TATA24 Linjär Algebra, Fö 12

Determinanter

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Exempel

Vi tittar på ekvationssystemet

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

i variablerna x, y. Det kan skrivas som $AX = B$, och vi löser det genom att beräkna den reducerade trappstegsformen för den augmenterade matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right)$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & e/a \\ c & d & f \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & e/a \\ 0 & d - cb/a & f - ce/a \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & b/a & e/a \\ 0 & 1 & \frac{f-ce/a}{d-cb/a} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & e/a - \frac{b}{a}\frac{f-ce/a}{d-cb/a} \\ 0 & 1 & \frac{f-ce/a}{d-cb/a} \end{array}\right)$$

under förutsättning att $a \neq 0$ och att $d - cb/a \neq 0$. Det sista villkoret är likvärdigt med att $ad - bc \neq 0$, och kvantiteten $ad - bc$ kallas för *determinanten* till koefficientmatrisen A.

Exempel (forts)

Det visar sig att villkoret $a \neq 0$ inte är nödvändigt, men att

$$ad - bc \neq 0$$

är nödvändigt och tillräckligt för att

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

skall ha en unik lösning. Notera:

- Om vi skalar om första ekvationen till $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ så blir determinanten $\lambda ac - \lambda bd = \lambda(ad - bc)$, dvs den skalas likadant
- Samma sak om vi skalar om andra ekvationen!

Exempel (forts)

- Om vi byter x mot λx överallt så blir systemet

$$\begin{aligned} a\lambda x + by &= e \\ c\lambda x + dy &= f \end{aligned}$$

och determinanten blir ånyo skalad med en faktor λ

- Om vi listar ekvationerna i omvänd ordning,

$$\begin{aligned} cx + dy &= f \\ ax + by &= e \end{aligned}$$

så byter determinanten tecken till $cb - da$. Så egenskapen "nollskiljd determinant" bevaras av detta, vilket är bra om vi vill att determinanten skall *determinera* (avgöra) om systemet har unik lösning.

Definition

- En permutation (på $\{1, 2, \ldots, n\}$) är en bijektion $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Mängden av dessa betecknas med S_n. Den innehåller $n!$ element.
- Vi skriver $\sigma\tau$ för den sammansatta permutationen $\sigma \circ \tau$ som har $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$. Observera att τ utförs först.
- Vi kan skriva permutationen med *enradsnotation*, som en lista $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$.
- Vi kan definiera en *permutationsmatris* hörande till σ som den matris man får när man permuterar raderna i enhetsmatrisen enligt σ; det innebär att rad i består av nollor utom en enda etta, som finns i kolonn $\sigma(i)$.
- En *transposition* är en permutation som byter plats på elementen i och j och fixerar övriga element. En transposition är *närliggande* om $|i - j| = 1$.

Exempel

Elementen i S_3 är

[1, 2, 3] [1, 3, 2] [2, 1, 3] [2, 3, 1] [3, 1, 2] [3,2,1] och motsvarande matriser blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Av dessa är $[1, 3, 2]$, $[2, 1, 3]$ och $[3, 2, 1]$ transpositioner; $[1, 3, 2]$ och $[2, 1, 3]$ är närliggande transpositioner.

Definition

Permutationen σ har en inversion i paret (i, j) om $i < j$ men $\sigma(i) > \sigma(j)$. Tecknet för en partition är pariteten för antalet inversioner, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\text{inversioner}}$

Exempel

Permutationerna i S_3 och deras inversioner och tecken:

permutation	inversioner	tecken
$1, 2, 3$		1
$1, 3, 2$	$(2, 3)$	-1
$2, 1, 3$	$(1, 2)$	-1
$2, 3, 1$	$(1, 3), (2, 3)$	1
$3, 1, 2$	$(1, 2), (1, 3)$	1
$3, 2, 1$	$(1, 2), (1, 3), (2, 3)$	-1

Tecknet av en permutation

Sats

1. *Varje permutation kan skrivas som en produkt av tranpositioner*
2. *Varje tranposition kan skrivas som en produkt av ett udda antal närliggande tranpositioner*
3. *Om* $\sigma \in S_n$ *och* τ *är en närliggande transposition så*
$$\#inversioner(\tau\sigma) = \#inversioner(\sigma) \pm 1$$
4. *Om* $\sigma \in S_n$ *och* τ *är en transposition så*
$$\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$$
5. *Om* $\sigma \in S_n$ *och* $\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$ *så kan* σ *skrivas som en produkt av ett jämnt antal permutationer, men inte som en produkt av ett udda antal permutationer.*
6. *Om* $\sigma \in S_n$ *och* $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ *så kan* σ *skrivas som en produkt av ett udda antal permutationer, men inte som en produkt av ett jämnt antal permutationer.*

