TATA24 Linjär Algebra, Fö 18

Kvadratiska former

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Definition

Låt E vara ett euklidiskt rum av $\dim(E) = n < \infty$. En reellvärd funktion Q på E är kvadratisk om det finns någon bas (ej nödvändigtvis en ON-bas) för E så att Q kan skrivas på formen

$$Q(\bar{\mathrm{u}}) = Q(\underline{\mathrm{e}}X) = Q(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{\mathrm{e}}_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} b_{jk}x_jx_k$$

Exempel

I dimension 2 så ser en kvadratisk form ut som

$$\begin{aligned} Q(x_1\bar{\mathrm{e}}_1 + x_2\bar{\mathrm{e}}_2) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \\ &a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

I dimension 3 ges en allmänn kvadratisk form av

$$\begin{aligned} Q(x_1\bar{\mathrm{e}}_1 + x_2\bar{\mathrm{e}}_2 + x_3\bar{\mathrm{e}}_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ &a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{22}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = \\ &= b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2 \end{aligned}$$

Sats

Den kvadratiska formen

$$Q(\bar{\mathrm{u}}) = Q(\underline{\mathrm{e}}X) = Q(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{\mathrm{e}}_i) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$$

kan skrivas

$$Q(\underline{\mathrm{e}}X) = X^t A X$$

med A en kvadratisk matris, som inte är unikt bestämd. Den kan (unikt) väljas övertriangulär, eller (vanligare) symmetrisk.

Exempel

$$Q(x_1\bar{\mathrm{e}}_1 + x_2\bar{\mathrm{e}}_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Om C är anti-symmetrisk, dvs om $C^t = -C$, så är $(X^t CX)^t = X^t C^t X = -(X^t CX)$ dvs $X^t CX = 0$. Så anti-symmetriska matriser ger triviala kvadratiska former.
- Varje kvadratisk matris kan unikt uppdelas $A = S + C$ med S symmetrisk, C antisymmetrisk. Vi har att
$$X^t AX = X^t (S + C)X = X^t SC + X^t CX = X^t SC$$
så den kvadratiska formen definierad av A är samma som den definierad av den symmetriska delen
- Om $X^t AX = X^t BX$ så är $X^t (A - B)X = 0$. Matrisen $A - B$ ger alltså upphov till en trivial kvadratisk form. Anti-symmetriska matriser ger upphov till sådana, och omvänt, så $A - B$ är anti-symmetrisk, dvs B skiljer sig från A med något anti-symmetriskt.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exempel

Låt $Q(\underline{e}X) = X^t AX$ med

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

så att

$$Q(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Vi har sett att olika matriser kan ge Q, så vi kan inte återskapa A från Q's värden. Men vi har i alla fall att

$$Q(\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = a_{11}$$

$$Q(\underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = a_{22}$$

$$Q(\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = a_{11} + (a_{12} + a_{21}) + a_{22}$$

så vi kan unikt bestämma a_{11}, a_{22} och $a_{12} + a_{21}$ men “fördelningen” mellan a_{12} och a_{21} kan vara godtycklig.

Sats

Antag att

1. $\underline{\mathrm{e}}$, $\underline{\mathrm{f}}$ *baser för* E, $\dim(\mathrm{E}) = n < \infty$
2. $\underline{\mathrm{f}} = \underline{\mathrm{e}}T$
3. Q *kvadratisk form*
4. $Q(\underline{\mathrm{e}}X) = X^t AX$ *men också* $Q(\underline{\mathrm{f}}Y) = Y^t BY$

Då är $B = T^t AT$

Bevis.

Vi använder koordinatsambandet $X = TY$ och får

$$X^t AX = (TY)^T A(TY) = (Y^t T^t)A(TY) = Y^t (T^t AT)Y$$

□

Anmärkning

- T behöver vara ortogonal!!!
- Det är $T^t AT$ och inte $T^{-1}AT$ som vis basbyte för linjära avbildningar!

Exempel

Låt $Q(\underline{e}X) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$. Om $\bar{f}_1 = 10\bar{e}_1$, $\bar{f}_2 = 10\bar{e}_2$, så är

$$Q(y_1\bar{f}_1+y_2\bar{f}_2) = Q(10y_1\bar{e}_1+10y_2\bar{e}_2) = 3(10y_1)^2+5(10y_1)(10y_2)+8(10y_2)^2 = 300y_1^2+500y_1y_2+800y_2^2$$

medan om $\bar{g}_1 = 1/10\bar{e}_1$, $\bar{g}_2 = 1/5\bar{e}_2$, så är

$$\begin{aligned} Q(z_1\bar{g}_1 + z_2\bar{g}_2) &= Q(1/10z_1\bar{e}_1 + 1/5z_2\bar{e}_2) = \\ &3(1/10z_1)^2 + 5(1/10z_1)(1/5z_2) + 8(1/5z_2)^2 = (3/100)z_1^2 + (5/50)z_1z_2 + (8/25)z_2^2 \end{aligned}$$

Vi kan alltså “skala om” en kvadratisk form via ett “diagonalt” basbyte.

