TATA24 Linjär Algebra, Fö 3

Skalärprodukt och vektorprodukt

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Skalärprodukt**
   - Inslutande plan
   - Definition av skalärprodukt
   - Elementära egenskaper för skalärprodukten
   - Ortogonalprojektion
   - Koordinatfria tillämpningar av skalärprodukt
   - Skalärprodukt i ON-koordinater
   - Exempel
2. **Vektorprodukt**
   - Högersystem
   - Definition av vektorprodukt
   - Area av parallellogram
   - Högerhandsregeln
   - Räkneregler för vektorprodukten
   - Vektorprodukt i ON-koordinater
   - Vektorprodukten är inte associativ
3. Tillämpningar av vektorprodukt
4. Trippelprodukt

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

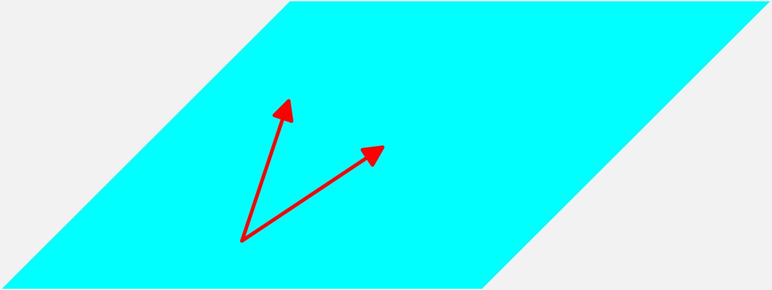
1. **Skalärprodukt**
    - Inslutande plan
    - Definition av skalärprodukt
    - Elementära egenskaper för skalärprodukten
    - Ortogonalprojektion
    - Koordinatfria tillämpningar av skalärprodukt
    - Skalärprodukt i ON-koordinater
    - Exempel
2. **Vektorprodukt**
    - Högersystem
    - Definition av vektorprodukt
    - Area av parallellogram
    - Högerhandsregeln
    - Räkneregler för vektorprodukten
    - Vektorprodukt i ON-koordinater
    - Vektorprodukten är inte associativ
3. **Tillämpningar av vektorprodukt**
4. **Trippelprodukt**

Vi börjar med följande observation:

Sats

Givet två icke-parallella vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ *i rummet, så finns det ett unikt plan som innehåller* $\overline{u}$ *och* $\overline{v}$. *Varje linjärkombination* $c_1\overline{u} + c_2\overline{v}$ *av dessa två vektorer ligger kvar i detta plan.*

Vi kan alltså rita konstruktioner involverande två vektorer i rummet två-dimensionellt.

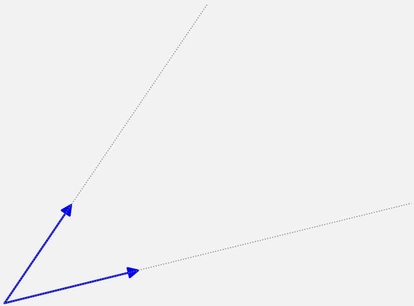


Definition

Låt $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$ vara två vektorer i planet eller rummet. Vi definierar *skalärprodukten* mellan dem som

$$\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{v}} = \begin{cases} 0 & \text{om } \overline{\mathrm{u}} = \overline{0} \text{ eller } \overline{\mathrm{v}} = \overline{0} \\ \|u\| \, \|v\| \cos(\theta) & \overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}} \neq \overline{0} \end{cases}$$

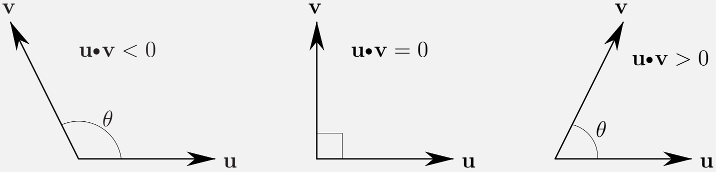
där θ är minsta vinkeln mellan $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$, dvs vinkeln mellan de strålar från origo som $\overline{\mathrm{u}}$, $\overline{\mathrm{v}}$ anger.



Sats

Låt $\overline{u}$ och $\overline{v}$ vara två vektorer i planet eller rummet. Då är

- $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$ *om någon av vektorerna är nollvektorn, eller om* $\overline{u} \perp \overline{v}$, *d.v.s om det är vinkelräta mot varandra.*
- $\overline{u} \cdot \overline{v} > 0$ *om vinkeln* θ *mellan dem är spetsig, dvs* $0 < \theta < \pi/2$ *radianer.*
- $\overline{u} \cdot \overline{v} < 0$ *om vinkeln* θ *mellan dem är trubbig, dvs* $\pi/2 < \theta \leq \pi/2$ *radianer.*
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = \|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\|$ *omm* $\overline{u} \parallel \overline{v}$ *och lika riktade, d.v.s om* $\overline{v} = c\overline{u}$ *med* $c > 0$.
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = -\|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\|$ *omm* $\overline{u} \parallel \overline{v}$ *och motsatt riktade, d.v.s om* $\overline{v} = c\overline{u}$ *med* $c < 0$.



Figur 2.17: Skalärproduktens tecken.

