# TATA24 Linjär Algebra, Fö 2

## Geometriska vektorer

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

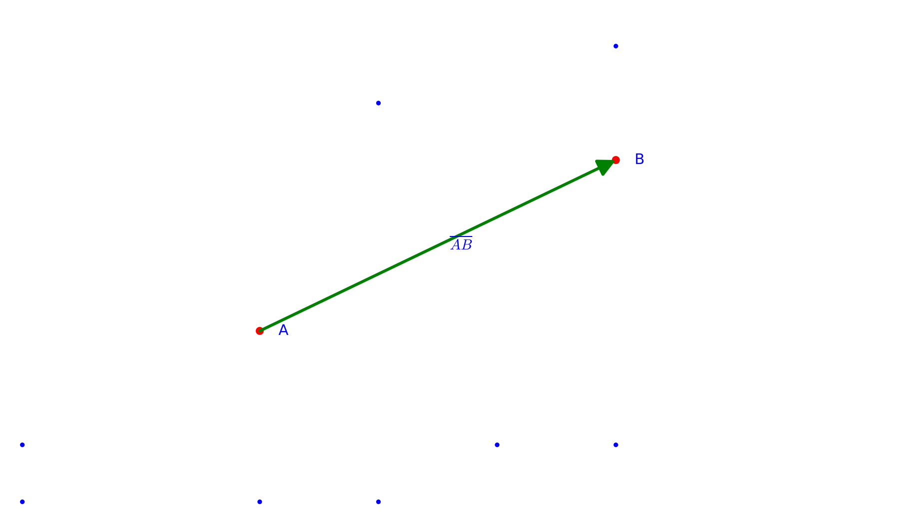
Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

## Översikt av dagens föreläsning:

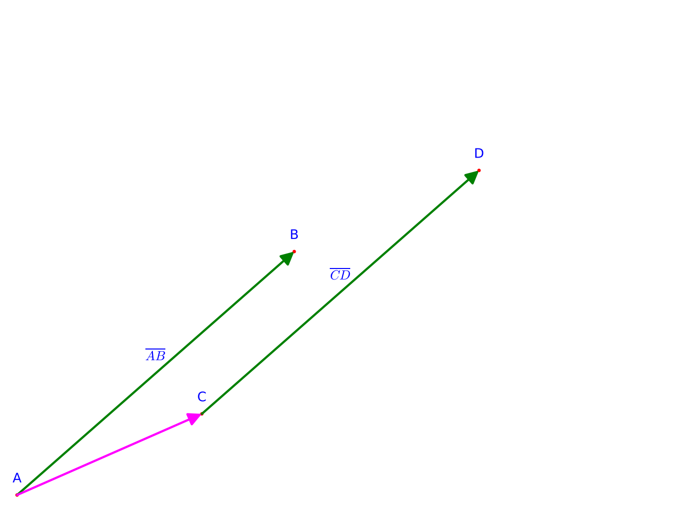
# Översikt av dagens föreläsning:

1. **Punkter, riktade sträckor, vektorer**
   - Origo, Ortsvektor
   - Addition och skalning av vektorer
   - Parallellitet
   - Exempel: Mittpunkter
2. **Linjärkombinationer, baser**
   - Koordinater
   - Avstånd

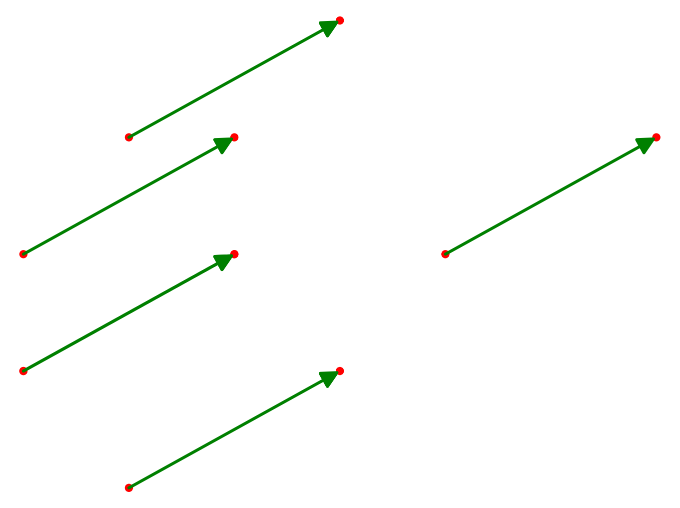
Låt oss föreställa oss ett plan (vi kan också tänka oss rummet), med ett antal utvalda punkter. Den riktade sträckan från punkt $A$ till punkt $B$ betecknas $\overline{AB}$. Det är inte samma sak som $\overline{BA}$.