Definition

Låt $A = (a_{ij})$ vara en $n \times n$-matris. Då ges determinanten av A av

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} \tag{1}$$

Termen $\prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$ är ett schackbrädesmönster av element från A, utmaskade med motsvarande permutationsmatris.

Exempel

En 1×1-matris är sin egen determinant:

$$\det \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = a$$

Exempel

Fallet med en 2×2-matris är enkelt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{produkt} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} - \text{produkt} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = ad - bc$$

Exempel

Vi tittar på den allmänna matrisen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ och studerar bidraget till $\det(A)$ från permutationen $\sigma = [3, 2, 1]$, som har tecken -1. Permutationsmatrisen är $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ så bidraget blir

$$-\text{ produkt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

För att få hela determinanten så får man summera bidragen från alla 6 permutationerna i S_3.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel (forts)

Vi beräknar hela determinanten av A, och summerar de positiva bidragen först:

$$
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =
$$

$$
\text{produkt} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \text{produkt} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & \end{pmatrix} + \text{produkt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
- \text{produkt} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{produkt} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \text{produkt} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
$$

Detta specialfall (3×3-matris) kallas för *Sarrus regel*.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

För att beräkna determinanten av en 4×4-matris så behöver vi summera över $4! = 24$ permutationer, 12 med positivt tecken och 12 med negativt. De med positivt tecken är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

De med negativt tecken är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det följer att

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$$
$$+ a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$$
$$+ a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$
$$- a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Detta tämligen bökiga uttryck blir förstås än värre för 5×5-matriser osv. Vi kan dock beräkna dessa effektivt mha *radelimination*.

Sats

Determinanten för en diagonalmatris

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

ges a produkten av diagonalelementen, dvs av

$$d_{11} d_{22} \cdots d_{nn}$$

Bevis.

Alla tillåtna produkter utom denna stöter på en nolla. □

Sats

Determinanten för en övertriangulär matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ges a produkten av diagonalelementen, dvs av

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Bevis.

Alla tillåtna produkter utom denna stöter på en nolla. $\square$

Sats

Låt A vara en $n \times n$-matris, här illustrerat för $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

1. *Att multiplicera en rad med en konstant k multiplicerar determinanten med k:*

$$\det\left(\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} x_{00}k & x_{01}k & x_{02}k \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} =$$

$$k\det\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Sats (forts)

2. *Att byta plats på två rader i matrisen byter tecken på determinanten:*

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = -\det\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Sats (forts)

3. *Låt B ha samma element som A utom i rad i, och låt likaså C ha samma element som A utom i rad i; i denna rad är C summan av raden från A och raden från B. Då är* $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.
Med andra ord:

$$\det\begin{pmatrix} y_0 + x_{00} & y_1 + x_{01} & y_2 + x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Sats (forts)

4. *A och dess transponat A^t har samma determinant, dvs*

$$\det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{10} & x_{20} \\ x_{01} & x_{11} & x_{21} \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Sats (forts)

5. *Om någon rad i A är en linjärkombination av de övriga raderna så är $\det A = 0$. Speciellt så är $\det A = 0$ om någon rad i A består av enbart nollor, eller om två rader är lika, eller proportionerliga.*
Så

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{00}+x_{10} & x_{01}+x_{11} & x_{02}+x_{12} \end{pmatrix} = 0$$

Sats (forts)

6. *Om B fås från A genom att någon multipel av en rad adderas till en annan (i A) så är* $\det(B) = \det(A)$.
Exempelvis så

$$\det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 10x_{00} + x_{20} & 10x_{01} + x_{21} & 10x_{02} + x_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

Sats (forts)

7. *Om $A \sim B$, dvs B är radekvivalent med A, så är*

$$\det B = k \det A$$

där k är en faktor som enbart beror på vilka elementära radoperationer som utförts.
Exempel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = (-3) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$(-3) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3) \times 0 = 0$$