Räknelagar för skalärprodukten

Sats

För alla vektorer $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}$, *och* $\overline{\mathrm{w}}$ *och skalärer* c *så gäller*

$$\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} \cdot \overline{\mathrm{u}} \tag{1}$$

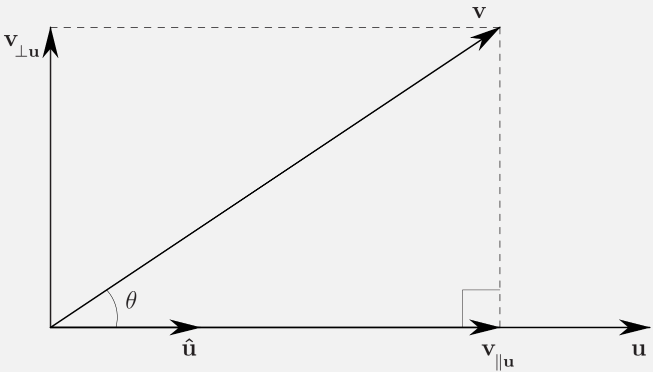
$$\overline{\mathrm{u}} \cdot (\overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{w}}) = \overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{v}} + \overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{w}} \tag{2}$$

$$\overline{\mathrm{u}} \cdot (c\overline{\mathrm{v}}) = c(\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{v}}) \tag{3}$$

$$\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{u}} = \|\overline{\mathrm{u}}\|^2 \tag{4}$$

$$\overline{\mathrm{u}} \cdot \overline{\mathrm{u}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\mathrm{u}} = \overline{0} \tag{5}$$

Alla egenskaper ovan, bortsett additiviteten, är uppenbara! Vi visar additiviteten genom att relatera skalärprodukt till *ortogonalprojektion*.



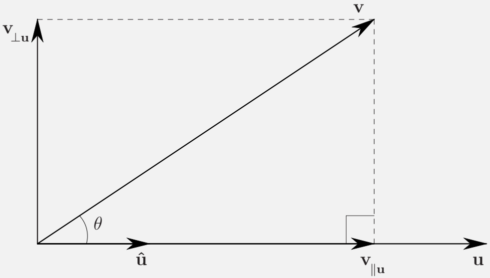
Figur 2.18: Ortogonal projektion.

$$\overline{v} = \overline{v}_{\|\overline{u}} + \overline{v}_{\perp\overline{u}}$$

$$\overline{v}_{\|\overline{u}} \parallel \overline{u}$$

$$\overline{v}_{\perp\overline{u}} \perp \overline{u}$$

$$\hat{\overline{u}} = \frac{\overline{u}}{\|\overline{u}\|}$$



Figur 2.18: Ortogonal projektion.

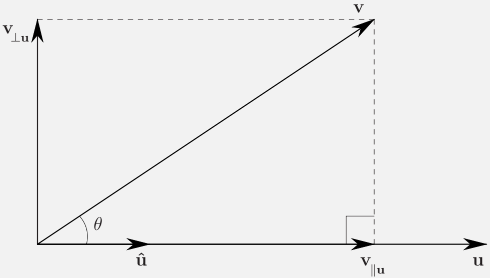
$$\left\|\overline{v}_{\|\overline{u}}\right\| = \cos(\theta)\,\|\overline{v}\| = \cos(\theta)\,\|\overline{v}\|\,\left\|\widehat{\overline{u}}\right\| = \overline{v}\cdot\widehat{\overline{u}}$$

Eftersom $\overline{v}_{\|\overline{u}} \parallel \overline{u} \parallel \widehat{\overline{u}}$ så $\overline{v}_{\|\overline{u}} = c\overline{u}$ för någon skalär c. Vi får att

$$\left\|\overline{v}_{\|\overline{u}}\right\| = \left\|c\widehat{\overline{u}}\right\| = |c|\,\left\|\widehat{\overline{u}}\right\| = |c| = c = \left\|\overline{v}_{\|\overline{u}}\right\|$$

om $c > 0$, som i figuren. Vi får

$$\overline{v}_{\|\overline{u}} = c\widehat{\overline{u}} = (\overline{v}\cdot\widehat{\overline{u}})\widehat{\overline{u}} = \left(v\cdot\frac{\overline{u}}{\|\overline{u}\|}\right)\frac{\overline{u}}{\|\overline{u}\|} = \left(\frac{\overline{v}\cdot\overline{u}}{\|\overline{u}\|^2}\right)\overline{u}$$



Figur 2.18: Ortogonal projektion.

Sats

Låt $\overline{u}$, $\overline{v}$ *vara två vektorer, med* $\overline{u} \neq \overline{0}$. *Då ges den ortogonala projektionen av* $\overline{u}$ *på* $\overline{v}$ *av*

$$\overline{v}_{\|\overline{u}} = \left(\frac{\overline{v} \cdot \overline{u}}{\|\overline{u}\|^2} \right) \overline{u}$$

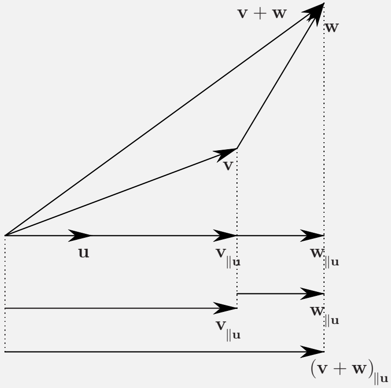
och den vinkelräta komposanten av

$$\overline{v}_{\perp\overline{u}} = \overline{v} - \overline{v}_{\|\overline{u}}$$

Sats

Om $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ *är vektorer i rummet (planet) och* $\overline{u} \neq \overline{0}$, *så gäller att*

$$(\overline{v} + \overline{w})_{\| \overline{u}} = \overline{v}_{\| \overline{u}} + \overline{w}_{\| \overline{u}}$$



Figur 2.21: Distributiva lagen för skalärprodukt.

Obs: $\overline{v}, \overline{w}$ i papperets plan, $\overline{u}$ ej nödv. i detta plan.

Sats

Om $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ *är vektorer i rummet (planet) så gäller att*

$$(\overline{v} + \overline{w}) \cdot \overline{u} = \overline{v} \cdot \overline{u} + \overline{w} \cdot \overline{u}$$

Bevis.

