TATA24 Linjär Algebra, Fö 15

Nollrum, Värderum, Dimensionssatsen

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Definition

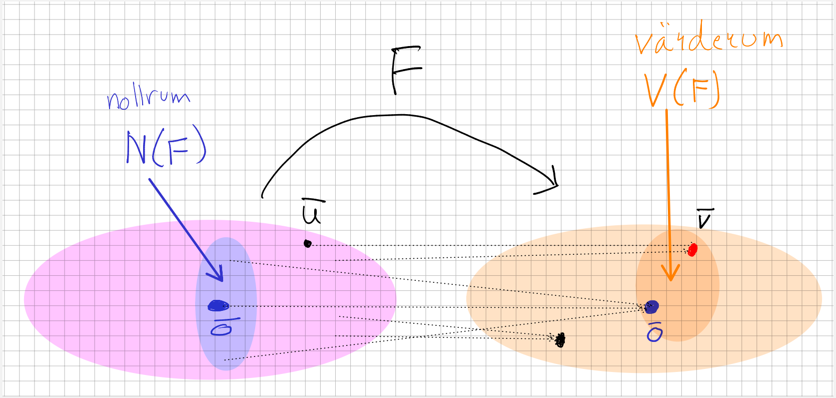
Låt U, V vara vektorrum och låt $F : U \to V$ vara en linjär avbildning. Vi kallar U för definitionsmängd till F och V för målmängd.

- Nollrummet till F är

$$N(F) = \{\, \bar{u} \in U \,|\, F(\bar{u}) = \bar{0} \,\}$$

- Värderummet till F är

$$V(F) = \{\bar{v} \in V \,|\, \text{finns } \bar{u} \in U \text{ så att } F(\bar{u}) = \bar{v}\}$$



Nollrum och värderum är delrum

Sats

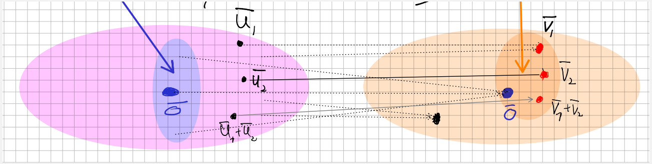
Låt U, V vara vektorrum och låt $F : U \to V$ vara en linjär avbildning.

1. *$N(F)$ är ett delrum till U,*
2. *$V(F)$ är ett delrum till V.*

Bevis.

1. Låt $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in N(F)$, $c \in \mathbb{R}$. Då är $F(\bar{u}_1) = \bar{0}$ så $F(c\bar{u}_1) = cF(\bar{u}_1) = c\bar{0} = \bar{0}$, så $c\bar{u}_1 \in N(F)$. Vidare så är $F(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = F(\bar{u}_1) + F(\bar{u}_2) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, så $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \in N(F)$.
2. Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V(F)$, $c \in \mathbb{R}$. Då finns $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$ med $F(\bar{u}_1) = \bar{v}_1$, $F(\bar{u}_2) = \bar{v}_2$. Men $F(c\bar{u}_1) = cF(\bar{u}_1) = c\bar{v}_1$, så $c\bar{v}_1 \in V(F)$. Dessutom så är $F(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = F(\bar{u}_1) + F(\bar{u}_2) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, så $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V(F)$.

□

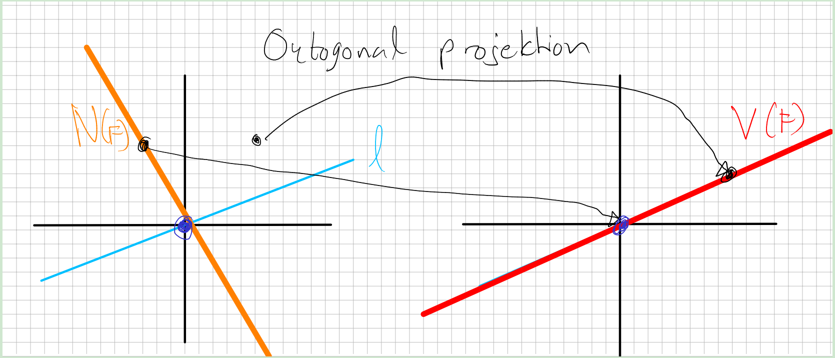


Exempel (Projektion i planet)

