TATA24 Linjär Algebra, Fö 18

Spektralteori

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

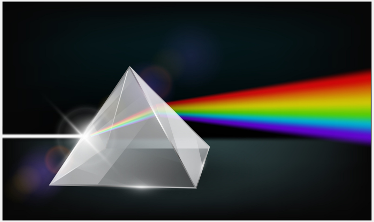
TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Varför ordet “spektralteori”?

Spektrum: *Inom fysiken är ett spektrum (plural spektrum, spektrer eller spektra) en uppdelning av elektromagnetisk strålning eller annan typ av vågrörelse i olika våglängder eller frekvenser.* —*Wikipedia*



Spektrallinjer *är ljusa eller mörka linjer i spektrumet från en ljuskälla. De uppstår när elektronerna i ljuskällans (eller mellanliggande materias) atomer övergår från en energinivå till en annan. Eftersom dessa energinivåer (och skillnaden mellan dem) är fasta och specifika (diskreta) för varje enskilt ämne, kan spektrallinjerna användas för att identifiera vilket eller vilka ämnen som är inblandade.* —*Wikipedia*

Definition

Låt V vara ett ä.d. vektorrum och låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning. Låt $I : V \to V$ beteckna identitetsavbildningen.

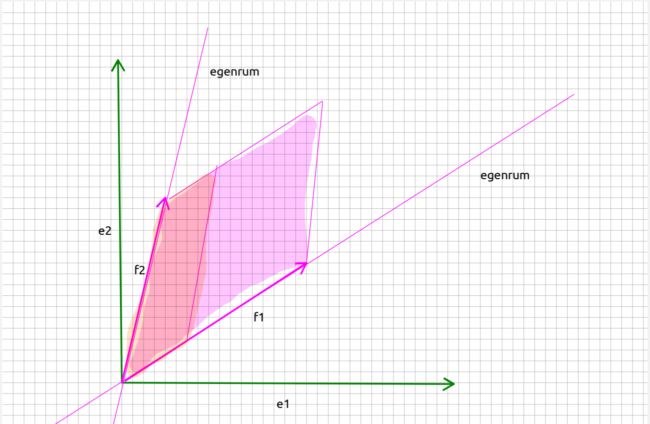
1. *Spektrum* av F är mängden $\mathrm{Sp}(F) = \{\lambda \in \mathbb{R} | (F - \lambda I) \text{ ej inverterbar}\}$
2. Om $\lambda \in \mathrm{Sp}(F)$ så sägs λ vara ett *egenvärde* till F
3. Om $\lambda \in \mathrm{Sp}(F)$ så kallas nollrummet till $F - \lambda I$ för *egenrummet* till F hörande till λ
4. En nollskiljd vektor $\overline{v}$ i egenrummet hörande till λ kallas för en egenvektor till F hörande till λ

Sats

1. *F är inverterbar omm 0 inte är ett egenvärde*
2. *Vektorn $\overline{v} \in V \setminus \{\overline{0}\}$ är en egenvektor till F hörande till egenvärdet λ omm*
$$F(\overline{v}) = \lambda \overline{v}$$
3. *Om $\overline{u}$ är en annan egenvektor hörande till λ och $(c, d) \neq (0, 0)$ så är*
$$c\overline{v} + d\overline{u}$$
också en egenvektor hörande till λ

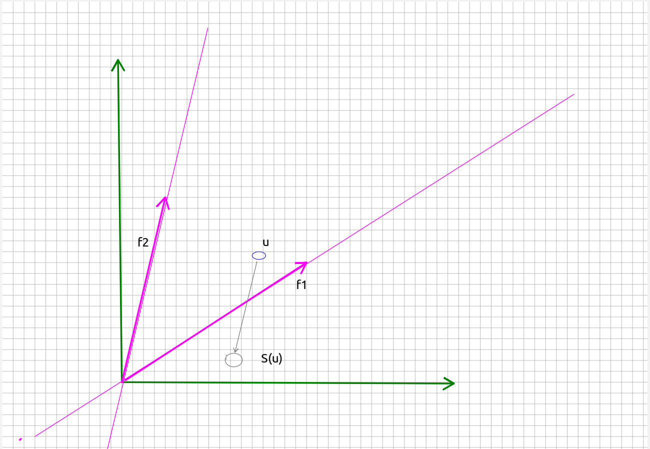
Exempel

Låt $\underline{e}, \underline{f}$ vara baser för planet, och låt F ha avbildningsmatris $B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ map $\underline{f}$ och $A = TBT^{-1}$ map $\underline{e}$. Då är F skalning med faktor 2 längst $\bar{f}_2$ och med faktor $1/3$ längst $\bar{f}_1$ och har egenvärden $1/3$ och 2, och motsvarande egenrum är linjerna genom origo uppspännda av $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$.