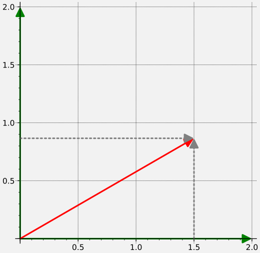
Om $\overline{u} = \overline{0}$ så är båda kvantiteterna noll. Om inte, så

$$\frac{(\overline{v} + \overline{w}) \cdot \overline{u}}{\|\overline{u}\|^2} = (\overline{v} + \overline{w})_{\|\overline{u}} = \overline{v}_{\|\overline{u}} + \overline{w}_{\|\overline{u}} = \frac{\overline{v} \cdot \overline{u}}{\|\overline{u}\|^2} + \frac{\overline{w} \cdot \overline{u}}{\|\overline{u}\|^2}$$

så vi multiplicerar VL och HL med $\|\overline{u}\|^2$ och får

$$(\overline{v} + \overline{w}) \cdot \overline{u} = \overline{v} \cdot \overline{u} + \overline{w} \cdot \overline{u}.$$

□



Exempel

Låt $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{v}$ vara tre vektorer i planet. Antag att $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ båda har längd 2, och att de är vinkelräta mot varandra. Antag att $\overline{v}$ har längd 3 och bildar vinkeln $\pi/3$ mot $\overline{f}_1$ och $\pi/6$ mot $\overline{f}_2$. Skriv $\overline{v}$ som en linjärkombination av $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$.

Lösning:

$$\overline{v}_{\|\overline{f}_1} = \frac{\overline{v}\cdot\overline{f}_1}{\left\|\overline{f}_1\right\|^2}\overline{f}_1 = \frac{\|\overline{v}\|\left\|\overline{f}_1\right\|\cos(\theta)}{\left\|\overline{f}_1\right\|^2}\overline{f}_1 = \frac{3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}{2^2}\overline{f}_1$$

$$= \frac{3}{4}\overline{f}_1$$

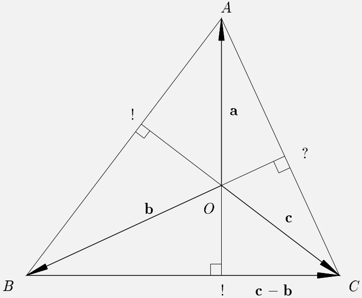
$$\overline{v}_{\perp\overline{f}_1} = \overline{v}_{\|\overline{f}_2} = \frac{\overline{v}\cdot\overline{f}_2}{\left\|\overline{f}_2\right\|^2}\overline{f}_2 = \frac{\|\overline{v}\|\left\|\overline{f}_2\right\|\cos(\pi/2-\theta)}{\left\|\overline{f}_2\right\|^2}\overline{f}_2 = \frac{3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2^2}\overline{f}_2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{f}_2$$

så $\overline{v} = \frac{3}{4}\overline{f}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\overline{f}_2$.

Exempel

Vi visar att höjderna i en triangel skär varandra en en punkt m.h.a skalärprodukt.
Drag linjen A till mittpunkt BC och C till mittpunkt AB, sätt origo O i denna skärning.



Kalla hörnens ortsvektorer, med avseende på O, för $\mathbf{a}(=\overrightarrow{OA})$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Kantvektorerna är då $\mathbf{c}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$. Enligt förutsättning är då:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) &= 0; \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) &= 0; \qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \end{aligned}$$

varur:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \quad \text{d v s} \quad \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$$

vilket skulle visas.

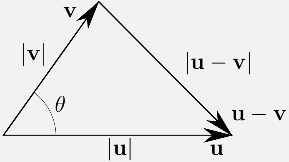
Exempel 2.5.8. Ett välkänt resultat från triangelgeometrin är *cosinus-satsen*. Den säger att om en triangel har sidlängderna a, b, c och den mot vinkeln θ stående sidan är den med längd c så gäller

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Denna kan enkelt bevisas med hjälp av vektorräkning. Inför vektorer som figur 2.23 visar. Då är $c = |\mathbf{u}-\mathbf{v}|$ och, t ex $a = |\mathbf{u}|$ och $b = |\mathbf{v}|$. Från räknelagarna för skalärprodukt fås

$$\begin{aligned}
c^2 &= |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 \overset{(2.5.4)}{=} (\mathbf{u}-\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \overset{(2.5.2)}{=} \\
&= \mathbf{u}\bullet\mathbf{u} + \mathbf{u}\bullet(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v})\bullet\mathbf{u} + (-\mathbf{v})\bullet(-\mathbf{v}) \overset{(2.5.1),(2.5.3)}{=} \\
&= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}$$

vilket skulle visas.



Figur 2.23: Cosinus-satsen.

Sats

Låt $\underline{e} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}]$ *vara en ON-bas i rummet. Om* $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *och* $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *så är*

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Motsvarande formel i planet blir

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Bevis.

Vi vet att

$$\overline{e_i} \cdot \overline{e_j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

så räknelagarna för skalärprodukt ger att

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = (x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3}) \cdot (y_1\overline{e_1} + y_2\overline{e_2} + y_3\overline{e_3}) = x_1y_1\overline{e_1} \cdot \overline{e_1} + x_1y_2\overline{e_1} \cdot \overline{e_2} + x_1y_3\overline{e_1} \cdot \overline{e_3} +$$
$$x_2y_1\overline{e_2} \cdot \overline{e_1} + x_2y_2\overline{e_2} \cdot \overline{e_2} + x_2y_3\overline{e_2} \cdot \overline{e_3} + x_3y_1\overline{e_3} \cdot \overline{e_1} + x_3y_2\overline{e_3} \cdot \overline{e_2} + x_3y_3\overline{e_3} \cdot \overline{e_3} =$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

□

Sats

Låt $\underline{e} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}]$ *vara en ON-bas i rummet. Låt* $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *och* $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

- $\overline{u}$ *har längd* $\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
- *Låt* θ *beteckna vinkeln mellan* $\overline{u}$ *och* $\overline{v}$*. Då gäller att*

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Motsvarande formler i planet fås genom att plocka bort x_3.

