TATA24 Linjär Algebra, Fö 17

Basbyte

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Exempel

1. Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2\end{pmatrix}$ vara någon bas för planet
2. Låt $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
3. Inför en ny bas $\underline{f} = \begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \bar{f}_2\end{pmatrix}$ med

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

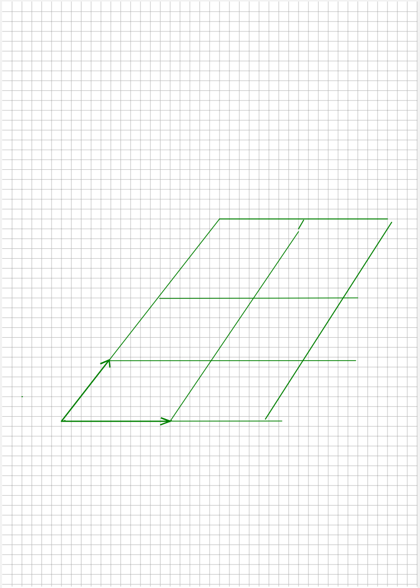
$$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

4. Vi kan lösa ut

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 - \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

5. Vi får att $\bar{u} = \frac{5}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$



Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

1. Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2\end{pmatrix}$ vara någon bas för planet
2. Låt $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
3. Inför en ny bas $\underline{f} = \begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \bar{f}_2\end{pmatrix}$ med

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

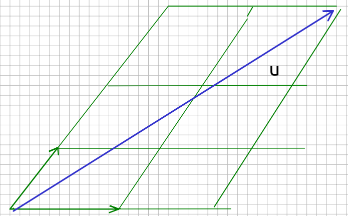
$$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

4. Vi kan lösa ut

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 - \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

5. Vi får att $\bar{u} = \frac{5}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$



Exempel

1. Låt $\underline{e} = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2)$ vara någon bas för planet
2. Låt $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
3. Inför en ny bas $\underline{f} = (\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2)$ med

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

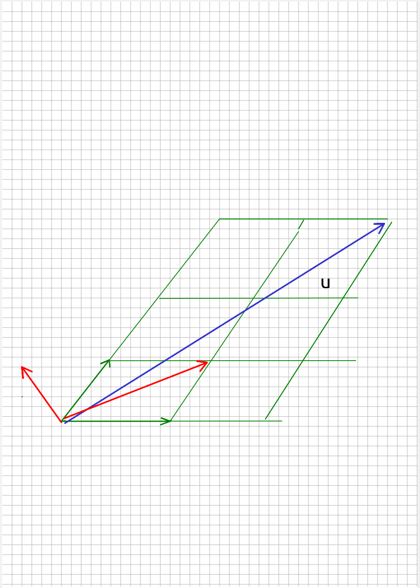
$$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

4. Vi kan lösa ut

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 - \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

5. Vi får att $\bar{u} = \frac{5}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$



Exempel

1. Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2\end{pmatrix}$ vara någon bas för planet
2. Låt $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
3. Inför en ny bas $\underline{f} = \begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \bar{f}_2\end{pmatrix}$ med

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

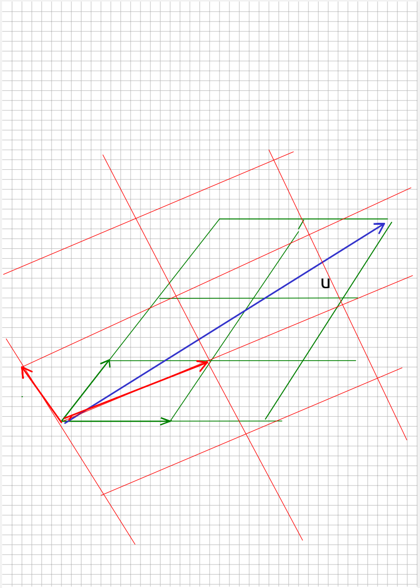
$$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

4. Vi kan lösa ut

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 - \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