Låt F vara projektion på linjen ℓ genom origo med riktningsvektor $\overline{v} = \underline{e}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ av längd ett. Då är avbildningsmatrisen för F given av

$$M = \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix}$$

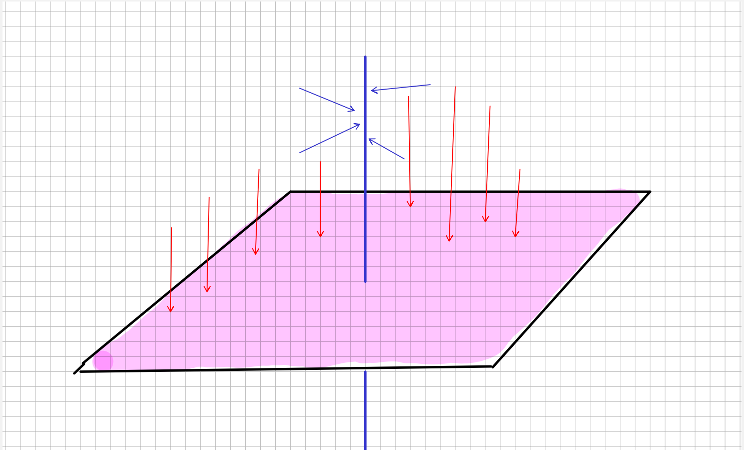
Värderummet är linjen ℓ, nollrummet är normallinjen genom origo.



Exempel (Projektion i rummet)

Låt P vara ett plan genom origo, i rummet, och låt ℓ vara normallinjen till planet, genom origo. Låt F vara ortogonal projektion på planet, och G vara ortogonal projektion på normallinjen. Då:

1. $F + G = I$
2. $V(F) = P$, $N(F) = \ell$
3. $V(G) = \ell$, $N(G) = P$



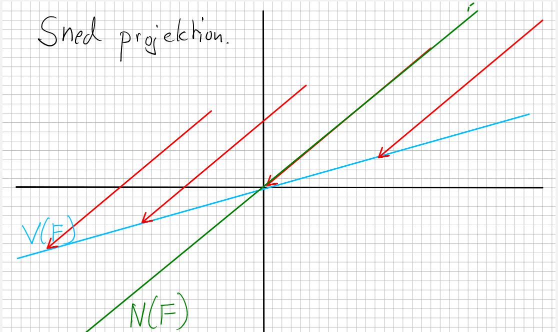
Exempel (Sned projektion i planet)

Låt $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}$ vara en nollskilda ickeparallella vektorer.
En godtycklig vektor $\overline{\mathrm{w}}$ kan skrivas unikt

$$\overline{\mathrm{w}} = c\overline{\mathrm{u}} + d\overline{\mathrm{v}}.$$

Låt $F(\overline{\mathrm{w}}) = c\overline{\mathrm{u}}$. Då är F en linjär avbildning, sned projektion, i riktning $\overline{\mathrm{v}}$, på linjen genom origo spänd av $\overline{\mathrm{u}}$. Vi har

$$V(F) = \mathrm{span}(\overline{\mathrm{u}})$$
$$N(F) = \mathrm{span}(\overline{\mathrm{v}})$$



Exempel

Låt $U = V = C^\infty(\mathbb{R})$, vektorrummet av oändligt deriverbara rellvärda funktioner på rella axeln. Låt $D : V \to V$ vara deriveringsoperatorn, $D(f(x)) = f'(x)$. Den är linjär:

$$D(f(x) + g(x)) = D(f(x)) + D(g(x))$$
$$D(cf(x)) = cD(f(x))$$

Djupt? resultat från TATA41 (följer av medelvärdessatsen tex):

Lemma

$N(D)$ är precis de konstanta funktionerna, dvs ett 1-dim delrum.