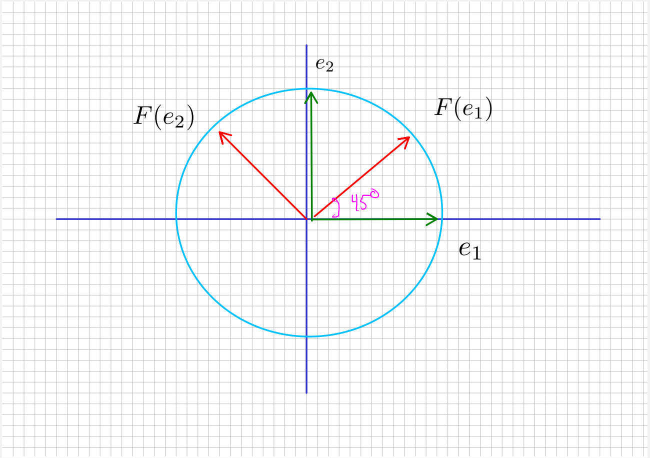
Exempel

Låt $\underline{e}, \underline{f}$ vara baser för planet, och låt F ha avbildningsmatris $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ map $\underline{f}$ och $A = TBT^{-1}$ map $\underline{e}$. Då är F en "snedspegling" i linjen spännd av $\bar{f}_1$, i riktning $\bar{f}_2$, har egenvärden 1 och -1, och motsvarande egenrum är linjerna genom origo uppspännda av $\bar{f}_1$ och $\bar{f}_2$.



Exempel

Låt $\underline{e}$ vara ON-bas för planet, och låt F vara vridning 45 grader moturs. Då har F avbildningsmatris $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ map $\underline{e}$. Denna har inga egenvektorer och inga egenvärden!



Definition

Låt $F : V \to V$ vara linjär, $\dim(V) = n < \infty$, A avbildningsmatris för F m.a.p basen $\underline{e}$. Funktionen

$$\chi_F(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

kallas för *sekularpolynomet* (eller *karakteristiska polynomet*) till F

Sats

Sekularpolynomet beror ej på val av bas.

Bevis.

Om $\underline{f} = \underline{e}T$ så

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(T^{-1}AT - T^{-1}\lambda I T) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) \\ &= \det(T^{-1})\det(A - \lambda I)\det(T) = \det(A - \lambda I)\end{aligned}$$

$\square$

Definition

Om A, B är $n \times n$-matriser och det finns någon inverterbar matris T så att

$$A = TBT^{-1}$$

så sägs A och B vara *similära*.

Definition

Vi definierar egenvärden och egenvektorer till en kvadratisk matris A som nollskiljd vektor $\overline{\mathrm{v}} \in \mathbb{R}^n$ så att $A\overline{\mathrm{v}} = \lambda\overline{\mathrm{v}}$.

Sats

Antag att $\dim(V) = n$, $F : V \to V$ *linjär,* $\underline{e}, \underline{f}$ *baser för* V.

1. *Similära matriser har samma egenvärden och sekularpolynom*
2. *Om* $\bar{u} = \underline{e}X = \underline{f}Y$ *och* $F(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$ *så är* $AX = \lambda X$ *och* $BY = \lambda Y$
3. λ *är ett egenvärde omm det är ett nollställe till sekularpolynomet*
4. *Sekularpolynomet är ett polynom av grad* n*, högstagradskoefficienten är* $(-1)^n$*, konstanttermen är produkten av egenvärdena,* λ^1*-koefficienten är summan av diagonalelementen (som alltså inte beror av bas) vilket kallas för spåret av matrisen*

Exempel

Låt $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Då är sekularpolynomet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-\lambda) - (-1)6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6(\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

så egenvärdena är $3, 2$. Determinanten är $3 * 2 = 6$ och spåret är 5.

Egenrummet till 3 är nollrummet till $A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$. Det är ett-dimensionellt, spännt av $(1, 2)^t$.

Egenrummet till 2 är nollrummet till $A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Det är ett-dimensionellt, spännt av $(1, 3)^t$.