5. Vi får att $\bar{u} = \frac{5}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$



Exempel

1. Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \end{pmatrix}$ vara någon bas för planet
2. Låt $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. Inför en ny bas $\underline{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{pmatrix}$ med

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

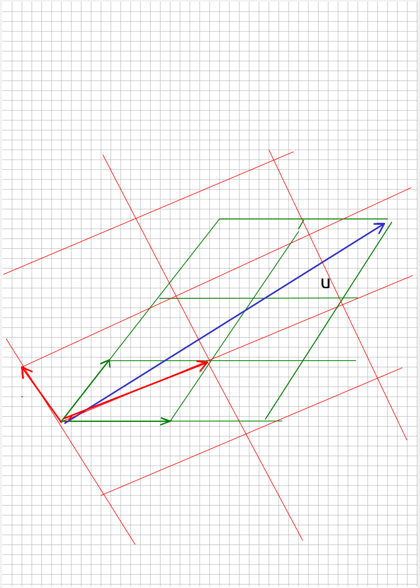
$$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Vi kan lösa ut

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 - \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2$$

5. Vi får att $\bar{u} = \frac{5}{2}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



Definition

Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_n\end{pmatrix}$ vara en ordnad bas för vektorrummet V ("den gamla basen").
Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \cdots & \bar{f}_n\end{pmatrix}$ vara en annan ordnad bas för vektorrummet V ("den nya basen").
Skriv, för $1 \leq j \leq n$,

$$\bar{f}_j = t_{j1}\bar{e}_1 + \cdots + t_{jn}\bar{e}_n = \underline{e}\begin{pmatrix} t_{j1} \\ \vdots \\ t_{jn} \end{pmatrix}$$

Vi sammanfattar detta som

$$\underline{f} = \underline{e}T$$

där

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

är basbytesmatrisen från $\underline{e}$ till $\underline{f}$.

Exempel

I vårt exempel så skriver vi bassambandet

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

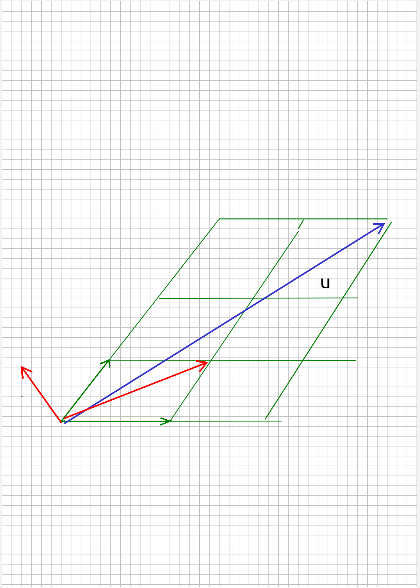
$$\bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

som

$$\underline{f} = \underline{e}\,T$$

vilket blir

$$\begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \bar{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$



Sats

Om de ordnade baserna $\underline{e}, \underline{f}$ är relaterade med bassambandet

$$\underline{f} = \underline{e}T$$

så är T inverterbar, och det omvända bassambadet ges av

$$\underline{e} = \underline{f}T^{-1}$$

Det omvända bassambandet ger "gamla basen uttryckt i nya".

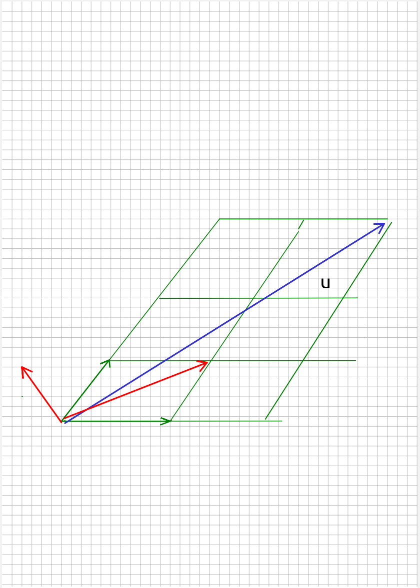
Exempel

I vårt exempel så är bassambandet

$$\begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \bar{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

och det omvända bassambandet är

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{f}_1 & \bar{f}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$