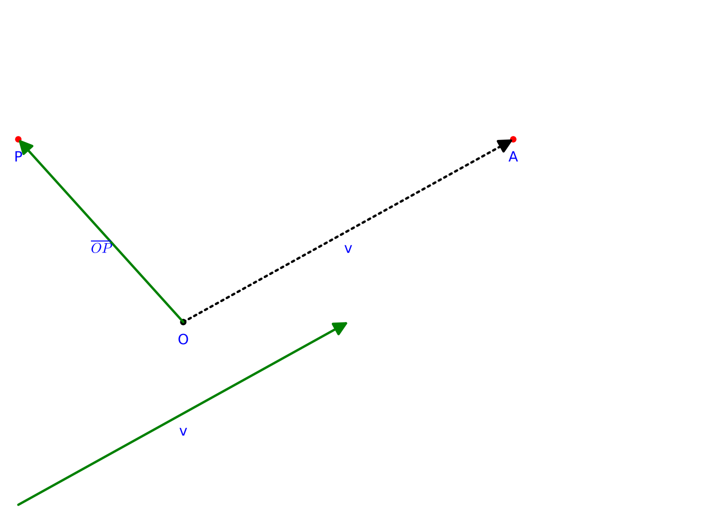
En riktad sträcka $\overline{AB}$ från $A$ till $B$ anger en förflyttning, eller en *vektor*. Olika riktade sträckor kan realisera samma vektor. I figuren nedan så är $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{\mathrm{v}}$, medan $\overline{AC}$ anger en annan vektor.



Skall man vara pedantisk så definieras vektorn $\overline{\mathrm{v}}$ som mängden av alla riktade sträckor vilka har samma längd och rikting som den riktade sträckan $\overline{AB}$, så det korrekta skrivsättet blir $\overline{AB} \in \overline{\mathrm{v}}$. Det är dock brukligt att identifiera representanten $\overline{AB}$ med klassen $\overline{\mathrm{v}}$.

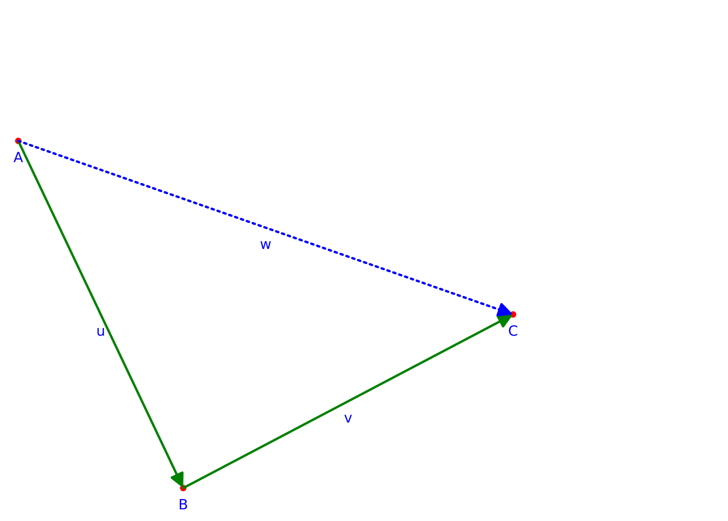


Vi inför en utvald punkt, som vi kallar *origo* och betecknar med $O$. Till varje punkt $P$ hör då dess ortsvektor (representerad av) $\overline{OP}$. Omvänt, varje vektor $\overline{\mathrm{v}}$ är ortsvektor till en unik punkt $A$, så att $\overline{\mathrm{v}} = \overline{OA}$.



### Definition

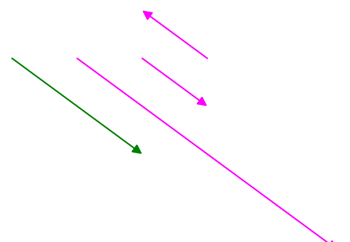
Om $\overline{u} = \overline{AB}$ och $\overline{v} = \overline{BC}$ så är $\overline{u} + \overline{v} = \overline{AC}$.