Exempel

Låt återigen $Q(\underline{e}X) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$. Vi kan kvadratkomplettera och få bort den blandade termen:

$$3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2 = 3(x_1^2 + 5/3x_1x_2 + 8/3x_2^2) =$$
$$3((x_1 + 5/6x_2)^2 - 25/36x_2^2 + 8/3x_2^2) = 3(x_1 + 5/6x_2)^2 + 71/12x_2^2 = 3y_1^2 + 71/12y_2^2$$

där $y_1 = x_1 + 5/6x_2$, $y_2 = x_2$ dvs omvända koordinatsambandet $Y = T^{-1}X$ blir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

så den nya basen $\underline{f}$ i vilken Q inte har blandade termer är $\underline{f} = \underline{e}T$ dvs

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1 - 5/6\bar{e}_2$$
$$\bar{f}_2 = \bar{e}_2$$

1. Kvadratisk form $Q : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$
2. $\underline{\mathrm{e}}$ bas för E
3. I denna bas $Q(\underline{\mathrm{e}}X) = X^t AX$ för någon (ej unik) matris A. Kan välja så A symmetrisk, då är A unik.
4. Till A och $\underline{\mathrm{e}}$ hör linjär avbildning $F : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ given av $F(\underline{\mathrm{e}}X) = \underline{\mathrm{e}}AX$.
5. Om A vald symmetrisk så är F symmetrisk avbildning.
6. $Q(\underline{\mathrm{e}}X) = X^t AX = (\underline{\mathrm{e}}X|F(\underline{\mathrm{e}}X)) = (F(\underline{\mathrm{e}}X)|\underline{\mathrm{e}}X)$
7. Omvänt, om F symmetrisk avbildning på E så blir
$$\begin{aligned} Q &: \mathrm{E} \to \mathbb{R} \\ Q(\overline{\mathrm{u}}) &= (\overline{\mathrm{u}}|F(\overline{\mathrm{u}})) \end{aligned}$$
   en kvadratisk form.
8. Det ger en “koordinatfri” definition av kvadratisk form om man så vill

Sats

- E *euklidiskt rum av dim* n
- Q *kvadratisk form på* E

Då finns det någon bas $\underline{\mathrm{f}}$ *m.a.p. vilken* Q *saknar blandade termer, dvs ges som*

$$Q(\underline{\mathrm{f}}Y) = Y^t DY$$

där D *är en diagonalmatris.*

Bevis.

1. Vi väljer först någon ON-bas $\underline{\mathrm{e}}$ och skriver $Q(\underline{\mathrm{e}}X) = X^t AX$ med A symmetrisk.
2. Låt $F(\underline{\mathrm{e}}X) = \underline{\mathrm{e}}AX$ vara den linjära avbildning som har A som avbildningsmatris (i basen $\underline{\mathrm{e}}$)
3. Då har E en ON-bas $\underline{\mathrm{f}}$ bestående av egenvektorer till F.
4. Kalla motsvarande egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
5. Låt T vara matrisen som har $\underline{\mathrm{e}}$-kordinaterna för $\overline{\mathrm{f}}$-vektorerna som kolonner
6. Då är $\underline{\mathrm{f}} = \underline{\mathrm{e}}T$ och $A = TDT^t$ och $D = T^t AT$ och $X = TY$ och $Y = T^t X$
7. Vi får $Q = X^t AX = (TY)^t A(TY) = Y^t T^t ATY = Y^t(T^t AT)Y = Y^t DY$

□

Exempel

Låt $Q(\underline{e}X) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2 = X^tAX$ med

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}$$

A har sekularpolynom $\lambda^2 - 11\lambda + 71/4$, egenvärden $\frac{11}{2} \mp \frac{5\sqrt{2}}{2}$ och egenvektorer $(1, 1-\sqrt{2})$ och $(1, 1+\sqrt{2})$. Vi sätter $\underline{f} = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \end{pmatrix}$ med

$$\bar{f}_1 = \underline{e}\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}_2 = \underline{e}\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Då skrivs Q i denna bas som

$$Q(\underline{f}Y) = (\frac{11}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2})y_1^2 + (\frac{11}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2})y_2^2 \approx 1.96y_1^2 + 9.04y_2^2$$

Exempel (forts)

Vi kan ta samma $Q(\underline{e}X) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2 = X^tAX$ och istället, som tidigare, sätta

$$\underline{g} = \underline{e}T = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5/6 & 1 \end{pmatrix}$$

och få att

$$Q(\underline{f}Z) = Z^tBZ = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 71/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 3z_1^2 + 71/12 z_2$$