Sats

Låt

1. $\underline{e}$, $\underline{f}$ *vara ordnade baser för vektorrummet* V
2. $\underline{f} = \underline{e}T$
3. *Vektorn* $\overline{u}$ *har koordinater* X *m.a.p "gamla basen"* $\underline{e}$, *dvs* $\overline{u} = \underline{e}X$
4. *Samma vektor* $\overline{u}$ *har koordinater* Y *m.a.p "nya basen"* $\underline{f}$, *dvs* $\overline{u} = \underline{f}Y$

Då är X, Y *relaterade via koordinatsambandet*

$$X = TY$$

och det omvända koordinatsambandet

$$Y = T^{-1}X$$

Bevis.

Eftersom

$$\underline{e}X = \overline{u} = \underline{f}Y = (\underline{e}T)Y = \underline{e}(TY)$$

så följer från unikhet av koordinater att $X = TY$, och vidare (eftersom T är inverterbar) att $Y = T^{-1}X$. □

Exempel

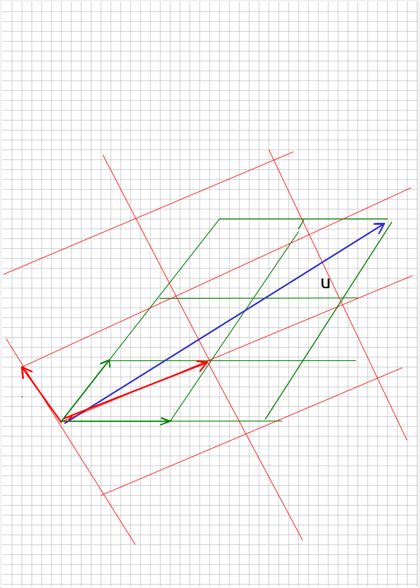
I vårt exempel så är koordinatsambandet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

och det omvända koordinatsambandet är

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/2 + x_2/2 \\ -x_1/2 + x_2/2 \end{pmatrix}$$

Vårt givna $\underline{u}$ har $\underline{e}$-koordinater $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ men $\underline{f}$-koordinater $Y = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$



Sats

Antag att

1. V *vektorrum*
2. $\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}$ *ordnade baser för* V
3. *basbytesmatrisen från* $\underline{e}$ *till* $\underline{f}$ *är* T *och basbytesmatrisen från* $\underline{f}$ *till* $\underline{g}$ *är* S
4. $\overline{u}$ *har koordinater* X *map bas* $\underline{e}$, *koordinater* Y *map bas* $\underline{f}$, *samt koordinater* Z *map bas* $\underline{g}$

Då:

1. *Basbytesmatrisen från* $\underline{e}$ *till* $\underline{g}$ *är* TS
2. *Koordinatsambandet blir* $X = TSZ$
3. *Omvända koordinatsambandet blir* $Z = S^{-1}T^{-1}X$.
4. *Vi har även att att* $Z = S^{-1}Y = S^{-1}T^{-1}X$.

Bevis.

1. $\underline{g} = \underline{f}S = (\underline{e}T)S = \underline{e}TS$
2. $\underline{e}X = \overline{u} = \underline{g}Z = \underline{e}TSZ$
3. $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$