## Definition

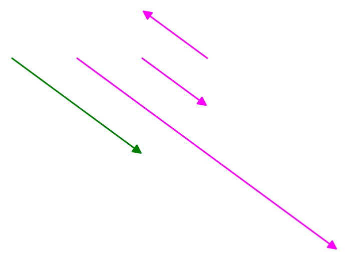
- Längden av en geometrisk vektor $\overline{\mathrm{u}} = \overline{AB}$ är avståndet mellan $A$ och $B$. Vi betecknar längden som $\|u\|$ .
- Vektorn representerad av $\overline{AA}$ (för en godtycklig punkt $A$) kallas för *nollvektorn* och betecknas $\overline{0}$. Den har längd noll.
- Om $\mathbb{R} \ni c > 0$ så anger $c\overline{\mathrm{u}}$ den vektor som är *lika riktad* med $\overline{\mathrm{u}}$ och har längd $c\,\|\overline{\mathrm{u}}\|$.
  Om $c = 0$ så $c\overline{\mathrm{u}} = \overline{0}$.
  Om $c < 0$ så anger $c\overline{\mathrm{u}}$ den vektor som är *motsatt riktad* med $\overline{\mathrm{u}}$ och har längd $-c\,\|\overline{\mathrm{u}}\|$.
- Vi har alltså att
$$\|c\overline{\mathrm{u}}\| = |c|\,\|\overline{\mathrm{u}}\|$$

Om $\overline{\mathrm{u}}$ är den gröna vektorn, kan du hitta $2\overline{\mathrm{u}}$ och $-\overline{\mathrm{u}}$ i figuren? Vilka är de övriga?



## Definition

Vi säger att vektorn $\overline{\mathrm{v}}$ är parallell med vektorn $\overline{\mathrm{u}}$ omm $\overline{\mathrm{v}} = c\overline{\mathrm{u}}$ för någon skalär $c$. Nollvektorn $\overline{0}$ är parallell med alla andra vektorer.



Alla dessa är parallella.

**Sats**

*Vi definierar* $-\overline{u} = (-1)\overline{u}$ *och* $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u} + (-1)\overline{v}$. *Då har vi följande räknelagar för vektorer:*

$$(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) \tag{1}$$

$$\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u} \tag{2}$$

$$\overline{u} + \overline{0} = \overline{u} \tag{3}$$

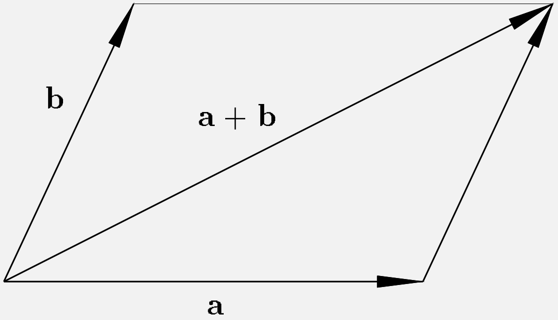
$$\overline{u} + \overline{v} = \overline{w} \iff \overline{v} = \overline{w} - \overline{u} \tag{4}$$

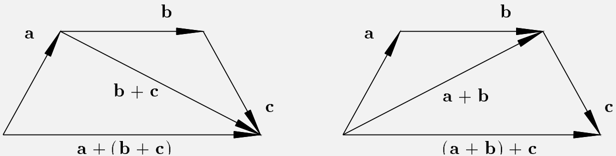
$$1\overline{u} = \overline{u} \tag{5}$$

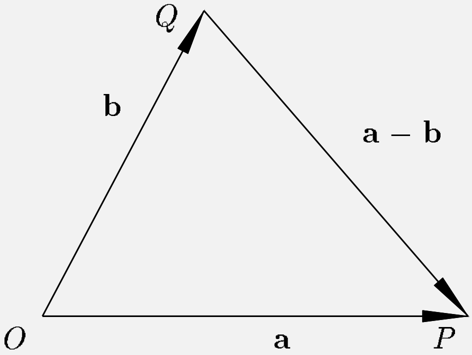
$$c(d\overline{u}) = (cd)\overline{u} \tag{6}$$