Låt $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ och sätt $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Då är A, B similära, så har samma egenvärden, determinant, och spår. Men egenrummet till 3 för B spänns av $(0, 1)^t$ och egenrummet för 2 spänns av $(1, 0)^t$; vi kan se det som ett basbyte.

Definition

Låt $F : V \to V$ vara linjär, $\dim(V) = n < \infty$. Vi säger att F är *diagonaliserbar* om det finns någon ordnad bas $\underline{f}$ så att avbildningsmatrisen för F m.a.p. $\underline{f}$ är en diagonalmatris.

Sats

För $F : V \to V$ linjär, $\dim(V) = n < \infty$ så är följande likvärdiga:

1. *F diagonaliserbar*
2. *Finns bas för V bestående av egenvektorer till F*
3. *För varje $\lambda \in \mathrm{Sp}(F)$ så är följande tal lika:*
    1. *Den algebraiska multipliciteten av λ som nollställe till $\chi_F(\lambda)$, dvs högsta k så att $\chi_F(\lambda) = (x-\lambda)^k g(\lambda)$ med g polynom*
    2. *Den geometriska multipliciteten av λ, dvs dimensionen av nollrummet till $A - \lambda I$*

    Dessutom så är

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(F)} \mathrm{mult}(\lambda) = n$$

Bevis.

Första delen uppenbar, andra delen visas snart. □

Exempel

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ är matrisen för en vridning 90 grader moturs, saknar egenvektorerer, sekularpolynom $(\lambda^2 + 1$ saknar reella nollställen, ej diagonaliserbar.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularpolynom λ^2, dubbelrot i $\lambda = 0$, men egenrummet $\lambda = 0$ har dim 1, spännt av $(1, 0)^t$. Algebraisk multiplicitet 2, geometrisk multiplicitet 1. Ingen bas av egenvektorer. Ej diagonaliserbar.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularpolynom λ^3, trippelrot i $\lambda = 0$, men egenrummet $\lambda = 0$ har dim 1, spännt av $(1, 0, 0)^t$. Algebraisk multiplicitet 3, geometrisk multiplicitet 1. Ingen bas av egenvektorer. Ej diagonaliserbar.

Exempel (forts)

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularpolynom $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2$. Enkelrot i $\lambda = 0$, med egenrum av dim ett, spännt av $(0, 1, -1)^t$.
   Dubbelrot $\lambda = 1$, med egenrum av dim ett, spännt av $(1, 0, 0)^t$. Geometrisk multiplicitet mindre än algebraisk multiplicitet så ingen bas av egenvektorer, ej diagonaliserbar. Vi kan komma nära: i basen

$$\underline{f} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

   blir avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vilket är "nästan diagonalt".

Exempel (forts)

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularpolynom $\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$. Enkelrot i $\lambda = 1$, med egenrum av dim ett, spännt av $(1, 0, 0)^t$.
   Dubbelrot $\lambda = 0$, med egenrum av dim 2, spännt av $(0, 1, 0)^t$ och $(0, 0, 1)^t$. Geometrisk multiplicitet lika med algebraisk multiplicitet, multipliciteterna summerar till tre, så finns bas av egenvektorer, avbildningen diagonaliserbar.
   Den är ju redan diagonal i sin originalbas! Avbildningen är ortogonal projektion på linje.

Egenvektorer till olika egenvärden linjärt oberoende

Sats 8.2.5. *Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ en linjär avbildning. Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ är egenvektorer till F med* olika *egenvärden så är $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ linjärt oberoende.*

Bevis: Induktion över k.

I. Påståendet är sant för $k = 1$ ty $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ eftersom den är en egenvektor och varje mängd med endast en ensam nollskild vektor är linjärt oberoende.

II. Antag att satsen är sann för varje uppsättning av $k-1$ egenvektorer med olika egenvärden.

III. Visa att $\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \mu_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$. Alltså, bilda $\mathbf{0}$ som en linjärkombination av egenvektorerna och sätt in i F. Vi har då

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= F(\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \mu_k\mathbf{v}_k) = \mu_1 F(\mathbf{v}_1) + \ldots + \mu_{k-1}F(\mathbf{v}_{k-1}) + \mu_k F(\mathbf{v}_k) = \\
&= \lambda_1\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \lambda_k\mu_k\mathbf{v}_k \qquad (8.2.2)\\
\mathbf{0} &= \quad \mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \quad \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \quad \mu_k\mathbf{v}_k. \qquad (8.2.3)
\end{aligned}$$

Genom att ta (8.2.2)$-\lambda_k\cdot$(8.2.3) eliminerar vi den sista termen i (8.2.2) och får

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Induktionsantagandet ger då att $\mu_i\overbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}^{\neq 0} = 0$ för $i = 1, \ldots, k-1$. Följaktligen är $\mu_i = 0$ för $i = 1, \ldots, k-1$. Av (8.2.3) återstår då endast $\mu_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ och då $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ fås slutligen att även $\mu_k = 0$, dvs vektorerna är linjärt oberoende.