Vi har alltså att

$$Q \approx X^t\begin{pmatrix} 3 & 2.50 \\ 2.50 & 8 \end{pmatrix}X \approx Y^t\begin{pmatrix} 1.96 & 0 \\ 0 & 9.04 \end{pmatrix}Y \approx Z^t\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5.92 \end{pmatrix}Z$$

Sats

Låt $Q(\underline{e}X) = X^t DX$ där D är diagonal, med $D_{jj} = \lambda_j$. Inför en ny bas $\underline{f}$ via

$$\bar{f}_j = \begin{cases} \sqrt{\lambda_j}\bar{e}_j & \text{om } \lambda_j > 0 \\ \bar{e}_j & \text{om } \lambda_j = 0 \\ \sqrt{-\lambda_j}\bar{e}_j & \text{om } \lambda_j < 0 \end{cases}$$

Då är $Q(\underline{f}Y) = Y^t \tilde{D} Y$ där $\tilde{D}$ är en diagonalmatris med enbart ettor, nollor, eller minusettor på diagonalen, dvs $Q(y_1, \ldots y_n)$ saknar blandade termer och koefficienterna är ± 1.

Exempel

Om $Q(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4) = 2x_1^2 - 3x_3^2 + 7x_4^2$ så är

$$Q(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \frac{x_3}{\sqrt{3}}\bar{e}_3 + \frac{x_4}{\sqrt{7}}\bar{e}_4) = y_1^2 - y_3^2 + y_4^2$$

Olika (diagonaliserande) baser för Q

1. Givet $Q(\underline{e}X) = X^t A X$
2. Kan alltid välja A symmetrisk
3. Kan göra ortogonalt basbyte till egenrumsbas $\underline{f}$
4. Får $Q(\underline{f}Y) = Y^t D Y$, D diagonal
5. Kan göra "omskalningsbasbyte" så att $Q(\underline{g}Z) = Z^t \tilde{D} Z$, $\tilde{D}$ diagonal med bara ettor och minusettor och nollor
6. Kan göra andra basbyten $\underline{h} = \underline{e}T$, *ej nödvändigtvis ortogonala* så att Q's matris blir diagonal. Exempelvis: kvadratkomplettering
7. Även om diagonalmatrisen ej unik, antal positiva, negativa, nollor på diagonalen är alltid samma!

Sats (Sylvesters tröghetssats)

Låt

- E *vara ett euklidiskt rum med* $\dim(\mathrm{E}) = n < \infty$
- $\underline{\mathrm{e}}$ *vara en ON-bas för* E
- Q *vara en kvadratisk form på* E
- $\underline{\mathrm{f}}$ *vara någon (ej nödvändigtvis ortonormal) bas för* E *så att* $Q(\underline{\mathrm{f}}Y) = Y^t DY$ *med* D *diagonal*
- (a_1, b_1, c_1) *vara antalet positiva,negativa,noll, värden på diagonalen till* D
- $\underline{\mathrm{g}}$ *vara någon (ej nödvändigtvis ortonormal) bas för* E *så att* $Q(\underline{\mathrm{g}}Z) = Z^t HZ$ *med* H *diagonal*
- (a_2, b_2, c_2) *vara antalet positiva,negativa,noll, värden på diagonalen till* H

Då gäller att $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$

Definition

Trippeln (a, b, c) kallas *signaturen* för Q.

Genom att ta $\underline{\mathrm{f}}$ till en egenvektorbas så blir D diagonalmatrisen av egenvärden, så signaturen kodar ner *antalet positiva, negativa, noll, egenvärden*.

Exempel

1. Låt $Q(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$. Vi kan kvadratkomplettera:

$$Q = (x_1 + 2x_2) - 4x_2^2 + x_2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 = y_1^2 - 3y_2^2$$

   Det är hur Q ser ut i en bas $\underline{f}$ som svarar mot kordinatbytet $y_1 = x_1 + 2x_2$, $y_2 = x_2$. Om vi beräknar egenvärdena till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ så är dessa $3, -1$, så i egenvektorbasen blir $Q = 3z_1^2 - z_2$. Signaturen för Q är "två positiva". Det är t.o.m samma positiva värden i de olika baserna.