Sats

Låt $\underline{e} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}$ *vara en ON-bas i planet. Låt* $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. *Antag att* $x_1, x_2 \neq 0$. *Då finns det precis två vektorer som är vinkelräta mot* $\overline{u}$ *och är lika långa som* $\overline{u}$, *nämligen*

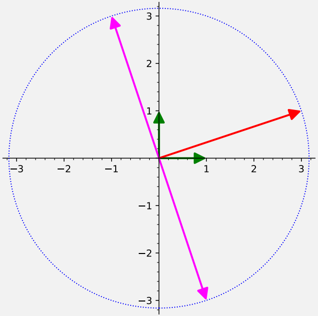
$$\pm\underline{e}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Bevis.

Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 &= 0 \\ y_1^2 + y_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

□



Exempel

Om $\overline{u} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2}$ så är $\|\overline{u}\| = \sqrt{10}$, och de två vektorer av den längden som är ortogonala mot $\overline{u}$ är $-\overline{e_1} + 3\overline{e_2}$ och $\overline{e_1} - 3\overline{e_2}$.
Ekvationssystemet $3y_1 + y_2 = 0$ har lösningsmängden $y_1 = t$, $y_2 = -3t$, så den extra ekvationen $y_1^2 + y_2^2 = 10$ ger att $t^2 + 9t^2 = 10$, så $t = \pm 1$.

Exempel (Regelbunden tetraeder)

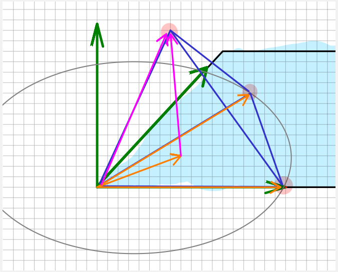
Låt $\overline{u} = \overline{e}_1$, $\overline{v} = \cos(\pi/3)\overline{e}_1 + \sin(\pi/3)\overline{e}_2 = \frac{1}{2}\overline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2$. Då är $\overline{u}, \overline{v}$ kantvektorer i en liksidig triangel med sidlängd ett. Vi söker $\overline{w}$, sista kantvektorn i liksidig tetraeder med föregående triangel som sida.

Vet $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{u} + \frac{1}{3}\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\overline{e}_2$, så $\left\|\overline{OM}\right\|^2 = 1/3$.

Då är $\overline{w} = \overline{OM} + t\overline{e}_3$; bestäm t via

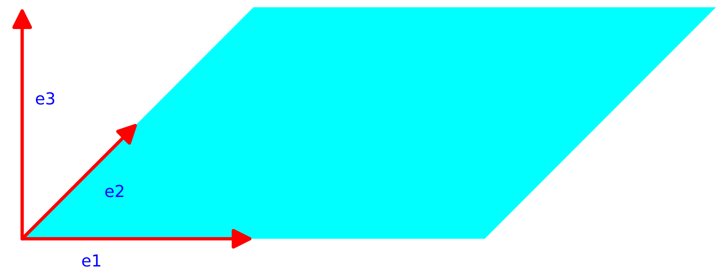
$$\begin{aligned} 1 &= \|\overline{w}\|^2 \\ &= \left\|\overline{OM} + t\overline{e}_3\right\|^2 \\ &\overset{Pytagoras}{=} \left\|\overline{OM}\right\|^2 + \|t\overline{e}_3\|^2 \\ &= 1/3 + t^2 \end{aligned}$$

så $t = \sqrt{2/3}$ och $\overline{w} = \frac{1}{2}\overline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\overline{e}_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\overline{e}_3$.
Hur kan vi mäta vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{w}$?



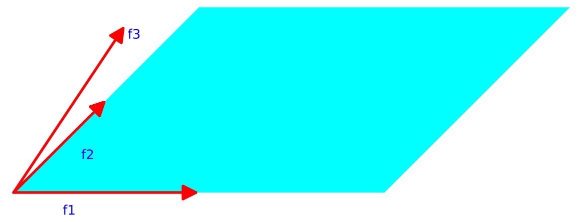
Definition

Låt $\underline{e} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}]$ vara en ON-bas i rummet. Då är $\underline{e}$ en *höger ON-bas* om $\overline{e_2}$ fås från $\overline{e_1}$ via en 90 graders vridning *moturs*, sett från spetsen av $\overline{e}_3$. Om vridningen blir medurs är $\underline{e}$ en *vänster ON-bas*.



Definition

Låt $\underline{e} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}]$ vara en höger-ON och antag att $\underline{f}$ erhållits genom att kontinuerligt deformera $\overline{e_1}$ till $\overline{f_1}$ osv på ett sådant sätt att de tre vektorerna aldrig hamnar i ett plan (de förblir en bas under deformationen). Då är $\underline{f}$ ett *högersystem* (eller en *högerorienterad bas*).



Definition av vektorprodukt

Definition 2.5.11. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två icke-parallella vektorer i rummet och θ vinkeln mellan dem. Vektorprodukten $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är en ny vektor sådan att

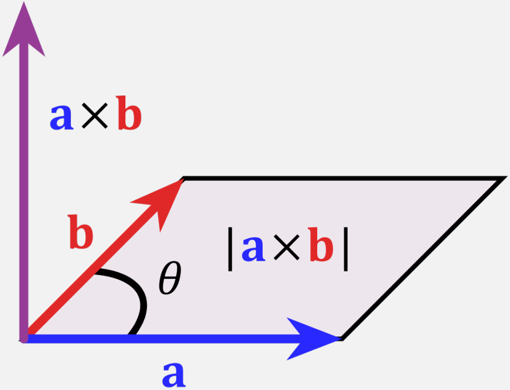
(a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$,

(b) $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\theta$,

(c) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är ett högersystem.

Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella definierar vi $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

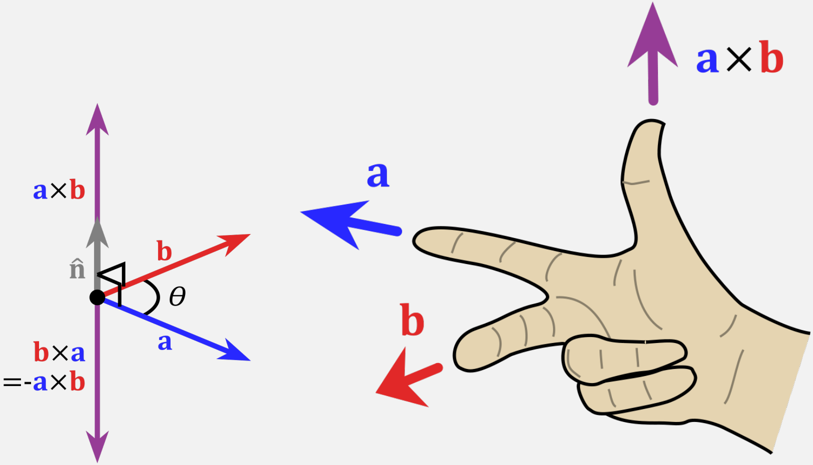
Area av parallellogram



$$\left\| \bar{a} \times \bar{b} \right\| = \|\bar{a}\| \left\|\bar{b}\right\| \sin(\theta)$$

är arean av parallellogrammet spännt av $\bar{a}$ och $\bar{b}$.

Högerhandsregeln



Räkneregler för vektorprodukten

Sats 2.5.12. *För alla vektorer* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *i rummet och skalärer* λ *gäller*

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u} \qquad \textit{(Anti-kommutativa lagen)} \qquad (2.5.11)$$

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w} \qquad \textit{(Distributiva lagen)} \qquad (2.5.12)$$

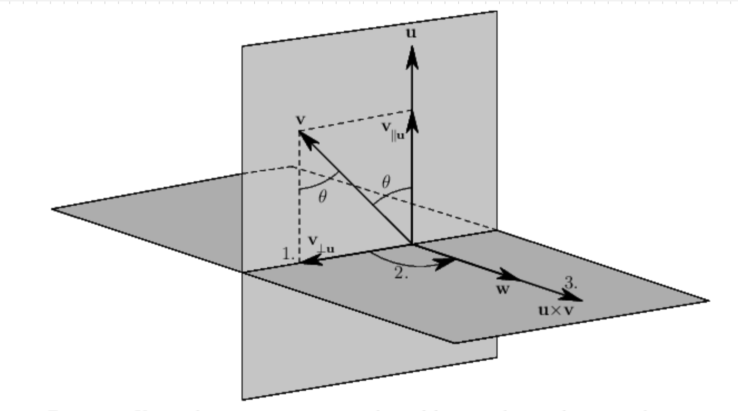
$$(\lambda\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \qquad (2.5.13)$$

Anti-kommutativa lagen självklar, övriga lite knepigare.

Vektorpodukt via projektion, vridning, sträckning

Dela upp bildandet av vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$ som

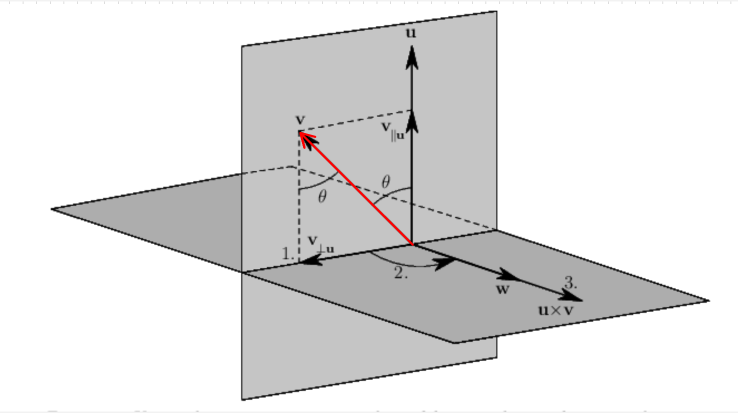
1. Rita planet innehållande $\overline{u}$ och $\overline{v}$
2. Tag $\overline{v}$
3. Projektion av $\overline{v}$ på normalplanet till $\overline{u}$
4. Vridning 90 grader moturs
5. Sträckning med faktor $\|\overline{u}\|$



Vektorprodukt via projektion, vridning, sträckning

Dela upp bildandet av vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$ som

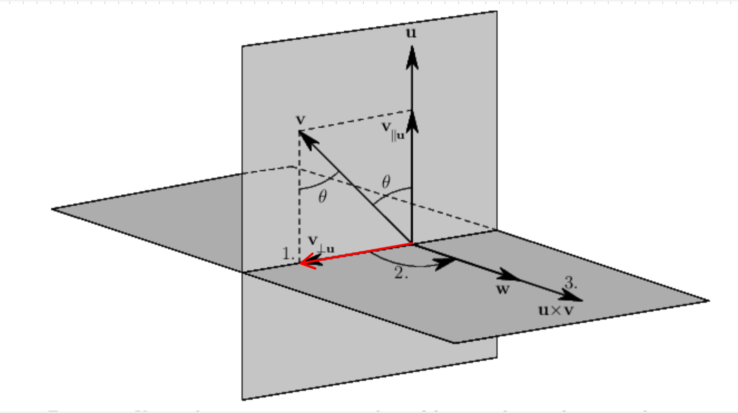
1. Rita planet innehållande $\overline{u}$ och $\overline{v}$
2. Tag $\overline{v}$
3. Projektion av $\overline{v}$ på normalplanet till $\overline{u}$
4. Vridning 90 grader moturs
5. Sträckning med faktor $\|\overline{u}\|$



