3}{76} & \frac{1}{19} & \frac{35}{76} & -\frac{3}{19} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{19} & 0 & \frac{1}{19} & \frac{3}{19} & \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} & \frac{7}{19} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Ett nytt $\overline{\mathrm{v}}$, tex

$$\overline{\mathrm{v}} = (0,\, 1,\, 0,\, 1,\, 0,\, 1,\, 1,\, 1)\,,$$

kan nu ortogonalprojiceras på V genom att multipliceras med C:

$$C\overline{\mathrm{v}} = \left(\frac{7}{19},\, 1,\, \frac{1}{19},\, \frac{22}{19},\, \frac{4}{19},\, \frac{16}{19},\, \frac{7}{19},\, 1\right)$$