2. Låt

$$\begin{aligned} Q = 139x_1 + 96x_1x_2 + 111x_2^2 = 139(x_1 + 96/139x_1x_2 + 111/139x_2^2) = \\ 139\left((x_1 + 48/139x_2)^2 - (48/139)^2x_2^2 + 111/139x_2^2\right) = \\ 139(x_1 + 48/139x_2)^2 + 13125/139x_2^2 = 139y_1^2 + 13125/139y_2^2 \end{aligned}$$

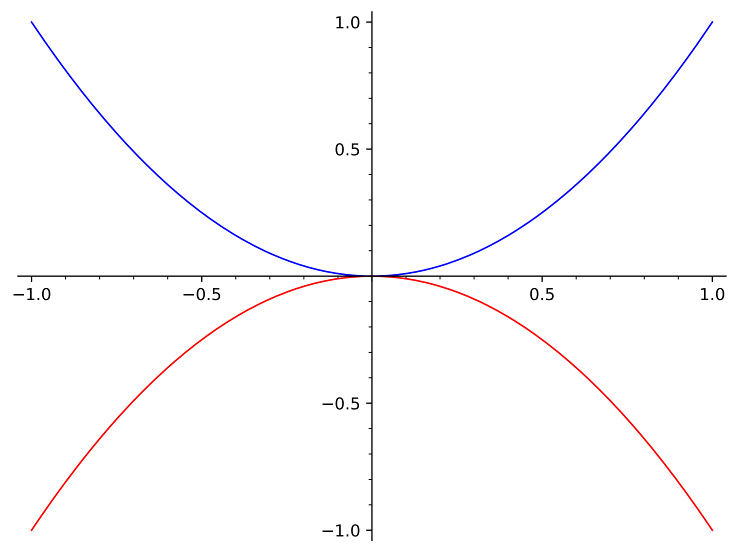
   Vi har att

$$\begin{pmatrix} 139 & 48 \\ 48 & 111 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^t$$

   så $Q = 25 * 3 * z_1^2 + 25 * 7 * z_2^2$ uttryckt i egenvektorsbasen. Samma teckenkaraktär, olika värden.

Exempel

En kvadradisk form i en variabel är på formen $Q(x) = xAx = Ax^2$. Om $A > 0$ så har Q ett minimum i origo, om $A < 0$ så är origo maximum för Q.



Definition

Låt Q vara en kvadratisk form på det n-dimensionella euklidiska rummet E.

1. Om $Q(\bar{u}) \geq 0$ för alla $\bar{u} \in E$, med likhet omm $\bar{u} = \bar{0}$, så är Q *positivt definit*.
2. Om $Q(\bar{u}) \geq 0$ för alla $\bar{u} \in E$, men det finns $\bar{v} \neq \bar{0}$ med $Q(\bar{v}) = 0$ så är Q *positivt semidefinit*.
3. Om $Q(\bar{u}) \leq 0$ för alla $\bar{u} \in E$, med likhet omm $\bar{u} = \bar{0}$, så är Q *negativt definit*.
4. Om $Q(\bar{u}) \leq 0$ för alla $\bar{u} \in E$, men det finns $\bar{v} \neq \bar{0}$ med $Q(\bar{v}) = 0$ så är Q *negativt semidefinit*.
5. Om det finns $\bar{u}, \bar{v} \in E$ med $Q(\bar{u}) > 0$ och $Q(\bar{v}) < 0$ så är Q indefinit.

Sats

Låt Q ha signatur $(a, b, n-a-b)$, a antalet positiva kvadrattermer om Q skrivs i diagonaliserande bas, b antalet negativa kvadrattermer.

1. *Q positivt definit omm $a = n$*
2. *Q negativt definit omm $b = n$*
3. *Q positivt semidefinit om $0 < a < n$, $b = 0$*
4. *Q negativt semidefinit om $0 < b < n$, $a = 0$*
5. *Q indefinit om $a > 0$, $b > 0$.*

Exempel

Låt $n = 4$.

- $z_1^2 + 5z_2^2 + 17z_3^2$ positivt indefinit,
- $z_1^2 + 5z_2^2 + 17z_3^2 + 2z_4^2$ positivt definit,
- $z_1^2 + 5z_2^2 + 17z_3^2 - 2z_4^2$ indefinit,
- $-z_1^2 - 5z_2^2 - 17z_3^2 - 2z_4^2$ negativt definit,
- $-z_1^2 - 5z_2^2 - 17z_3^2$ negativt indefinit.

Sats

Låt $Q(\underline{e}X = X^t AX$ då $\underline{e}$ ON-bas för E, A symmetrisk. Låt egenvärdena till A vara $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ och motsvarande (normerade) egenvektorer heta $\bar{\mathrm{f}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{f}}_n$.

1. *Om $\|\bar{\mathrm{u}}\| = 1$ så*

$$\lambda_1 \leq Q(\bar{\mathrm{u}}) \leq \lambda_n$$

med likhet i vänstra olikheten omm $\bar{\mathrm{u}}$ ligger i egenrummet till λ_1, dvs om det är en linjärkombination av egenvektorer med egenvärdet λ_1. På samma sätt råder likhet i höger olikhet omm $\bar{\mathrm{u}}$ ligger i egenrummet till λ_n.