Vektorpodukt via projektion, vridning, sträckning

Dela upp bildandet av vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$ som

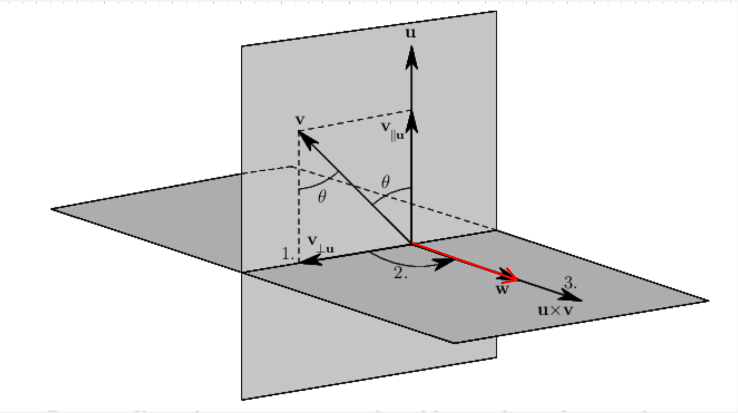
1. Rita planet innehållande $\overline{u}$ och $\overline{v}$
2. Tag $\overline{v}$
3. Projektion av $\overline{v}$ på normalplanet till $\overline{u}$
4. Vridning 90 grader moturs
5. Sträckning med faktor $\|\overline{u}\|$



Vektorpodukt via projektion, vridning, sträckning

Dela upp bildandet av vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$ som

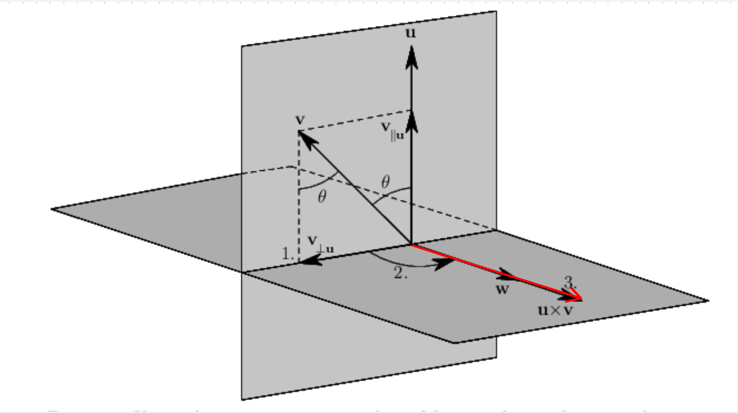
1. Rita planet innehållande $\overline{u}$ och $\overline{v}$
2. Tag $\overline{v}$
3. Projektion av $\overline{v}$ på normalplanet till $\overline{u}$
4. Vridning 90 grader moturs
5. Sträckning med faktor $\|\overline{u}\|$



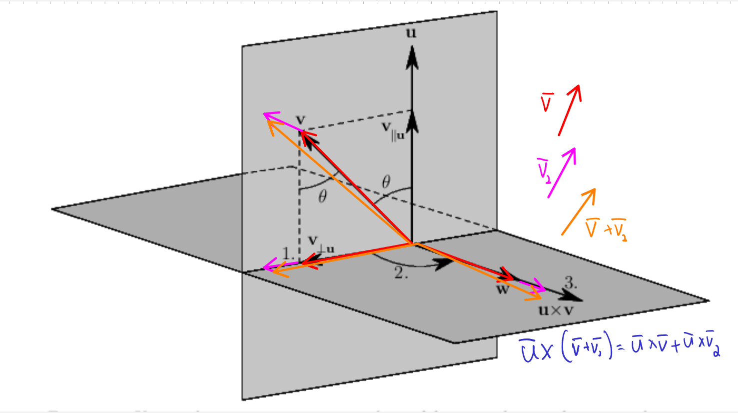
Vektorpodukt via projektion, vridning, sträckning

Dela upp bildandet av vektorprodukten $\overline{u} \times \overline{v}$ som

1. Rita planet innehållande $\overline{u}$ och $\overline{v}$
2. Tag $\overline{v}$
3. Projektion av $\overline{v}$ på normalplanet till $\overline{u}$
4. Vridning 90 grader moturs
5. Sträckning med faktor $\|\overline{u}\|$

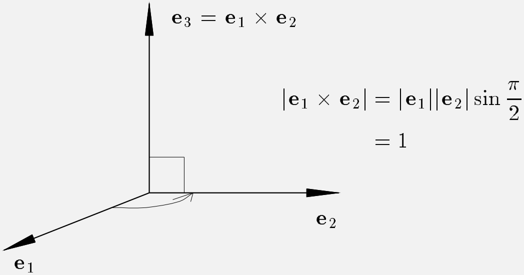


$\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{v}_2) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{v}_2$



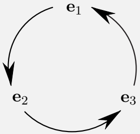
$\bar{u} \times (\bar{v}+\bar{v}_1) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{v}_2$

$\overline{e_1} \times \overline{e_2}$



$$|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| \sin \frac{\pi}{2}$$
$$= 1$$

Vektorprodukten i ON-koordinater



$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \textit{Moturs} & \textit{Medurs} \\ \begin{cases} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \;, \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \;, \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \;, \end{cases} & \begin{array}{l} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \end{array} \end{array} \qquad (2.6.3)$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