$\square$

Exempel

Antag att vi introducerar en tredje bas $\underline{g}$ genom

$$\overline{g}_1 = 1/2\overline{f_2}$$
$$\overline{g}_2 = 1/2\overline{f_1}$$

Då blir den sista basbytesmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

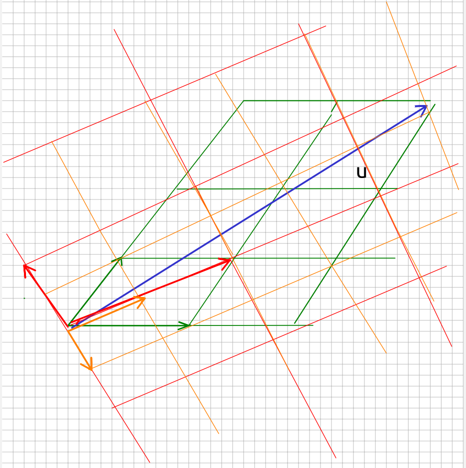
medan den totala basbytesmatrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

och koordinatsambanden

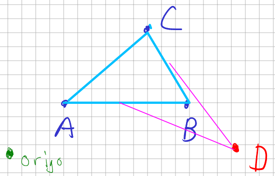
$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} Z,\ Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Speciellt, om $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ så blir $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$



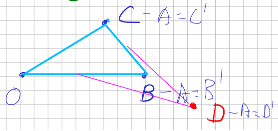
Exempel (Translatera och byt bas för att se bättre)

Triangel ABC

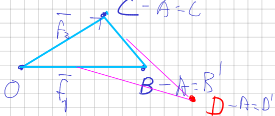


Vilka sidor kan ses från punkt D?

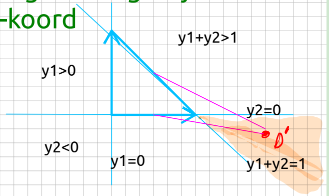
1) Subtrahera A från allt så A blir origo



2) Kantvektorer f1 =B' och f2 =C' bildar ny bas, koordinater y1,y2



3) Ge begränsningslinjernas ekv i y-koord



D'=(y1,y2) med y1>0,y2<0,y1+y2>1

så ser sidan 0B' och sidan B'C' dvs i originalbild ser D sidan AB och sidan BC

Sats

Låt

1. U, V *vara ändligtdimensionella vektorrum*
2. $\underline{e}, \underline{f}$ *vara ordnade baser för* U
3. $\underline{g}, \underline{h}$ *vara ordnade baser för* V
4. $\underline{f} = \underline{e}S$
5. $\underline{h} = \underline{g}T$
6. $F : U \to V$ *vara en linjär avbildning*
7. $F(\underline{e}X) = \underline{g}AX$
8. $F(\underline{f}Y) = \underline{h}BY$

Då är

$$B = T^{-1}AS$$

Bevis.

Vi använder $\underline{g} = \underline{h}T^{-1}$ och $X = SY$ och får

$$F(\underline{f}Y) = F(\underline{e}X) = \underline{g}AX = \underline{h}T^{-1}ASY$$

$\square$

Jan Snellman

Sats

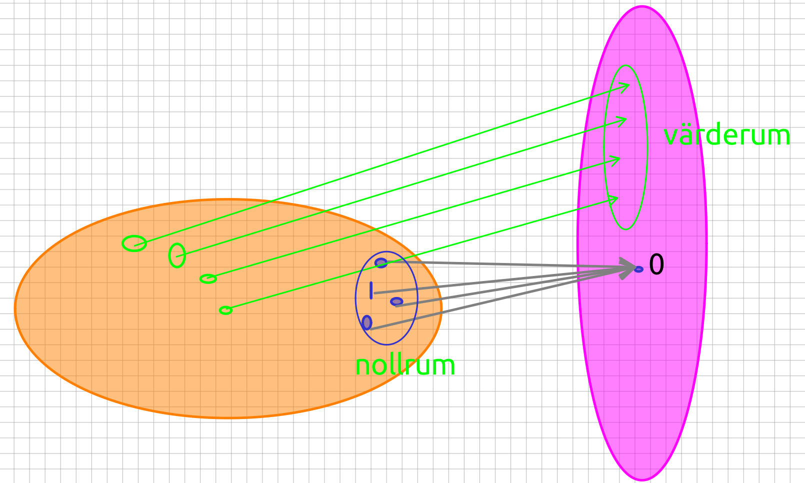
Låt $F : U \to V$ vara linjär, U, V ändligtdimensionella vektorrum. Då kan vi välja baser så att avbildningsmatrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Antal ettor på diagonalen kallas för avbildningens rang.