Algoritm för beräkning av determinant

1. Indata: matris A av format $n \times n$
2. Sätt $k = 1$
3. Om det uppstår en nollrad eller en nollkolumn så är determinanten noll
4. Utför radoperationer för att få matrisen till övertriangulär form. Uppdatera k:
   1. Om vi bytte rader, byt tecken på k
   2. Om vi multiplicerade någon rad med c, dividera k med c
   3. Om vi adderade en multipel av en rad till en annan, låt k vara oförändrad.
5. Vi kan om vi så önskar utföra kolumnoperationer; dessa behövs inte men kan leda till en snabbare lösning. Kolumnbyte byter tecken, division med c leder till att k multipliceras med c, addition av en kolumn till en annan påverkar inte k.

Notation: vi skriver $|A|$ som alternativ till $\det(A)$.

Exempel 4.5.3. Beräkna

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lösning: Vi skall beräkna determinanten genom att göra rad- och kolonnoperationer på ett sådant sätt att vi kan koppla den givna determinanten till determinanten av en trappstegsmatris. Då raderna 2, 3 och 4 har samma element i kolonn 1 och 4 börjar vi med att från kolonn 1 subtrahera kolonn 4. Enligt ovanstående ändrar denna operation ej determinantens värde.

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{k_1-k_4}{=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Byt plats på} \\ \text{rad 2 och rad 3} \\ \text{Bryt ut 2 ur } k_3 \end{bmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\substack{r_3-4r_2 \\ r_4-2r_2}}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Byt plats på} \\ \text{kolonn 3 och kolonn 4} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-7) = -14$$

Längre fram skall vi effektivisera detta förfarande ytterligare. ♦

Sats 4.7.1. *Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta:*

(a) $\det A \neq 0$.

(b) *A är inverterbar.*

(c) *Matrisekvationen (ekvationssystemet) $AX = Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$-matriser Y.*

(d) *Matrisekvationen (ekvationssystemet) $AX = 0$ har endast den triviala lösningen, $X = 0$.*

(e) $\operatorname{rang} A = n$.

(f) *A är radekvivalent med enhetsmatrisen.*

Bevis:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{n1} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{n2} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right).$$

Vi kan nu visa

Lemma

Om A är en $n \times n$-matris och $BA = I$, så är $AB = I$.

Bevis.

Om $BA = I$ och $AX = 0$ så $B(AX) = 0$, men också $(BA)X = IX = X$, så $X = 0$. Enligt föregående så är A inverterbar, dvs det finns C så att $CA = AC = I$. Vi har alltså att $BA = CA = I$, så

$$BAC = CAC \quad \Longrightarrow \quad BI = CI \quad \Longrightarrow \quad B = C$$

$\square$

Korollarium 4.7.2. (Determinantkriteriet)

$\det A \neq 0 \iff$ *Ekvationssystemet $AX = Y$ är entydigt lösbart för alla $n \times 1$-matriser Y.*

$$\det A = 0 \iff \begin{cases} AX = Y \text{ saknar lösning} \\ \qquad \text{eller} \\ AX = Y \text{ har oändligt många lösningar} \end{cases}$$

Den entydiga lösningen i första fallet är

$$X = A^{-1} Y$$

Om $\det A = 0$ men $AX = Y$ har någon partikulärlösning $X = X_p$, och $AX = 0$ har den allmänna (oändligt många) lösningen X_h, så ges samtliga lösningar av

$$X = X_p + X_h$$

Exempel

Lös

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ x + a^2 y &= b \end{aligned}$$

för alla värden på parametrarna a, b.
Determinanten för koefficientmatrisen är

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 - a$$

1. Om $a \notin \{0, 1\}$ ges den unika lösningen av

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-a} + 1 & -\frac{a}{a^2-a} \\ -\frac{1}{a^2-a} & \frac{1}{a^2-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a-1} \\ \frac{b-1}{a^2-a} \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

2. Om $a = 0$ så blir systemet

$$x = 1$$
$$x = b$$

så vi ser att vi får två underfall:

   i. Om $b \neq 1$ saknas lösning.
   ii. Om $b = 1$ så får vi det oändligt många lösningarna $x = 1$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$. Notera att t också kallas för "parameter" men att den har en annan roll än parametrarna a, b, som modifierar *problemet*.

3. Om $a = 1$ så blir systemet

$$x + y = 1$$
$$x + y = b$$

så vi får åny två underfall:

   i. Om $b \neq 1$ saknas lösning.
   ii. Om $b = 1$ har vi lösningarna $y = t$, $x = -t$, $t \in \mathbb{R}$.