Vi kan nu göra precis som för skalärprodukten (jämför (2.6.2))

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \times (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) =$$

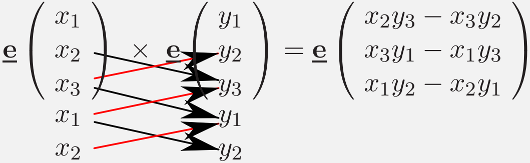
$$= x_1y_1 \underbrace{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{0}} + x_1y_2 \underbrace{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{e}_3} + x_1y_3 \underbrace{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3)}_{=-\mathbf{e}_2} +$$

$$+ x_2y_1 \underbrace{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1)}_{=-\mathbf{e}_3} + x_2y_2 \underbrace{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2)}_{=\mathbf{0}} + x_2y_3 \underbrace{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{e}_1} +$$

$$+ x_3y_1 \underbrace{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}_{=\mathbf{e}_2} + x_3y_2 \underbrace{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2)}_{=-\mathbf{e}_1} + x_3y_3 \underbrace{(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3)}_{=\mathbf{0}} =$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3 = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Minnesregel



$$\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \tag{2.6.4}$$

Exempel

$$\underline{e}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \times \underline{e}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}2\times 6-3\times 5\\-(1\times 6-3\times 4)\\1\times 5-2\times 4\end{bmatrix} = \underline{e}\begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$\underline{e}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \cdot \underline{e}\begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix} = 1\times(-3)+2\times 6+3\times(-3)=0$$

$$\underline{e}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \cdot \underline{e}\begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix} = 4\times(-3)+5\times 6+6\times(-3)=0$$

Exempel

$$\bar{u} = \underline{e} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \underline{e} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Då är $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = \sqrt{3}$, $\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 = \sqrt{3}\sqrt{3}\cos(\alpha)$, så $\cos(\alpha) = 1/3$.
Vi har också att

$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{w} = \underline{e} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\|\bar{w}\| = 2\sqrt{2}$$

Så

$$\|\bar{w}\| = 2\sqrt{2} = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\| \sin(\alpha) = \sqrt{3}\sqrt{3}\sin(\alpha) = 3\sin(\alpha)$$

så $\sin(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Vi ser att $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1/9 + 8/9 = 1$.

Exempel

Antag att $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}$ inte är parallella. Då är

$$(\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{u}}) \times \overline{\mathrm{v}} = \overline{0} \times \overline{\mathrm{v}} = \overline{0} \quad \text{men} \quad \overline{\mathrm{u}} \times (\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}}) = \overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{n}} \neq \overline{0}$$

där $\overline{\mathrm{n}} = \overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}}$ är en vektor vinkelrät mot både $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$, dvs mot hela planet bestående av linjärkombinationer av $\overline{\mathrm{u}}$ och $\overline{\mathrm{v}}$.
Tag tex $\overline{\mathrm{u}} = \overline{\mathrm{e}}_1$, $\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{e}}_2$. Då är

$$\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{e}}_3 \quad \text{och} \quad \overline{\mathrm{u}} \times (\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}}) = \overline{\mathrm{e}}_1 \times \overline{\mathrm{e}}_3 = -\overline{\mathrm{e}}_2$$

Exempel

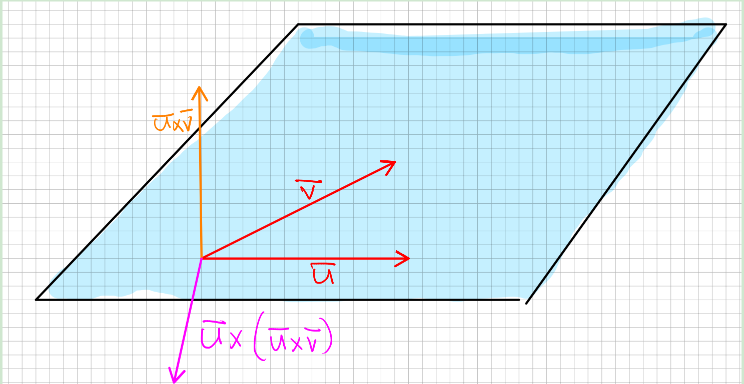
Antag att $\bar{u}, \bar{v}$ inte är parallella. Då är

$$(\bar{u} \times \bar{u}) \times \bar{v} = \bar{0} \times \bar{v} = \bar{0} \quad \text{men} \quad \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{u} \times \bar{n} \neq \bar{0}$$

där $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$ är en vektor vinkelrät mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$, dvs mot hela planet bestående av linjärkombinationer av $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Tag tex $\bar{u} = \bar{e}_1$, $\bar{v} = \bar{e}_2$. Då är

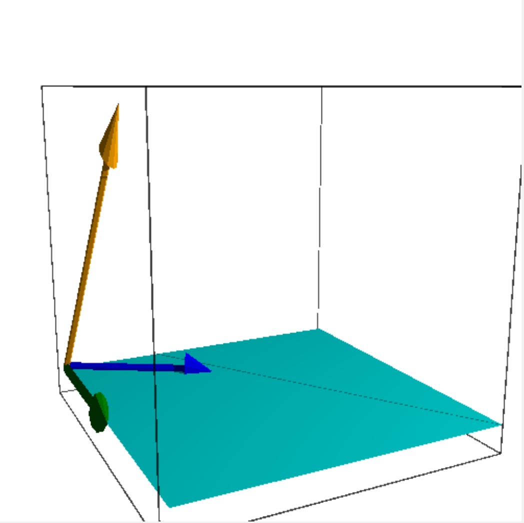
$$\bar{u} \times \bar{v} = \bar{e}_3 \quad \text{och} \quad \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = -\bar{e}_2$$