Bevis.

Välj bas i U så att $\bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_m$ utgör bas för nollrummet till F. Då är $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k$ linjärt oberoende, och $\bar{g}_1 = F(\bar{e}_1), \ldots, \bar{g}_k = \bar{e}_k$ är linjärt obereoende och utgör en bas för värderummet. Fyll ut till bas för V. Avbildningsmatrisens kolonn j är koordinaterna map $\underline{g}$ för $F(\bar{e}_j)$, dvs $(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ om $j \leq k$, och nollvektorn annars. $\square$


värderum
0
nollrum

Exempel

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi har att

$$\mathrm{Nollrum}(A) = \mathrm{span}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad \mathrm{Kolonnrum}(A) = \mathrm{span}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

och förstås att

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

så vi sätter

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

och får att

$$B = T^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rangen för A är alltså 2.

Från V till V, samma bas

Sats

Låt

1. V *vara ett ändligtdimensionellt vektorrum*
2. $\underline{e}, \underline{f}$ *vara ordnade baser för* V
3. $\underline{f} = \underline{e}T$
4. $F : V \to V$ *vara en linjär avbildning*
5. $F(\underline{e}X) = \underline{e}AX$
6. $F(\underline{f}y) = \underline{f}BY$

Då är

$$B = T^{-1}AT, \quad A = TBT^{-1}$$

Bevis.

Vi använder $\underline{f} = \underline{e}T$ och $Y = T^{-1}X$ och får

$$\underline{e}AX = F(\underline{e}X) = F(\underline{f}Y) = \underline{f}BY = \underline{e}TBT^{-1}X$$

$\square$

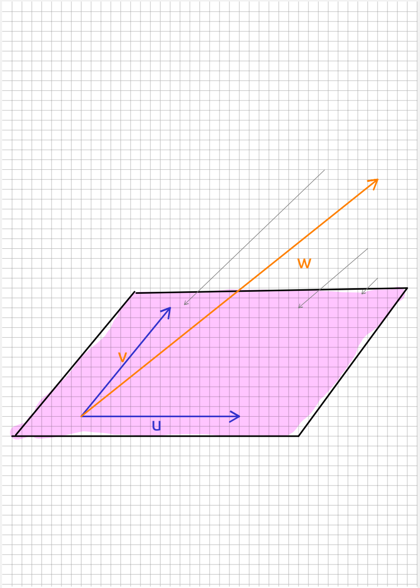
Sned projektion

Exempel

Låt $\overline{u}, \overline{v}$ spänna upp ett plan genom origo, och låt F vara sned projektion på planet i riknting $\overline{w}$. Då är

$$F(\overline{u}) = \overline{u},\ F(\overline{v}) = \overline{v},\ F(\overline{w}) = \overline{0},$$

så F har avbildningsmatris $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ map basen $\underline{f} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \end{pmatrix}$ och matris $A = TBT^{-1}$ map basen $\underline{e}$, där T är basbytesmatrisen vars kolonner innehåller $\underline{e}$-koordinaterna för $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$.



Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Inte vridning men någonting åt det hållet

Exempel

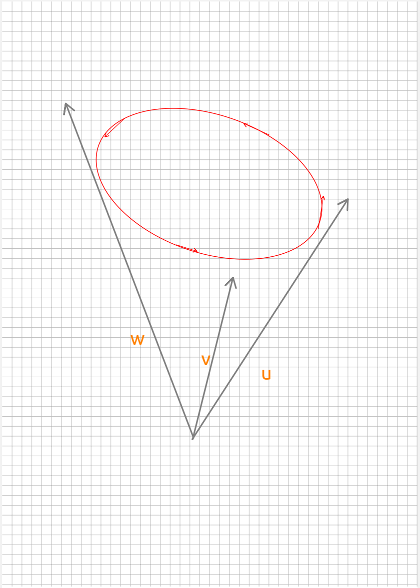
Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vare tre vektorer i rummet som inte ligger i något plan, och låt F vara den linjära avbildningen så att

$$F(\overline{u}) = \overline{v},\ F(\overline{v}) = \overline{w},\ F(\overline{w}) = \overline{u}.$$