Ännu djupare? resultatat från TATA41:

Lemma

$V(D) = V$, dvs värderummet är hela alltet.

Bevis.

Tag $f(x) \in V$. Vi vill visa att $f(x) \in V(D)$ dvs att det finns $g(x) \in V$ med $D(g(x)) = f(x)$. M.a.o vill vi hitta en primitiv funktion till $f(x)$, men analysens fundamentalsats ger att

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

duger. $\square$

Sats

Låt $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ges av

$$X \mapsto AX$$

där A är en $m \times n$-matris.

1. *$N(F)$ är nollrummet till A, dvs $\{\, X \,|\, AX = 0 \,\}$*
2. *$V(F)$ är kolonnrummet till A, dvs $V(F) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j A_j \middle| x_j \in \mathbb{R} \right\}$*

Exempel

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ och låt $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara motsvarande linjära avbildning. Reducerad trappstegsform till A är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ så nollrummet blir spännt av $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och har dimension 1, medan kolonnrummet spänns upp av de första två kolonnerna och alltså har dimension 2.

Sats

Låt U, V vara ändligtdimensionella vektorrum med ordnade baser $\underline{e}$ och $\underline{f}$. Låt

$$F : U \to V$$
$$F(\underline{e}X) = \underline{f}AX$$

vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A.

1. *$N(F)$ är i princip nollrummet till A, dvs $N(F) = \{\, \underline{e}X \,|\, AX = 0 \,\}$*
2. *$V(F)$ är i princip kolonnrummet till A, dvs $V(F) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \underline{f} x_j A_j \middle| x_j \in \mathbb{R} \right\}$*

Exempel

Låt $F : P_2 \to P_2$ ges av $F(p(x)) = xp'(x)$. Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$. Då har F avbildningsmatris $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ vilken har nollrum $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ och kolonnrum $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ så nollrummet till F är spännt av det konstanta polynomet 1, och värderummet av polynomen x, och x^2.

Värdemängd och godtagbara högerled

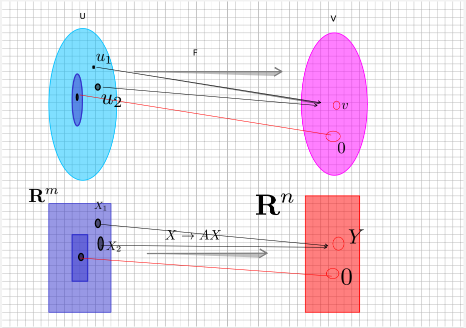
Sats

Låt U, V vara ändligtdimensionella vektorrum med ordnade baser $\underline{e}$ och $\underline{f}$. Låt

$$F : U \to V$$
$$F(\underline{e}X) = \underline{f}AX$$

vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A. Låt $\overline{v} = \underline{f}Y$.
Då:

1. $\overline{v} \in V(F)$ *omm det linjära ekvationssystemet* $AX = Y$ *är lösbart*
2. *Varje lösning* X *till* $AX = Y$ *ger* $\overline{u} \in U$ *med* $F(\overline{u}) = \overline{v}$ *via* $\overline{u} = \underline{e}X$
3. *Om* $\overline{u}_1 = \underline{e}X_1$, $\overline{u}_1 = \underline{e}X_2$ *och* $F(\overline{u}_1) = F(\overline{u}_2) = \overline{v}$ *så*
   1. $AX_1 = AX_2 = Y$
   2. $A(X_1 - X_2) = \overline{0}$
   3. $\overline{u}_1 - \overline{u}_2 \in N(F)$