Punkt I, II, III och induktionsprincipen visar satsen. ■

Om man, som i exempel 8.2.3, har lika många olika egenvärden som vektorrummet har dimension blir egenvektorerna inte bara linjärt oberoende utan också rätt antal och därmed en bas.

Korollarium 8.2.6. *Om $F\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = n$ har n st olika egenvärden så är F diagonaliserbar.*

Geometrisk multiplicitet $\leq$ algebraisk multiplicitet

Sats 8.4.1. *Låt $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V} = n < \infty$ vara en linjär avbildning och λ_0 ett egenvärde till F. Då gäller*

$$\lambda_0\text{'s geometriska multiplicitet} \leq \lambda_0\text{'s algebraiska multiplicitet.}$$

Bevis: Antag att egenrummet $\mathbb{V}_{F,\lambda_0}$ har dimension k. Låt $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ vara en bas i $\mathbb{V}_{F,\lambda_0}$ och fyll ut denna till en bas för hela $\mathbb{V}$. Byte till denna bas ger en matris av formen

$$A_{\underline{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & a_{kk+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k+1k+1} & \ldots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Då sekularpolynomet är oberoende av i vilken bas avbildningsmatrisen ges följer det, t ex genom att i tur och ordning utveckla efter kolonn 1 till k, att

$$\det(A_{\underline{\mathbf{f}}} - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \ldots & 0 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \ldots & 0 & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0-\lambda & a_{kk+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k+1k+1}-\lambda & \ldots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

Geometrisk multiplicitet $\leq$ algebraisk multiplicitet, forts

$$= (\lambda_0 - \lambda)^k \begin{vmatrix} a_{k+1k+1}-\lambda & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk+1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}, \tag{8.4.1}$$

d v s λ_0 är ett nollställe till sekularpolynomet med *minst* multipliciteten k, vilket var precis det som skulle visas. ■

Sats 8.4.3. *Låt* $F\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$, $\dim \mathbb{V}=n < \infty$ *vara en linjär avbildning och antag att sekularekvationen endast har reella rötter. Då gäller:*

$$F \text{ är diagonaliserbar} \iff \text{de geometriska och algebraiska multipliciteterna är lika för resp egenvärde.}$$

Bevis: Motsägelsebevis. I båda riktningarna utnyttjar vi att summan av de algebraiska multipliciterna $= n = \dim \mathbb{V}$.
($\Rightarrow$) Om någon av de geometriska multipliciteterna är mindre än motsvarande algebraiska så har vi "för få" egenvektorer och färre vektorer än rummets dimension kan aldrig spänna upp rummet, d v s F är ej diagonaliserbar.
($\Leftarrow$) Om F inte är diagonaliserbar så finns det för få egenvektorer och därmed är någon av de geometriska multipliciteterna strikt mindre än motsvarande algebraiska. ■

Sats

Om E euklidiskt rum med $\dim(E) = n < \infty$, $F : E \to E$ symmetrisk, $F(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$ och $F(\bar{v}) = \mu \bar{v}$, med $\lambda \neq \mu$. Då är $\bar{u} \perp \bar{v}$.

Bevis.

Vi har att

$$\mu (\bar{u}|\bar{v}) = (\bar{u}|\mu \bar{v}) = (\bar{u}|F(\bar{v})) = (F(\bar{u})|\bar{v}) = (\lambda \bar{u}|\bar{v}) = \lambda (\bar{u}|\bar{v})$$

så

$$(\mu - \lambda)(\bar{u}|\bar{v}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\bar{u}|\bar{v}) = 0$$

$\square$

Så för en symmetrisk avbildning är de olika egenrummen ortogonala mot varandra.

Exempel

Ortogonal projektion på ett plan (i rummet) har planet som egenrum med egenvärde ett och normallinjen som egenrum med egenvärde noll.

Sats

Om E euklidiskt rum med $\dim(E) = n < \infty$, $F : E \to E$ symmetrisk, så är nollställen till sekularpolynomet $\chi_F(\lambda)$ reella.