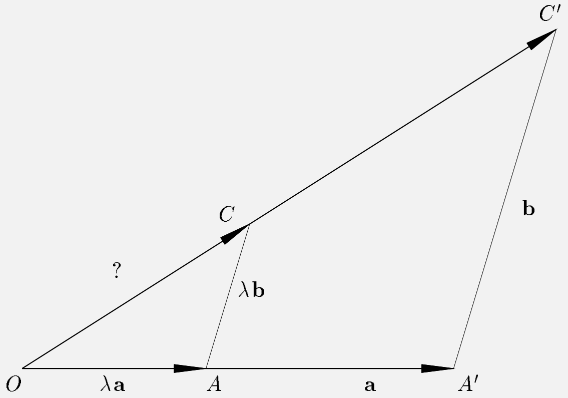
$$(c + d)\overline{u} = c\overline{u} + d\overline{u} \tag{7}$$

$$c(\overline{u} + \overline{v}) = c\overline{u} + c\overline{v} \tag{8}$$

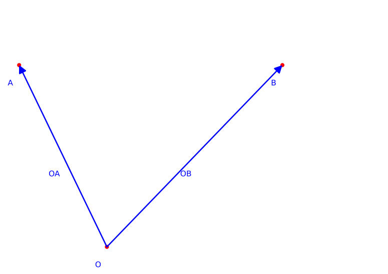

b
a + b
a


a
b
b + c
c
a + (b + c)
a
b
a + b
c
(a + b) + c


$Q$
$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}-\mathbf{b}$
$O$
$\mathbf{a}$
$P$


$C'$
$C$
$\mathbf{b}$
$?$
$\lambda\mathbf{b}$
$O$
$\lambda\mathbf{a}$
$A$
$\mathbf{a}$
$A'$

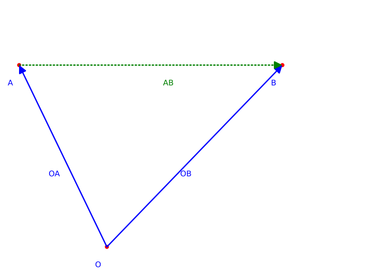
## Exempel




1. Låt $A, B$ vara två punkter (i planet, eller om de ligger i rummet: i det unika plan som innehåller $O, A, B$).
2. Låt $M$ vara mittpunkten på sträckan mellan dem. Hur kan vi uttrycka ortsvektorn $\overline{OM}$ i termer av $A$ och $B$?
3. Vi får att

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$$

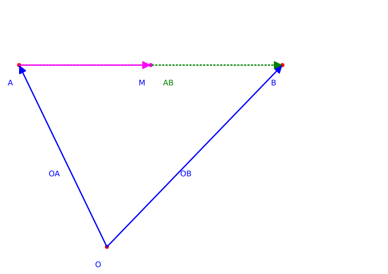
## Exempel




1. Låt $A, B$ vara två punkter (i planet, eller om de ligger i rummet: i det unika plan som innehåller $O, A, B$).
2. Låt $M$ vara mittpunkten på sträckan mellan dem. Hur kan vi uttrycka ortsvektorn $\overline{OM}$ i termer av $A$ och $B$?
3. Vi får att

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$$

## Exempel




1. Låt $A, B$ vara två punkter (i planet, eller om de ligger i rummet: i det unika plan som innehåller $O, A, B$).
2. Låt $M$ vara mittpunkten på sträckan mellan dem. Hur kan vi uttrycka ortsvektorn $\overline{OM}$ i termer av $A$ och $B$?
3. Vi får att

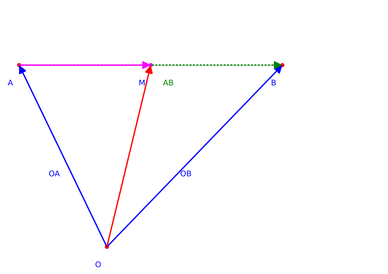
$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$$

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET



## Exempel




1. Låt $A, B$ vara två punkter (i planet, eller om de ligger i rummet: i det unika plan som innehåller $O, A, B$).
2. Låt $M$ vara mittpunkten på sträckan mellan dem. Hur kan vi uttrycka ortsvektorn $\overline{OM}$ i termer av $A$ och $B$?
3. Vi får att