2. *Om $\|\bar{\mathrm{u}}\| = c$ så*

$$c^2\lambda_1 \leq Q(\bar{\mathrm{u}}) \leq c^2\lambda_n$$

och maximum och minimum antas i motsvarande egenriktningar.

Bevis.

I basen $\underline{f}$ så är

$$Q = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2, \quad d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

Antag för enkelhets skull att $d_{n-1} < d_n$. Då är $Q(0,0,\ldots,0,1) = d_n$ och om $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$ så är

$$Q(y_1,\ldots,y_n) \;=\; d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2 \;\leq\; d_n y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2 \;=\; d_n(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \;=\; d_n$$

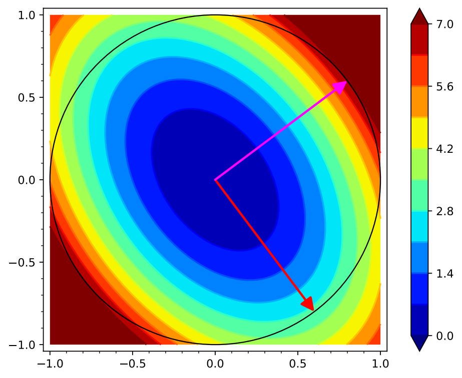
$\square$

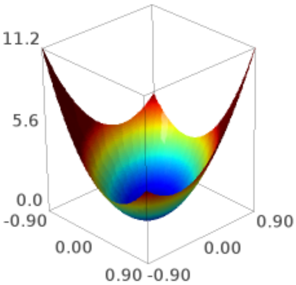
Exempel

Vi ritar konturlinjerna (isokliner, höjdkurvor) till

$$Q = Y^t \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} Y = X^t \begin{pmatrix} \frac{139}{25} & \frac{48}{25} \\ \frac{48}{25} & \frac{111}{25} \end{pmatrix} X$$

Egenvektor till 3 är $(3/5, -4/5)$ och till 7 $(4/5, 3/5)$, så (positivt definita) Q växer snabbast i den senare riktningen, och konturlinjerna är där tätast:



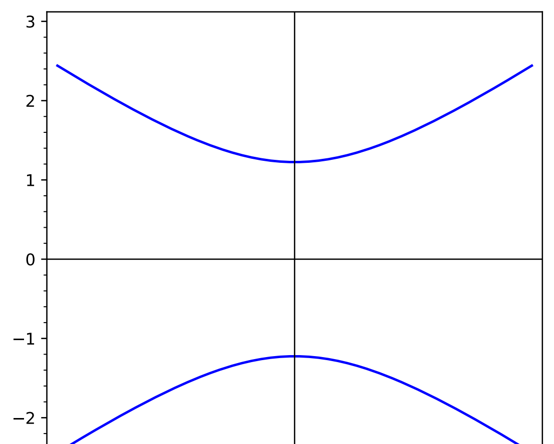

11.2
5.6
0.0
-0.90
0.00
0.90 -0.90
0.00
0.90

Sats

Låt $C_c = \{\bar{u} \in \mathrm{E} | Q(\bar{u}) = c\}$. Då ges kortaste avståndet från C_c till origo av $\sqrt{c/\lambda_n}$, där λ_n är det största egenvärdet, förutsatt att $c, \lambda_n > 0$.

Exempel

Höjdkurvan $Q = 3$ till $Q = -y_1^2 + 2y_2^2$ är som närmast origo då $y_1 = 0$, $2y_2^2 = 3$ dvs $y_2 = \pm\sqrt{3/2}$. Avståndet är där $\sqrt{3/2}$. Något största avstånd till origo finns inte.



Definition

En andragradskurva $K \subset \mathrm{E}^2$ är nollställemängden till en funktion $F : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ som i någon bas e (vi antar ON) ges av

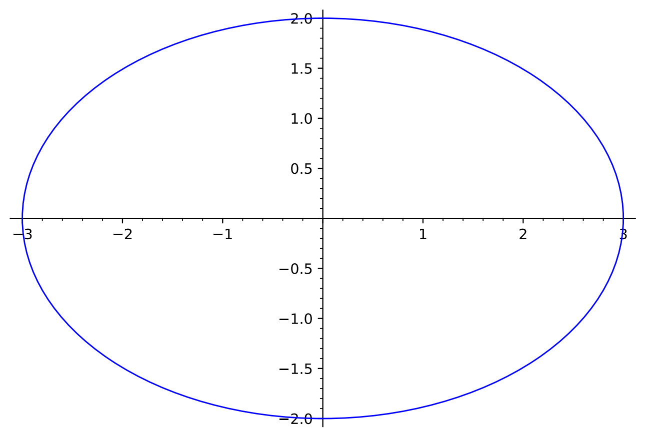
$$\begin{aligned} F(\underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y_2 + b_1x + b_2y + C \\ &= \begin{pmatrix} x & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C \\ &= X^t AX + BX + C \end{aligned}$$