Exempel

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ har sekularpolynom

$$\chi_F(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

som har nollställen $\pm i$, vilka inte är reella. Det finns inga egenvektorer, dvs *reella* egenvektorer, men de komplexa egenvektorerna är $(i, 1)^t$ och $(1, i)^t$.

Bevis.

1. Kursboken har ett bevis som inte talar om komplexa egenvärden och egenvektorer utan om komplexa rötter till sekularekvationen.
2. Om man inför komplexa vektorrum, komplexa egenvektorer, och så kallade *Hermitska* matriser så kan man ge ett enkelt bevis.

$\square$

Sats

Låt E vara ett euklidiskt n-dim rum, och låt $F : E \to E$ vara symmetriskt. Då gäller:

1. *Det finns en ON-bas till E bestående av egenvektorer till F*
2. *F är diagonaliserbar*
3. *$E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(F)} N(F - \lambda I)$ där de olika egenrummen dessutom är parvis ortogonala*

Bevisskiss.

1. Vi väljer först någon bas och hittar avbildningsmatrisen A
2. Sekularpolynomet $\chi_F(\lambda)$ är ett polynom av grad n; **algebrans fundamentalsats** säger att den har ett *komplext* nollställe λ_1
3. Föregående sats ger att λ_1 är reellt
4. $\det(A - \lambda_1 I) = 0$, så $A - \lambda_1 I$ har icke-trivialt nollrum, av dim $r \geq 1$. Välj ON-bas $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r\}$ för detta nollrum, då är $A\bar{u}_i = \lambda_1 \bar{u}_i$ dvs alla basvektorer är egenvektorer.
5. Låt $U^\perp$ vara ortogonala komplementet till U. Då är $\dim(U^\perp) = n - r < n$ enligt dimensionssatsen.

$\square$

Bevisskiss, forts.

6. Om $\overline{v} \in U^{\perp}$ så $F(\overline{v}) \in U^{\perp}$, ty

$$(F(\overline{v})|\overline{u}_i) = (\overline{v}|F(\overline{u}_i)) = (\overline{v}|\lambda_1 \overline{u}_i) = \lambda_1 (\overline{v}|\overline{u}_i) = 0$$

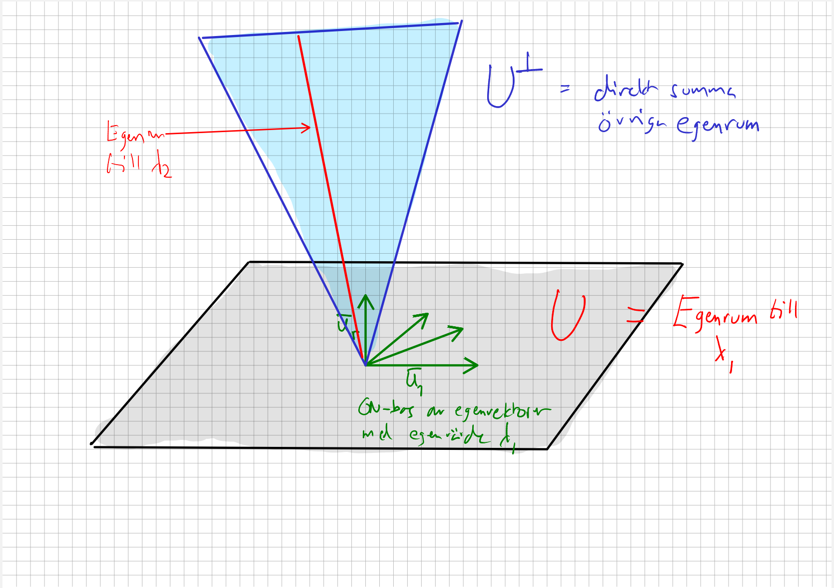
7. Vi kan alltså definiera

$$\tilde{F} : U^{\perp} \to U^{\perp}$$
$$\tilde{F}(\overline{w}) = F(\overline{w})$$

8. $\tilde{F}$ är symmetrisk, $\dim(U^{\perp}) < n$, så med induktion över n kan vi anta finns ON-bas $\{\overline{u}_{r+1}, \ldots, \overline{u}_n\}$ för $U^{\perp}$ bestående av egenvektorer till $\tilde{F}$, eventuellt med olika egenvärden förstås.
9. De är också egenvektorer till F.
10. ON-basen $\{\overline{u}_{r+1}, \ldots, \overline{u}_n\}$ för $U^{\perp}$ tillsammans med ON-basen $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_r\}$ för egenrummet till $\lambda = \lambda_1$ bildar en ON-bas för E, eftersom allt från första uppsättningen är ortogonalt mot allt från andra uppsättningen.