Definition 4.6.1. Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $(n-1)\times(n-1)$-matrisen A_{ij} vara den matris som fås då rad i och kolonn j stryks ur A. Då kallas $M_{ij} = \det A_{ij}$ *minoren* till elementet a_{ij} och $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ kallas *kofaktorn* till elementet a_{ij}.

Exempel 4.6.2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}.$$

Bestäm A_{12}, C_{12} och M_{31}.
Lösning: Stryk rad 1 och kolonn 2 ur A, d v s tänk

$$\begin{pmatrix} \text{[redacted]} & & \\ 21 & \text{[redacted]} & 23 \\ 31 & & 33 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{pmatrix}, \; C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{vmatrix} = -(21 \cdot 33 - 23 \cdot 31) = 20.$$

På samma sätt fås $M_{31} = \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 22 & 23 \end{vmatrix} = 12 \cdot 23 - 13 \cdot 22 = -10.$ ♦

Sats 4.6.3. *Låt A vara en $n \times n$-matris. Då gäller att*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \qquad \textit{Utveckling efter rad } i$$
$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj} \qquad \textit{Utveckling efter kolonn } j$$

Exempel 4.6.4. För att belysa satsen ovan skall vi utveckla nedanstående determinant efter rad 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} +$$
$$+ 3(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}.$$

Sats 4.7.5. (Cramers regel) *Låt A vara en $n\times n$-matris med* $\det A \neq 0$, *B en $n\times 1$-matris och betrakta ekvationssystemet $AX = B$. Låt A_i vara den matris som erhålls då kolonn i ur A ersätts med B. Då ges den entydiga lösningen till ekvationssystemet av*

$$X = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}.$$

Satsen ser tilltalande ut men tänk på att det krävs en hel del räknande för att beräkna en determinant. Följande sats är en direkt konsekvens av Cramers regel.

Sats 4.7.6. *Låt A vara en inverterbar $n\times n$-matris. Låt $\tilde{A}$ vara A:s matris av kofaktorer, dvs elementet $\tilde{a}_{ij}$ ur $\tilde{A}$ är kofaktorn C_{ij} från A. Då gäller att*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^t.$$

För 2×2-matriser ger detta följande enkla minnesregel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

För 3×3-matris får vi den ståtliga formeln

$$\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \tilde{A}^t$$

med

$$\det \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = -x_{02}x_{11}x_{20}+x_{01}x_{12}x_{20}+x_{02}x_{10}x_{21}-x_{00}x_{12}x_{21}-x_{01}x_{10}x_{22}+x_{00}x_{11}x_{22}$$

och

$$\tilde{A}^t = \begin{pmatrix} -x_{12}x_{21} + x_{11}x_{22} & x_{02}x_{21} - x_{01}x_{22} & -x_{02}x_{11} + x_{01}x_{12} \\ x_{12}x_{20} - x_{10}x_{22} & -x_{02}x_{20} + x_{00}x_{22} & x_{02}x_{10} - x_{00}x_{12} \\ -x_{11}x_{20} + x_{10}x_{21} & x_{01}x_{20} - x_{00}x_{21} & -x_{01}x_{10} + x_{00}x_{11} \end{pmatrix}$$

Exempel

Vi tittar ånyo på systemet

$$
\begin{aligned}
x + ay &= 1 \\
x + a^2 y &= b
\end{aligned}
$$

Determinanten för koefficientmatrisen är

$$
\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 - a
$$

så lösningen ges av

$$
x = \frac{\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & a \\ b & a^2 \end{array} \right)}{\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}} = \frac{a^2 - ab}{a^2 - a}
$$

$$
y = \frac{\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & b \end{array} \right)}{\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}} = \frac{b - 1}{a^2 - a}
$$

Determinanten av produkten av två matriser

Sats

Låt A, B vara $n \times n$-matriser. Då gäller att

$$\det AB = \det A \det B$$

Bevis.

Vi har att $A \sim J_1$ där J_1 är på radreducerad form, vilket kan skrivas som

$$\prod_\ell E_\ell A = J_1,$$

där varje E_ℓ är en elementär matris eller en permutationsmatris (hörande till en transposition). Om J har en nollrad så är $\det A = 0$. I detta fall har vi även att

$$\prod_\ell E_\ell AB = J_1 B$$

har en nollrad, så elementära radoperationer producerade en nollrad i AB, så $\det AB = 0$. □

Bevis (forts).