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$$

## Definition

Låt $\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_k$ vara vektorer, och $x_1, \ldots, x_n$ skalärer. Då är

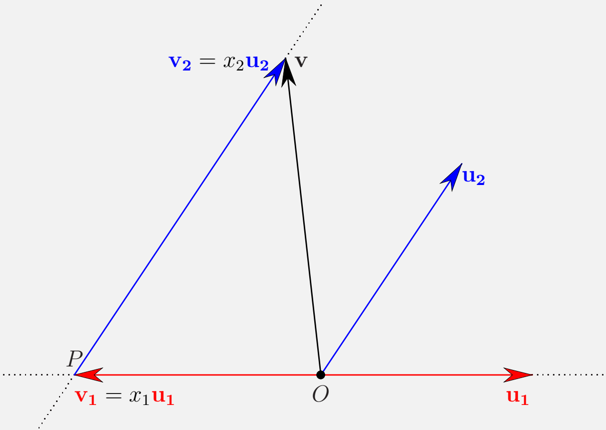
$$\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{\mathrm{u}}_k$$

en *linjärkombination* av $\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_k$.

## Sats

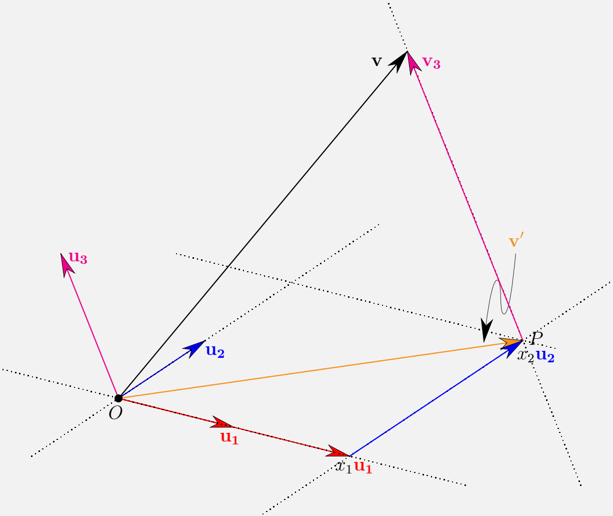
- *En linjärkombination av linjärkombinationer av $\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_k$ är ånyo en linjärkombinationer av $\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_k$.*
- *Låt $\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2$ vara två icke-parallella vektorer i planet, och $\overline{\mathrm{v}}$ en vektor i planet. Då kan $\overline{\mathrm{v}}$ uttryckas som en linjärkombination $\overline{\mathrm{v}} = x_1\overline{\mathrm{u}}_1 + x_2\overline{\mathrm{u}}_2$ på ett entydigt sätt.*
- *Låt $\overline{\mathrm{u}}_1, \overline{\mathrm{u}}_2, \overline{\mathrm{u}}_3$ vara tre vektorer planet, sådana att det inte finns något plan som innehåller alla tre. Låt $\overline{\mathrm{v}}$ vara en vektor i rummet. Då kan $\overline{\mathrm{v}}$ uttryckas som en linjärkombination $\overline{\mathrm{v}} = x_1\overline{\mathrm{u}}_1 + x_2\overline{\mathrm{u}}_2 + x_3\overline{\mathrm{u}}_3$ på ett entydigt sätt.*

Existens (planet):




Figur 2.11: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$

Existens (rummet):




Figur 2.12: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v_3} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + x_3\mathbf{u_3}$

Entydighet:
Om

$$\overline{\mathrm{v}} = x_1\overline{\mathrm{u}}_1 + x_2\overline{\mathrm{u}}_2 = y_1\overline{\mathrm{u}}_1 + y_2\overline{\mathrm{u}}_2$$

så

$$x_1\overline{\mathrm{u}}_1 + x_2\overline{\mathrm{u}}_2 - y_1\overline{\mathrm{u}}_1 - y_2\overline{\mathrm{u}}_2 = \overline{0}$$

varför

$$(x_1 - y_1)\overline{\mathrm{u}}_1 + (x_2 - y_2)\overline{\mathrm{u}}_2 = \overline{0}$$