Sats

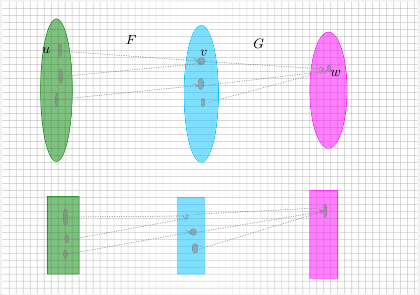
Låt U, V, W vara ändligtdimensionella vektorrum med ordnade baser $\underline{e}$ och $\underline{f}$ och $\underline{g}$. Låt

$$F : U \to V$$
$$F(\underline{e}X) = \underline{f}AX$$

vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A, och låt

$$G : V \to W$$
$$G(\underline{f}Y) = \underline{g}BX$$

vara en linjär avbildning med avbildningsmatris B. Låt $\overline{w} = \underline{g}Z \in W$. Då är $\{\overline{u} \in U | G(F(\overline{u})) = \overline{w}\} = \{\overline{a} \in U | F(a) \in H\}$ med $H = \left\{ \overline{b} \in V \middle| G(\overline{b}) = \overline{w} \right\}$.
Annorlunda uttryckt: ekvationssystemet $(BA)X = Z$ kan lösas genom att först lösa $BY = Z$ och sedan för varje lösning Y lösa $AX = Y$.



Exempel

Vi vill lösa ekvationssystemet

$$CX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 14 \\ 1 & 2 & 22 & 36 \\ 1 & 2 & 7 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = Z$$

Vi kan göra detta direkt, men om vi vet att koefficentmatrisen C kan faktoriseras som $C = LU$ med

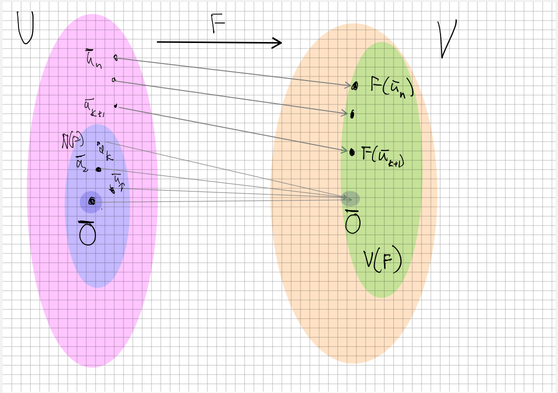
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

så är det enklare att lösa $LUX = Z$ genom att först lösa $LY = Z$ och få fram $Y = (1, 1/3, 5/18, 43/18)$ och sedan lösa $UX = Y$ och få fram $X = (25/63, 25/63, -10/21, 43/126)$.

Sats

Låt U, V vara vektorrum, och låt $\underline{e} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ vara en bas för U, som alltså har ändlig dimension n. Låt $F : U \to V$ vara en linjär avbildning.

1. $V(F) = \mathrm{span}(F(\bar{e}_1, \ldots, F(\bar{e}_n))$. *Speciellt så är $V(F)$ ändligtdimensionell.*
2. $\dim N(F) + \dim V(F) = n$.



Sats 7.5.6. (Dimensionssatsen)
Låt $\mathbb{U}$ *och* $\mathbb{V}$ *vara två vektorrum och* $F\colon \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *en linjär avbildning. Antag att* $\dim \mathbb{U} = n$. *Då är*

$$\dim N(F) + \dim V(F) = n.$$

Bevis: Om $\dim N(F) = \dim \mathbb{U} = n$ så följer det att $\mathbf{0}$ är det enda värde vi får från F, d v s $V(F) = \{\mathbf{0}\}$. Då $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$ stämmer påståendet i satsen.

Antag nu att $1 \leq \dim N(F) = k < n$. Låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ vara en bas för $N(F)$ och fyll ut med $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ till en bas för $\mathbb{U}$. Eftersom $F(\mathbf{u}_1) = \ldots = F(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$ följer det att

$$V(F) = [F(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, F(\mathbf{u}_n)]$$

och påståendet följer om vi kan visa att $\{F(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, F(\mathbf{u}_n)\}$ är linjärt oberoende. Beroendeekvationen ger

$$\lambda_{k+1} F(\mathbf{u}_{k+1}) + \ldots + \lambda_n F(\mathbf{u}_n) = F(\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$$

så att $\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n \in N(F)$. Om $\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n \neq \mathbf{0}$ så skulle $\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n$ vara en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Detta strider mot att $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ är en bas för $\mathbb{U}$. Enda möjligheten blir då att $\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Då $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ är linjärt oberoende följer det att $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, d v s $\{F(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, F(\mathbf{u}_n)\}$ är linjärt oberoende och därmed är $\dim V(F) = n - k$ så att $\dim N(F) + \dim V(F) = k + (n - k) = n$.