Antag därför att J_1 inte har en nollrad, så $J_1 = I$. Då är $\det A = k$, en faktor som bara beror på radoperationerna; denna faktor är precis

$$\prod_{\ell} \det E_\ell.$$

Vi har nu att

$$\prod_{\ell} E_\ell AB = IB = B,$$

som reduceras till trappstegsform J_2 mha en följd av elementära radoperationer; alltså gäller

$$J_2 = \prod_{\nu} E_\nu$$

Om J_2 har en nollrad så är $\det(B) = \det(AB) = 0$. Annars är $\det B = s \det J_2$, där s är en konstant som bara beror av radoperationerna, och mer precist

$$s = \prod_{\nu} \det E_\nu.$$

Men på samma sätt är $\det AB = ks \det J_2$. Eftersom $\det A = k$, $\det B = s \det J_2$, så föjer att $\det AB = \det A \det B$. □

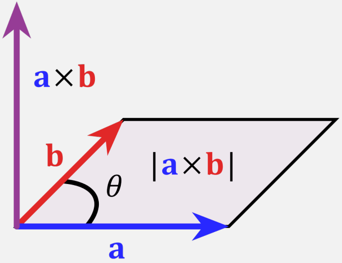
Kom ihåg:

$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \qquad (2.6.4)$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

Vi kan formulera detta som

$$= \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.9.1)$$



Exempel

Vad är arean av triangeln med hörn i $A = (0,0,1)$, $B = (2,2,2)$, $C = (1,0,3)$?

Kantvektorerna är $\overline{AB} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ och $\overline{AC} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ så arean av triangeln, vilket är hälften av arean av parallellogrammet, blir halva längden av vektorn

$$\left|\begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3}\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right| = \underline{e}\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

dvs

$$\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{29}$$

Om $\overline{a}$, $\overline{b}$ ligger i planet så sätter vi bara $z = 0$:

$$\overline{a} = a_x\overline{e_1} + a_y\overline{e_2}$$

$$\overline{b} = b_x\overline{e_1} + b_y\overline{e_2}$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \overline{e_3}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

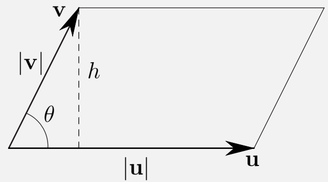
Exempel

Vad är arean av parallellogrammet *ABCD* med $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (0,2)$, $D = (1,3)$? Vi har att $\overline{AB} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$, $\overline{AC} = -\overline{e_1} + \overline{e_2}$, så arean blir längden av

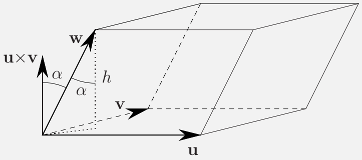
$$\overline{e_3}\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2\overline{e_3}$$

dvs 2. Obs: om determinanten hade varit negativ så hade vi fått ta *beloppet* av den för att få arean. Tecknet för determinanten anger parallellogrammets *orientering*.

.



Figur 2.29: Area av parallellogram ur kryssprodukt.



Figur 2.30: Volymprodukt.

- Volym $V = \|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}\|$.

Sats 2.7.2. *Om* **u**, **v**, **w** *är tre vektorer i rummet så gäller:*

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \quad \textit{är ett högersystem}\\
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \quad \textit{är ett vänstersystem}\\
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \quad \textit{ligger i samma plan}
\end{aligned}
$$

-

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w} = \left| \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \right| \cdot \begin{pmatrix} w_z \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} \right|$$

Tecknet för determinanten anger återigen en *orientering*: är $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, *i den ordningen*, ett högersystem (tecknet $+$) eller ett vänstersystem (tecknet $-$).
Till skillnade från vektorprodukten, som är specifik för tre dimensioner, fungerar determinantformeln i högre dimensioner.

Exempel

Hyperparallellepipeden spännt av vektorerna

$$\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{17e_3} + 17\overline{e_4}, \quad \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}, \quad \overline{e_1}, \quad 2\overline{e_1} + \overline{e_2}$$

har 4-dimensionell volym 2 och är negativt orienterad m.a.p. den givna uppräkningen av kantvektorer.