$\square$

E splittras upp i egenrum



Sats

Låt E vara ett euklidiskt n-dim rum, och låt $F : E \to E$ vara linjär och diagonaliserbar. Då är F symmetrisk.

Bevis.

1. Låt $\underline{e}$ vara en ON-bas för E
2. Låt A vara avbildningsmatrisen för F map $\underline{e}$
3. Låt $\underline{f}$ vara en ON-bas till E bestående av egenvektorer till F
4. Låt D vara avbildningsmatrisen för F map $\underline{f}$. Då är D en diagonalmatris, med egenvärdena på diagonalen.
5. Från bassambandet $\underline{f} = \underline{e}T$ med T ortonormalmatris får vi $A = TDT^t$
6. Vi transponerar: $A^t = (TDT^t)^t = (T^t)^t D^t T^t = TDT^t = A$
7. F har alltså symmetrisk avbildningsmatris i varje ON-bas, så F är symmetrisk

□

Exempel

Låt

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} & -\frac{62}{117} & -\frac{22}{39} & \frac{160}{117} \\ -\frac{62}{117} & \frac{2905}{1521} & \frac{8}{507} & \frac{580}{1521} \\ -\frac{22}{39} & \frac{8}{507} & \frac{171}{169} & -\frac{700}{507} \\ \frac{160}{117} & \frac{580}{1521} & -\frac{700}{507} & -\frac{2078}{1521} \end{pmatrix}$$

Då är sekularpolynomet

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x-2)^2$$

Vi betecknar med U egenrummet till $x = 2$; U är nollrummet till $A - 2I$, som är tvådimensionellt och har en ON-bas $\left\{\bar{\mathrm{f}}_1, \bar{\mathrm{f}}_2\right\}$ bestående av

$$\bar{\mathrm{f}}_1 = \left(0, \frac{12}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right), \bar{\mathrm{f}}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{39}, \frac{10}{13}, -\frac{16}{39}\right)$$

Det ortogonala komplementet $U^{\perp}$ innehåller egenrummet till egenvärdet -1 och egenrummet till egenvärdet -3. Vi har att $\dim(U^{\perp}) = 4 - 2 = 2$.

Exempel (forts)

Vi hittar en bas till $U^\perp$ genom att hitta en bas för nollrummet till

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{39} & \frac{10}{13} & -\frac{16}{39} \end{pmatrix}$$

Efter att ha kört Gram-Schmidt på den basen får vi en ON-bas för $U^\perp$. En sådan är $\{\bar{g}_3, \bar{g}_4\}$ med

$$\bar{g}_3 = \left(0, -\frac{1}{26}\sqrt{2}, \frac{9}{26}\sqrt{2}, \frac{8}{13}\sqrt{2}\right), \bar{g}_4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{7}{78}\sqrt{2}, \frac{5}{26}\sqrt{2}, -\frac{4}{39}\sqrt{2}\right)$$

Vi beräknar avbildningsmatrisen för $\tilde{F} : U^\perp \to U^\perp$ genom att beräkna avbildningsmatrisen för F m.a.p den ordnade ON-basen $\left(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4\right)$. Eftersom den temporära basbytesmatrisen T_2 har kolonnvektorer $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4$ så blir den sökta avbildningsmatrisen

$$D_2 = T_2^t A T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Här ser vi att vi har ett block som är F's restriktion till U och ett block som ger restriktionen till $U^\perp$.

Exempel (forts)

Vi tittar på matrisen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

som är avbildningsmatris för $\tilde{F} : U^{\perp} \to U^{\perp}$ m.a.p den ordnade ON-basen $\begin{pmatrix} \bar{g}_3 & \bar{g}_4 \end{pmatrix}$.
Den har sekularpolynom

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1) \cdot (x+3)$$

vilket indikerar att vi räknat rätt.

Egenrummet $\lambda = -1$ (inuti koordinatrummet $\mathbb{R}^2$ för $U^{\perp}$) spänns av $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ medan egenrummet $\lambda = -3$ spänns av $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lyfter vi till $F : E \to E$ så har vi att egenrummet till $\lambda = -1$ spänns av

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{g}_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{g}_4, \; f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{g}_3 - 1 \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{g}_4.$$