Då har F avbildningsmatris $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ map basen $\underline{f} = \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \end{pmatrix}$ och matris $A = TBT^{-1}$ map basen $\underline{e}$, där T är basbytesmatrisen vars kolonner innehåller $\underline{e}$-koordinaterna för $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$.

Notera att F^{-1} har matris $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ map $\underline{f}$.

Vad visar bilden?



Sammanfattning basbyte

1. V ä.d. vektorrum
2. $\underline{e} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_n \end{pmatrix}$ "gammal bas"
3. $\underline{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \cdots & \bar{f}_n \end{pmatrix}$ "ny bas"
4. $\underline{f} = \underline{e}T$ "bassamband", kol j i T: koord för $\bar{f}_j$ m.a.p. $\underline{e}$
5. $\underline{e} = \underline{f}T^{-1}$ "omvänt bassamband"
6. $\bar{u} = \underline{e}X = \underline{f}Y \in V$
7. $X = TY$, $Y = T^{-1}X$ "koordinatsamband"
8. $F : V \to V$ linjär, $F(\underline{e}X) = \underline{e}AX$, $F(\underline{f}Y) = \underline{f}BY$, avbildningsmatris m.a.p. $\underline{e}$ resp. $\underline{f}$
9. $A = TBT^{-1}$, $B = T^{-1}AT$, "konjugera avbildningsmatrisen med basbytesmatrisen"
10. Kan ses som

$$Y \to X = TY \to ATY \to T^{-1}ATY$$

dvs gör om till X-koord, applicera A, konvertera tillbaka till Y-koord

Determinanten till en avbildning

Sats

Låt V vara ett ä.d. vektorrum och låt $F : V \to V$ vara linjär. Då beror inte determinanten av avbildningsmatrisen på valet av bas.

Bevis.

Låt $\underline{f} = \underline{e}T$. Vi har att

$$\det(B) = \det(T^{-1}AT) = \det(T)^{-1}\det(A)\det(T) = \det(A).$$

$\square$

Vi kan alltså definiera determinanten för F som determinanten av någon avbildningsmatris för F.

Definition

En $n \times n$-matris M är *ortonormal* om följande likvärdiga villkor är uppfyllda

1. $M^t M = I$
2. $MM^t = I$
3. M är inverterbar och $M^{-1} = M^t$
4. Kolonnerna i M bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^n$ m.a.p. standardskalärprodukten
5. Raderna i M bildar en ON-bas i $\mathbb{R}^n$ m.a.p. standardskalärprodukten

Sats

Låt $\underline{e}$ vara en ON-bas för det euklidiska rummet V av dimension $n < \infty$. Låt $\underline{f}$ vara en annan bas för V. Låt $\underline{f} = \underline{e}T$.

1. *$\underline{f}$ är en ON-bas omm T är en ortonormalmatris*
2. *Om $\underline{f}$ är ON, $\overline{u} = \underline{e}X_1 = \underline{f}Y_1$, $\overline{v} = \underline{e}X_2 = \underline{f}Y_2$, så*

$$(\overline{u}|\overline{v}) = X_1^t X_2 = Y_1^t Y_2$$

Bevis.

Se kursboken för ON-bas svarar mot ON-matris.
Om vi använder basbytesformeln $X = TY$ på nästa sida får vi

$$X_1^t X_2 = (TY_1)^t TY_2 = Y_1^t T^t TY_2 = Y_1^t IY_2 = Y_1^t Y_2$$

□

Sats

Låt V vara ett ä.d. euklidiskt rum, och låt $\underline{e}$, $\underline{f}$ vara två ordnade ON-baser för V.