Vi hävdar att $x_2 - y_2 = 0$. Om inte, så

$$(x_1 - y_1)\overline{\mathrm{u}}_1 = (y_2 - x_2)\overline{\mathrm{u}_2},$$

vilket ger att $\overline{\mathrm{u}_1}$ och $\overline{\mathrm{u}}_2$ är parallella, en motsägelse.
Eftersom $(x_2 - y_2 = 0$, så får vi att

$$(x_1 - y_1)\overline{\mathrm{u}}_1 = \overline{0}$$

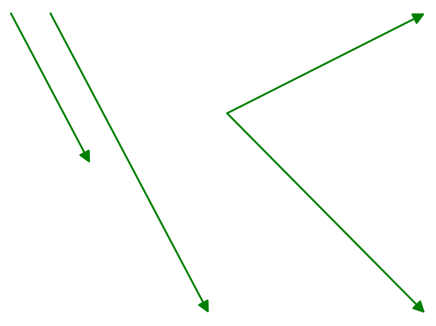
Nu måste $x_1 - y_1 = 0$, ty annars är $\overline{\mathrm{u}_1} = \overline{0}$, en motsägelse eftersom nollvektorn är parallell med allt, inklusive $\overline{\mathrm{u}}_2$.

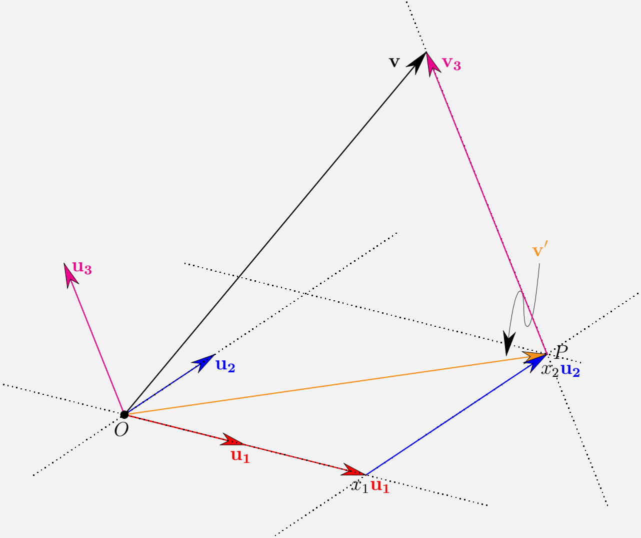
## Definition

En ordnad uppsättning vektorer i planet (eller i rummet) kallas en *bas* om varje vektor i planet (rummet) på ett entydigt sätt kan skrivas som en linjärkombination av elementen i basen.

## Sats

*En bas i planet består av två icke-parallella vektorer. En bas i rummet består av tre vektorer, sådana att det inte finns något plan vilket innehåller alla tre.*

Ej bas, bas: 




Figur 2.12: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v_3} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + x_3\mathbf{u_3}$

## Definition

Låt $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ vara en bas i planet, och antag att $\overline{v} = x_1\overline{u}_1 + x_2\overline{u}_2$. Då kallas talparet $x_1, x_2$ för *koordinaterna* för $\overline{v}$ i basen $\overline{u}_1, \overline{u}_2$.
Vi skriver $\underline{u} = [\overline{u}_1, \overline{u}_2]$ och

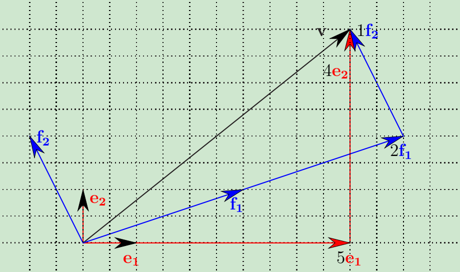
$$\overline{v} = \underline{u} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Om istället $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ är en bas i rummet rummet så får vi $\underline{u} = [\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3]$ och

$$\overline{v} = \underline{u} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## Exempel

Koordinaterna beror såväl på vektorn som på den valda basen:




Figur 2.13: $\mathbf{v}$ som linjärkombination av baserna $\underline{\mathbf{e}}$ och $\underline{\mathbf{f}}$.