Ellips

Definition

En axelparallell ellips med halvaxellängder $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, centrerad runt origo, har ekvation

$$\frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_2^2} - 1 = 0$$



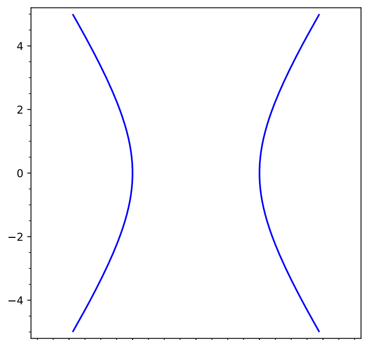
Definition

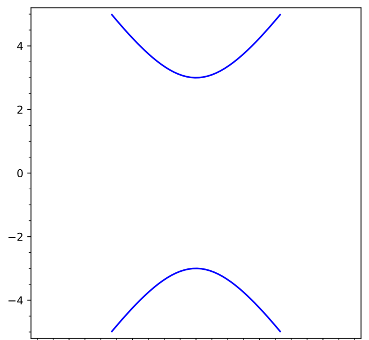
En axelparallell hyperbel centrerad runt origo har ekvation

$$\frac{x^2}{c_1^2} - \frac{y^2}{c_2^2} - 1 = 0$$

eller

$$-\frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_2^2} - 1 = 0$$





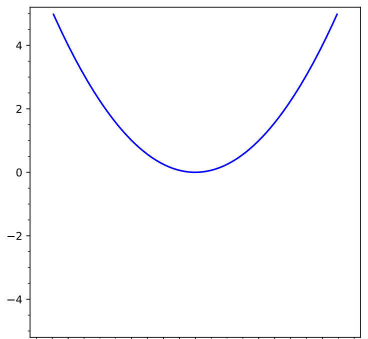
Definition

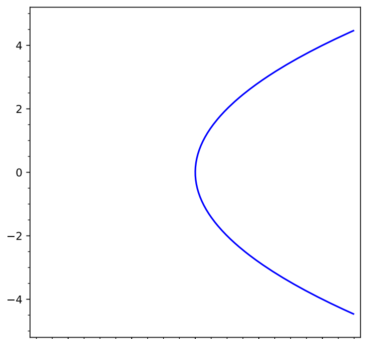
En axelparallell centrerad parabel har ekvation

$$\frac{x^2}{c_1^2} - y = 0$$

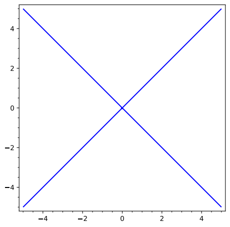
eller

$$\frac{y^2}{c_1^2} - x = 0$$

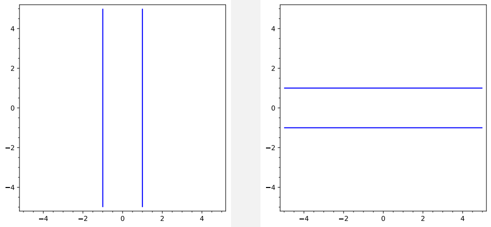




Degenererade fall



Två skärande linjer: $x^2 - y^2 = 0$.

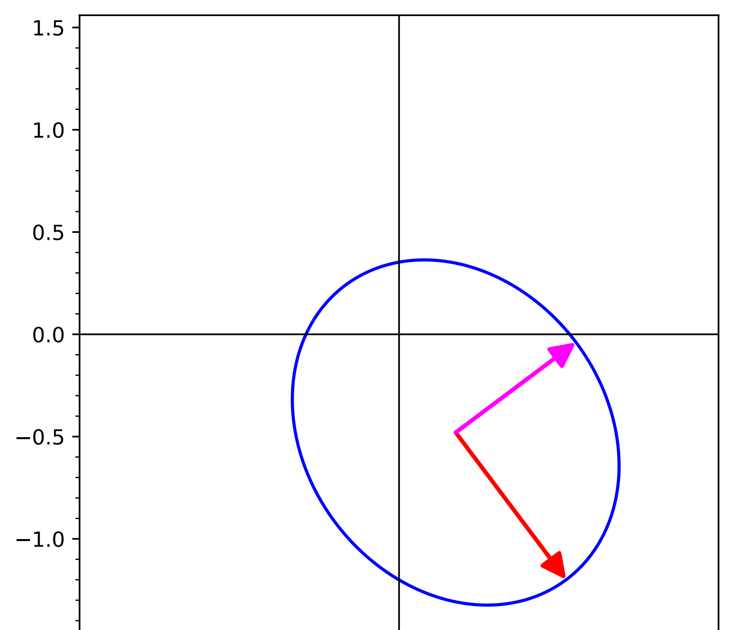


Två parallella linjer: $x^2 = 1$ eller $y^2 = 1$.