Om $\dim N(F) = 0$ så fungerar beviset ovan efter några smärre justeringar. Dessa lämnas som övning. ∎

Exempel

Låt $a \in \mathbb{R}$ och låt

$$A = A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

Om $a \neq 5$ så är reducerad trappstegsform $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så nollrummet spänns av $(1, -2, 1, 0)$ och har dim 1, värderummet spänns av de tre sista kolonnerna (varför inte de tre första?) och har dim 3. Den linjära avbildningen $X \mapsto AX$ går från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^3$, och $1 + 3 = 4$.
Om $a = 5$ så är reducerad trappstegsform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så nollrummet ges av $c_3 = r, c_4 = s, c_2 = -2r - 3s, c_1 = r + 2s$ dvs har bas $\big((1, -2, 0, 1) \quad (2, -3, 1, 0)\big)$. Värderummet spänns tex av de två första kolonnerna. Notera att $2 + 2 = 4$.

Exempel

Låt P_4 beteckna vektorrummet av polynom av grad högst 4, och låt V stå för vektorrummet av alla 2×2-matriser. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Definiera

$$F : \mathrm{P}_4 \to V$$
$$F(p(x)) = p(A).$$

(Verifiera att detta är en linjär avbildning!)

Eftersom $\dim \mathrm{P}_4 = 5$ så är $\dim V(F) \leq 5$. Eftersom $V(F) \leq V$ och $\dim(V) = 4$ så är $\dim V(F) \leq 4$.
Men vi har relationen

$$A^2 = 5A + 2I$$

så $V(F) = \mathrm{span}([I, A])$. Dimensionssatsen säger nu att $\dim N(F) = \dim \mathrm{P}_4 - \dim V(F) = 5 - 2 = 3$. Relationen ovan ger att

$$A^2 - 5A - 2I = 0$$

så $g(x) = x^2 - 5x - 2 \in N(F)$. Samma sak gäller för $xg(x)$ och $x^2 g(x)$, där har du ditt $N(F)$!

Exempel

Låt P_4 beteckna vektorrummet av polynom av grad högst 4, och låt V stå för vektorrummet av alla 2×2-matriser. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Definiera

$$F : \mathrm{P}_4 \to V$$
$$F(p(x)) = p(A).$$

(Verifiera att detta är en linjär avbildning!)
Eftersom $\dim \mathrm{P}_4 = 5$ så är $\dim V(F) \leq 5$. Eftersom $V(F) \leq V$ och $\dim(V) = 4$ så är $\dim V(F) \leq 4$.
Men vi har relationen

$$A^2 = 5A + 2I$$

så $V(F) = \mathrm{span}([I, A])$. Dimensionssatsen säger nu att $\dim N(F) = \dim \mathrm{P}_4 - \dim V(F) = 5 - 2 = 3$. Relationen ovan ger att

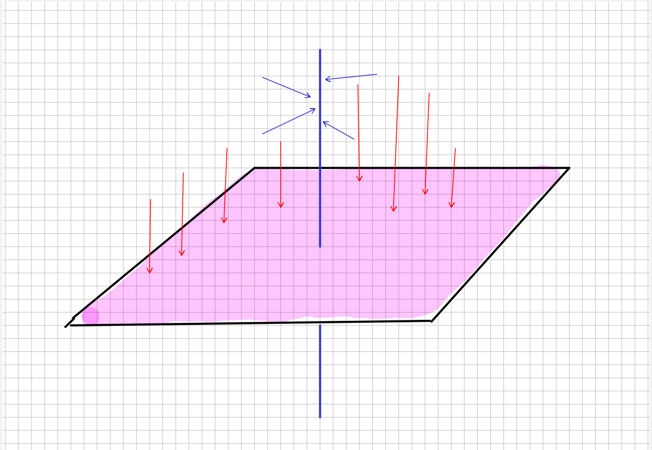
$$A^2 - 5A - 2I = 0$$

så $g(x) = x^2 - 5x - 2 \in N(F)$. Samma sak gäller för $xg(x)$ och $x^2 g(x)$, där har du ditt $N(F)$!