**Exempel 2.3.4.** Betrakta figur 2.13. Där har vi två olika baser, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ och $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. I figuren ser vi att $\mathbf{v}$ kan skrivas

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 = (\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{och} \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix},$$

d v s $\mathbf{v}$ har koordinaterna $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ i basen $\underline{\mathbf{f}}$ och $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$. ♦

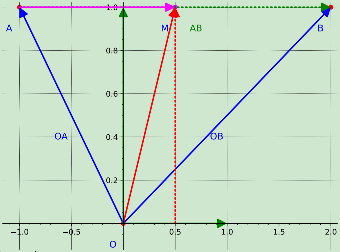
## Exempel

Låt $A, B$ vara två punkter i planet, låt $O$ vara origo, låt $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ vara en bas för rummet.

Antag att

$$\overline{OA} = \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{OB} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$




Enligt vad vi gjort tidigare så är

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$$

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET



## Definition

Antag att vi har valt origo i planet (rummet) och dessutom en ordnad bas. Då är koordinaterna för en punkt $M$, map detta *koordinatsystem*, givet av koordinaterna för ortsvektorn $\overline{OM}$.

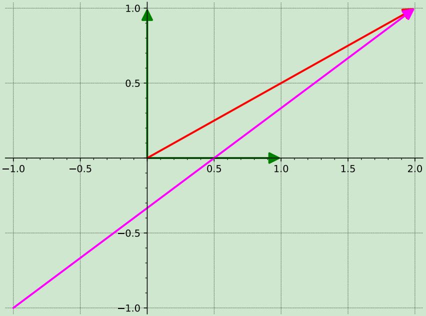
Vi skriver antingen $\overline{OM} = \underline{e}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eller $M = (x, y)$. Den senare notationen beror (osynligt) på både $O$ och $\underline{e}$.

## Exempel

En punkts koordinater beror således även av val av origo: vi har nedan att

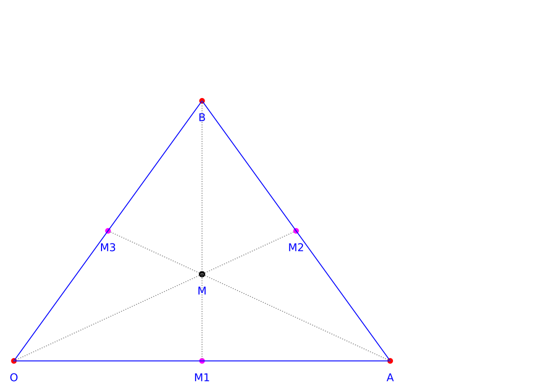
$$\overline{OM} = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{O'M} = \underline{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

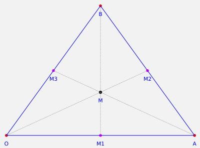
Så beroende av val av origo så har vi antingen $M = (2, 1)$ eller $M = (3, 2)$.



## Exempel

Vi kan flytta origo så att vårt problem blir lättare. Nedan vill vi hitta mittpunkten till triangeln $ABC$. Genom att sätta $O = C$ får vi en enklare figur; för att få ut formeln för $M$ då origo inte ligger i $C$ adderar vi bara $C$.






## Exempel (forts)

Om linjerna från hörn till mittpunkt alla skär i en gemensam punkt så

$$\overline{OM_1} = \frac{1}{2}\overline{OA}$$

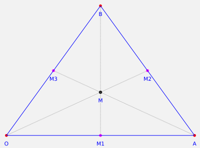
$$\overline{OM_3} = \frac{1}{2}\overline{OB}$$

$$\overline{OM_2} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$$

$$\overline{OM} = s\overline{OM_2} = s\frac{1}{2}\overline{OA} + s\frac{1}{2}\overline{OB}$$

$$\overline{OM} = \overline{OA} + t\overline{AM_3} = \overline{OA} + t(\overline{OM_3} - \overline{OA}) = \overline{OA} + t(\frac{1}{2}\overline{OB} - \overline{OA})$$

$$\overline{OM} = \overline{OB} + r\overline{BM_1} = \overline{OB} + r(\overline{OM_1} - \overline{OB}) = \overline{OB} + r(\frac{1}{2}\overline{OA} - \overline{OB})$$




## Exempel (forts)

Vi sätter uttrycken för $\overline{OM}$ lika:

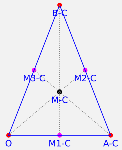
$$s\frac{1}{2}\overline{OA} + s\frac{1}{2}\overline{OB} = \overline{OA} + t(\frac{1}{2}\overline{OB} - \overline{OA}) = \overline{OB} + r(\frac{1}{2}\overline{OA} - \overline{OB})$$

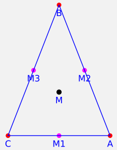
Eftersom $[\overline{OA}, \overline{OB}]$ är en bas, kan vi jämföra koordinater, och får

$$s/2 = 1 - t = r/2$$
$$s/2 = t/2 = 1 - r$$

så $s = t = r$ och $t/2 = 1 - t$, så $s = t = r = 2/3$.
Alltså är

$$\overline{OM} = \frac{2}{3}\overline{OM_2} = \frac{2}{3}\overline{OM_2} = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}) = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OO}$$




## Exempel (forts)

Om $C \neq O$ så sätter vi $O' = C$. Då blir $\overline{O'A} = \overline{OA} - \overline{OC}$, $\overline{O'B} = \overline{OB} - \overline{OC}$, $\overline{O'C} = \overline{OC} - \overline{OC} = \overline{OO}$ och

$$\overline{O'M} = \frac{1}{3}\overline{O'A} + \frac{1}{3}\overline{O'B}$$

Vi får

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{O'M} = \overline{OC} + \frac{1}{3}(\overline{OA} - \overline{OC}) + \frac{1}{3}(\overline{OB} - \overline{OC}) = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{OB} + \frac{1}{3}\overline{OC}$$

### Definition

Låt $A, B$ vara punkter i planet (rummet). Då är avståndet mellan $A$ och $B$ givet av längden av den riktade sträckan mellan punkterna,

$$d(A, B) = \left\| \overline{AB} \right\|$$

### Definition

Ett koordinatsystem i planet (rummet) är rätvinkligt (ortogonalsystem) om basvektorerna är parvis vinkelräta mot varandra. Det är ett *ortonormalt system* (ON) om dessutom alla basvektorer har längd 1.

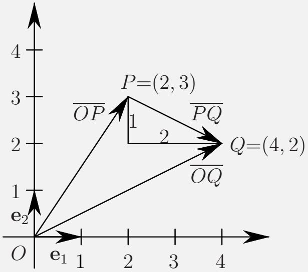
### Sats (Pythagoras sats)

*Om* $\underline{e}$ *utgör ett ON-system i planet och* $\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ *så* $\|\bar{v}\| = x_1^2 + x_2^2$.
*Om* $\underline{e}$ *utgör ett ON-system i rummet och* $\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ *så* $\|\bar{v}\| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

**Lösning:** Av figuren framgår att

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} \tag{2.4.1}$$
$$\iff$$
$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

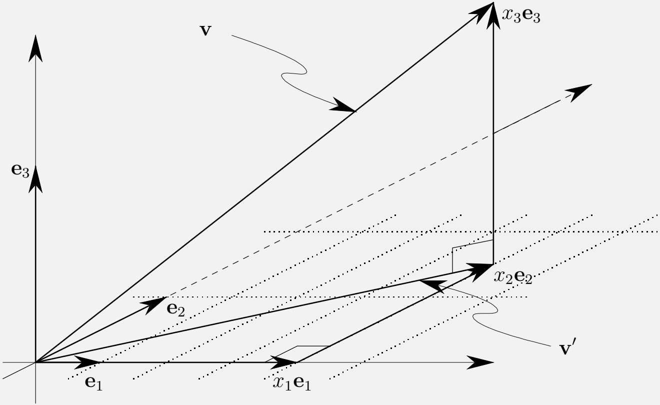
Pythagoras sats ger att avståndet är $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = |\overline{PQ}|$.
Se (2.4.1) ovan som alternativa resvägar till samma mål, punkten $Q$; åk antingen raka spåret från $O$ till $Q$, d v s längs $\overline{OQ}$ eller först från $O$ till $P$, sedan från $P$ till $Q$. Båda vägarna ger samma slutmål $Q$, d v s resulterar i samma vektor.



Figur 2.14: Koordinaträkning i planet

♠

## Pythagoras i rummet




Figur 2.16: $|\mathbf{v}|^2 = x_1^2|\mathbf{e}_1|^2 + x_2^2|\mathbf{e}_2|^2 + x_3^2|\mathbf{e}_3|^2$