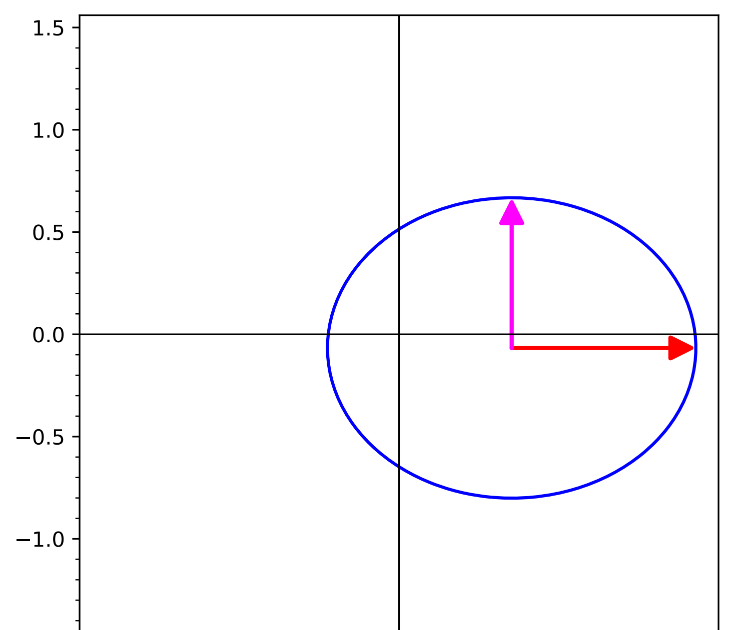
Klassificering av andragradskurva

1. Börja med $X^t AX + BX + C = 0$
2. Hitta egenvektorer till A, ortogonalt basbyte $\underline{f} = \underline{e}T$.
3. $X = TY$ så
4. $0 = (TY)^t AT + BTY + C = Y^t DY + EY + C$
5. Nu är kurvan axelparallell, men inte centrerad runt origo, blandade termer
6. Kvadratkomplettera!
7. Kan göras för hand eller med matriser
8. $O = D(Y^t Y + D^{-1}EY) = D((Y + \frac{1}{2}D^{-1}E)^t(Y + \frac{1}{2}D^{-1}E) - \frac{1}{4}(D^{-1}E)^t(D^{-1}E)$
9. Byt till Z-koord via translatering $Z = Y + \frac{1}{2}D^{-1}E$
10. Nu är kurvan centrerad runt origo, axelparallel

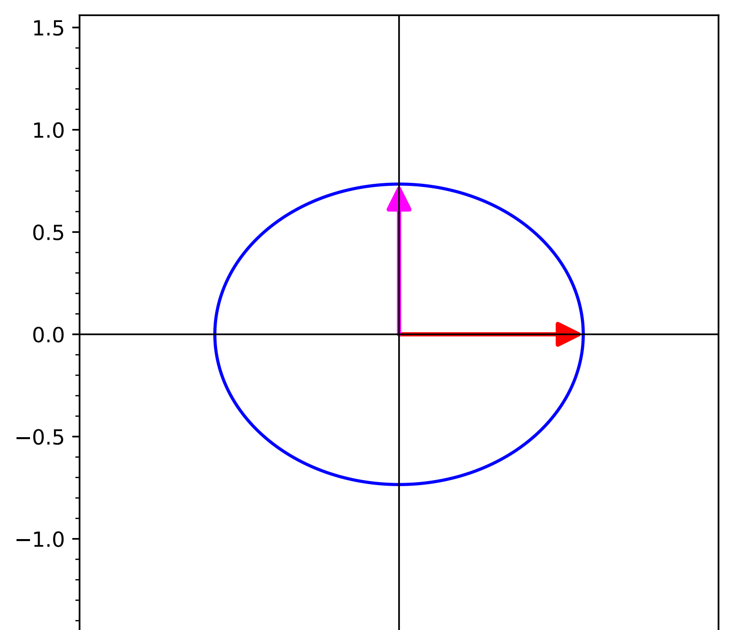
Exempel (Originalkurva)



Exempel (Kurva vriden, inte translaterad)



Exempel (Kurva vriden sedan translaterad)



Exempel

1. Tag kurvan $\frac{66}{25}x_1^2 + \frac{24}{25}x_1x_2 + \frac{59}{25}x_2^2 - x_1 + 2x_2 = 0$
2. Den kan skrivas $X^tAX + BX + C$ med
$$A = \begin{pmatrix} \frac{66}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{59}{25} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix},\ C = -1,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
3. Vi gör basbytet $\underline{f} = \underline{E}$ och motsvarande variabelbyte $X = TY$, med
$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$
4. Då är
$$D = TAT^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ E = BT = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$
så i nya koordinater är kurvan
$$Y^tDY + EY + C =$$
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + -1 =$$
$$2y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{11}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2 + -1 = 0$$