1. *Om $\underline{f} = \underline{e}T$ så är basbytesmatrisen T ortonormal, så $T^{-1} = T^t$*
2. *Koordinatsambanden kan alltså skrivas $X = TY$ och $Y = T^t X$*
3. *Om $F : V \to V$ är linjär, med*

$$F(\overline{u}) = F(\underline{e}X) = \underline{e}AX = F(\underline{f}Y) = \underline{f}BY$$

så är

$$A = TBT^t, \qquad B = T^t AT$$

Exempel

Om $U \leq V$ och $\underline{f}$ är en ON-bas för V så att de första k vektorerna utgör en ON-bas för U, så är

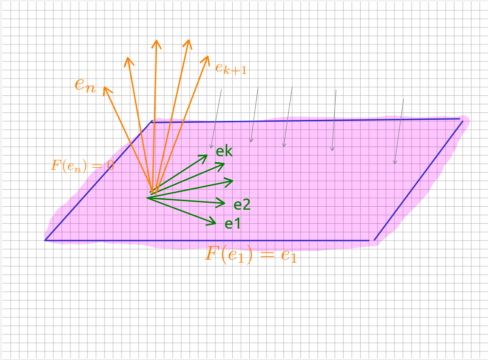
$$F(\bar{f}_j = \begin{cases} \bar{f}_j & j \leq k \\ \bar{0} & j > k \end{cases}$$

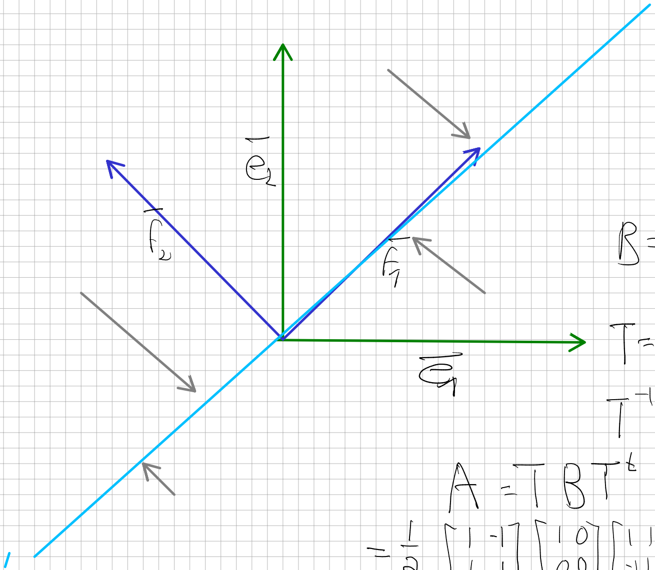
så avbildningsmatrisen B blir

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och

$$A = TBT^t.$$





$$F(\bar{f}_1) = \bar{f}_1$$

$$F(\bar{f}_2) = \bar{0}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = T^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = TBT^t$$

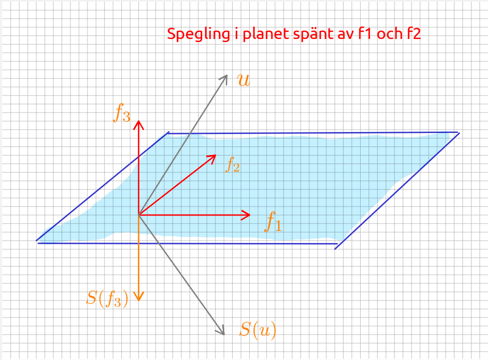
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Exempel

Om $\underline{f}$ är ON-bas för rummet och $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ spänner ett plan som F speglar i, blir avbildningsmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

och $A = TBT^t$



Vridning

Exempel

Om $\underline{f}$ är ON-bas för rummet och $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ spänner ett plan, och F vrider α radianer runt linjen spänd av $\overline{f}_3$, moturs sett från spetsen av f_3, så blir avbildningsmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och $A = TBT^t$