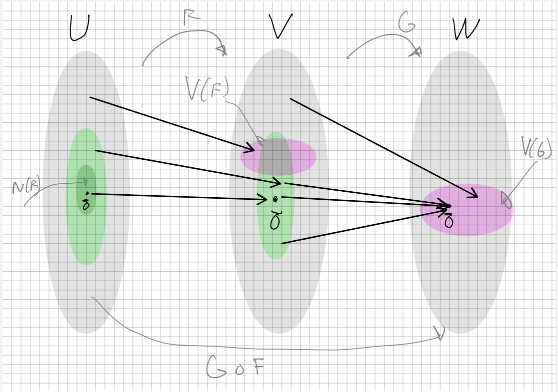
Exempel (Projektion i rummet)

Låt P vara ett plan genom origo, i rummet, och låt ℓ vara normallinjen till planet, genom origo. Låt F vara ortogonal projektion på planet, och G vara ortogonal projektion på normallinjen. Då:

1. $F + G = I$
2. $V(F) = P$, $N(F) = \ell$, $\dim V(F) = 2$, $\dim N(F) = 1$, $2 + 1 = 3$
3. $V(G) = \ell$, $N(G) = P$, $\dim V(G) = 1$, $\dim N(G) = 2$, $1 + 2 = 3$



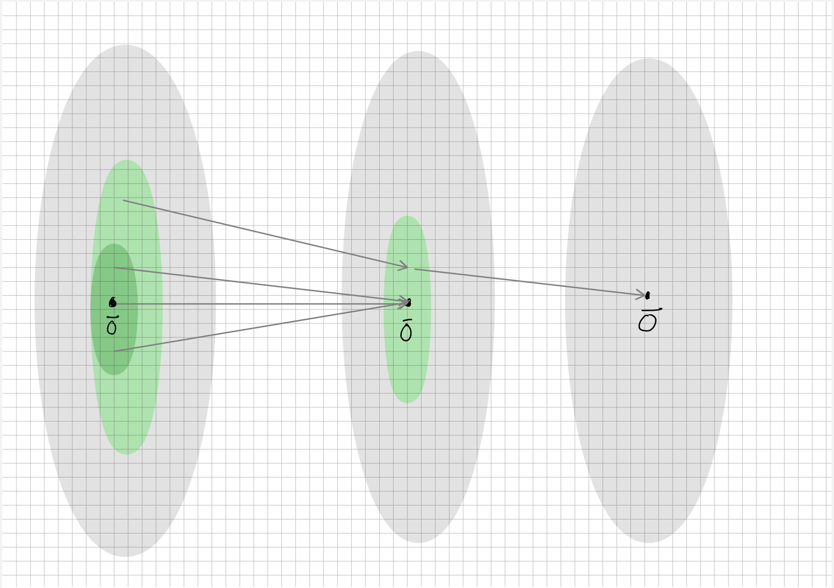
- Låt U, V, W vara vektorrum
- Låt $F : U \to V$ och $G : V \to W$ vara linjära avbildningar
- Då är $G \circ F : U \to W$ också linjär
- $N(G \circ F) = \left\{ \overline{u} \in U \middle| G(F(\overline{u})) = \overline{0} \right\}$
- $V(G \circ F) = \{ \overline{w} \in W |$ finns $\overline{u} \in U$ så att $G(F(\overline{u})) = \overline{w} \}$



Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

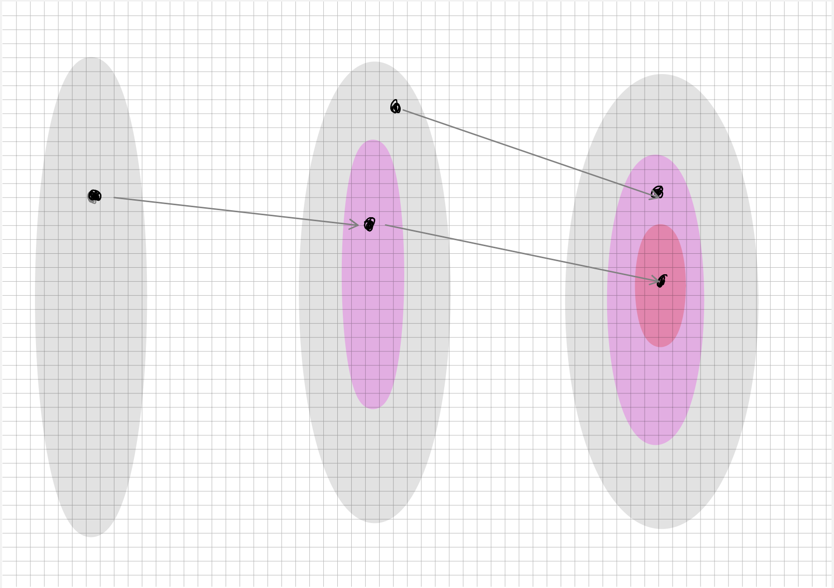
$N(G \circ F) \geq N(F)$



Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

$V(G \circ F) \leq V(G)$



Exempel

- Låt
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Nollrummet till B spännt av $(1,0,0)$ medan nollrummet till CB är samma.
- Värderummet till C, dvs kolonnrummet, är spänt av $(1,0,0)$ och $(1,1,0)$ och värderummet till CB är samma.
- Kolonnrummet till CB består i slutändan av (vissa) linjärkombinationer av kolonnerna i C.
- Åt andra hållet så är nollrummet till C trivialt medan nollrummet till BC är större, spänt av $[1,0]^t$.
- Värderummet till B är hela $\mathbb{R}^2$ men värderummet till BC är spänt av $(1,0)$

Låt $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ges av $X \mapsto AX$ med

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den sammansatta avbildningen $F \circ F$ har då avbildningsmatris A^2, och så vidare, med

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har att

k	$N(F^k)$	$\dim N(F^k)$	$V(F^k)$	$\dim V(F^k)$
0	$\{\bar{0}\}$	0	$\mathbb{R}^4$	4
1	$\mathrm{span}(\bar{e}_1)$	1	$\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$	3
2	$\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$	2	$\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$	2
3	$\mathrm{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$	3	$\mathrm{span}(\bar{e}_1)$	1
4	$\mathbb{R}^4$	4	$\{\bar{0}\}$	0

Vi ser att nollrum och värderum kan överlappa.

Beräkning av nollrum och värderum

1. Låt A vara en matris
2. Låt B vara den reducerade trappstegsformen till A
3. A och B hara samma radrum och samma nollrum, olika kolonnrum (värderum)
4. Vi kan hitta en bas för $N(A)$ genom att hitta en bas för lösningsrummet till $AX = 0$ som är lösningsrummet till $BX = 0$
5. De nollskiljda raderna i B är en bas för radrummet
6. Vi får en bas till kolonnrummet för A, dvs värderummet för den associerade linjära avbildningen, genom att välja de kolonner i A så att motsvarande kolonn i B har ett pivotelement

Exempel

bas kolrum

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 49 & 138 \\ 18 & 49 & 138 & 397 \\ 49 & 138 & 397 & 1158 \\ 138 & 397 & 1158 & 3409 \end{pmatrix} \sim$$

$$B \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_4 = t,$

$c_3 = -6t$

$c_2 = 11t$

$c_1 = -6t$

bas nollrum: $\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

1. Alternativ teknik: bilda först $M = \begin{pmatrix} A^t & | & I \end{pmatrix}$
2. Reducerad trappstegsform $\begin{pmatrix} R & S \end{pmatrix}$
3. Nollskiljda *rader* i R bas för kolonrummet till A, dvs värderummet
4. Rader i S hörande till nollrader i R bildar bas för nollrummet till A

Exempel

Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ så har värderummet dim 3 och nollrummet dim 2, beräkna baser via

$$\begin{pmatrix} A^t & | & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{8}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$