Exempel (forts)

5. Vänsterledet är

$$2(y_1^2 - \frac{11}{10}y_1) + 3(y_2^2 + \frac{2}{15}y_2) - 1 =$$
$$2(y_1 - \frac{11}{20})^2 + 3(y_2 + \frac{1}{15})^2 - 1 - 2(\frac{11}{20})^2 - 3(\frac{1}{15})^2 =$$
$$2z_1^2 + 3z_2^2 - 971/600$$

vilket är ekvationen för en ellips. Koordinatsambandet är

$$z_1 = y_1 - \frac{11}{20}$$
$$z_2 = y_2 + \frac{1}{15}$$

6. Vi hittar halvaxellängder genom att ta skärning med $z_2 = 0$ och $z_1 = 0$:

$$2z_1^2 = \frac{971}{600} \implies z_1 = \pm\sqrt{\frac{971}{1200}}$$
$$3z_2^2 = \frac{971}{600} \implies z_2 = \pm\sqrt{\frac{971}{1800}}$$

Exempel (forts)

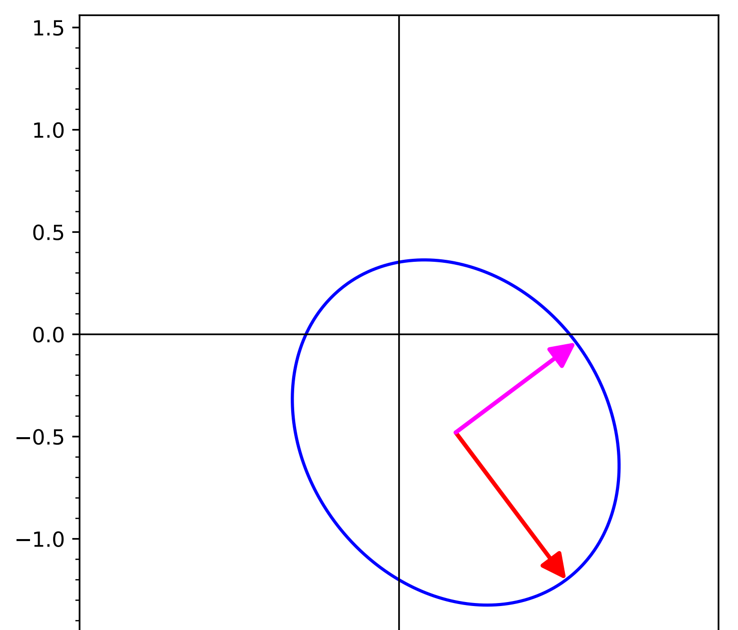
7. Center för ellipsen har Z-koordinater $(0,0)$ och Y-koordinater $(\frac{11}{20}, \frac{-1}{15})$
8. Koordinatsambandet $X = TY$ ger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{83}{300} \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix}$$

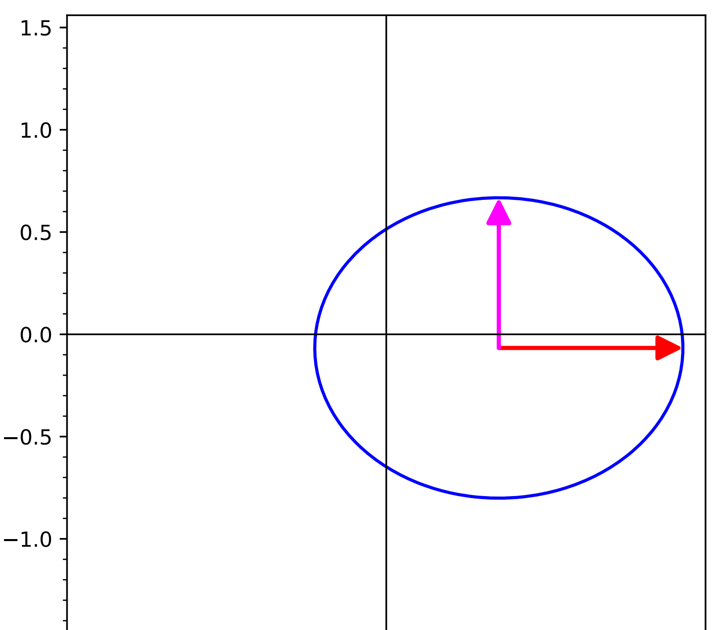
9. Axlarna har riktningsvektorer $\bar{\mathrm{f}}_1$ och $\bar{\mathrm{f}}_2$, dvs kolonnerna i

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Exempel (Originalkurva)



Exempel (Kurva vriden, inte translaterad)



Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel (Kurva vriden sedan translaterad)