Exempel

Låt $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{w}}$ vara kantvektorerna i en liksidig triangel, från tidigare exempel. Då är

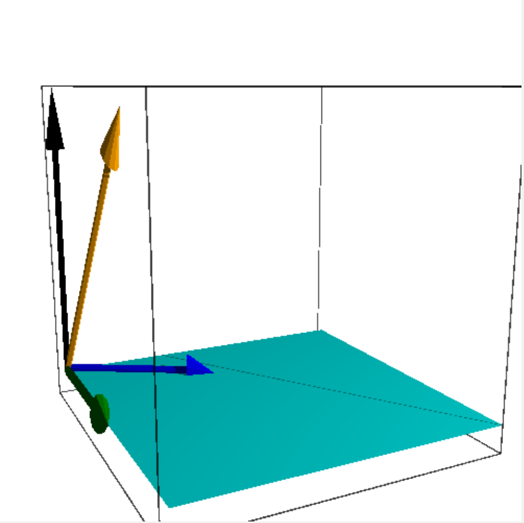
- $\overline{\mathrm{u}} = (1,0,0), \overline{\mathrm{v}} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0), \overline{\mathrm{w}} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$
- $\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}} = (0, 0, \sqrt{3}/2)$
- $(\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}}) \times \overline{\mathrm{w}} = (-1/4, \sqrt{3}/4, 0)$
- $\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{w}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
- $\overline{\mathrm{u}} \times (\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{w}}) = \left(0, \frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$



Exempel

Låt $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{w}}$ vara kantvektorerna i en liksidig triangel, från tidigare exempel. Då är

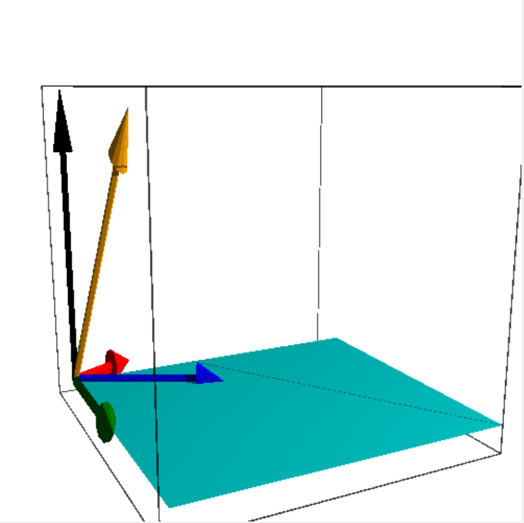
- $\overline{\mathrm{u}} = (1, 0, 0), \overline{\mathrm{v}} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0), \overline{\mathrm{w}} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$
- $\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}} = (0, 0, \sqrt{3}/2)$
- $(\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}}) \times \overline{\mathrm{w}} = (-1/4, \sqrt{3}/4, 0)$
- $\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{w}} = \left(\frac{1}{2}\,\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\right)$
- $\overline{\mathrm{u}} \times (\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\mathrm{w}}) = \left(0, \frac{1}{6}\,\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\,\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$



Exempel

Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara kantvektorerna i en liksidig triangel, från tidigare exempel. Då är

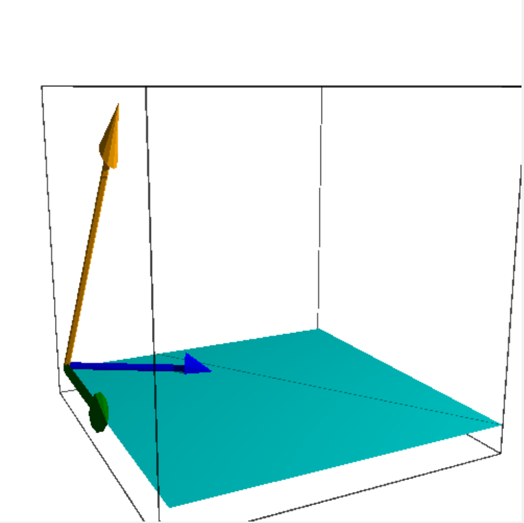
- $\overline{u} = (1,0,0), \overline{v} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0), \overline{w} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$
- $\overline{u} \times \overline{v} = (0, 0, \sqrt{3}/2)$
- $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = (-1/4, \sqrt{3}/4, 0)$
- $\overline{v} \times \overline{w} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
- $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \left(0, \frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$



Exempel

Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara kantvektorerna i en liksidig triangel, från tidigare exempel. Då är

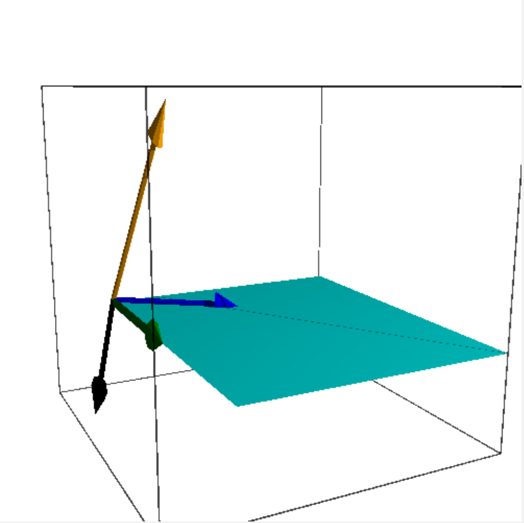
- $\overline{u} = (1, 0, 0), \overline{v} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0), \overline{w} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$
- $\overline{u} \times \overline{v} = (0, 0, \sqrt{3}/2)$
- $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = (-1/4, \sqrt{3}/4, 0)$
- $\overline{v} \times \overline{w} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
- $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \left(0, \frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$



Exempel

Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara kantvektorerna i en liksidig triangel, från tidigare exempel. Då är

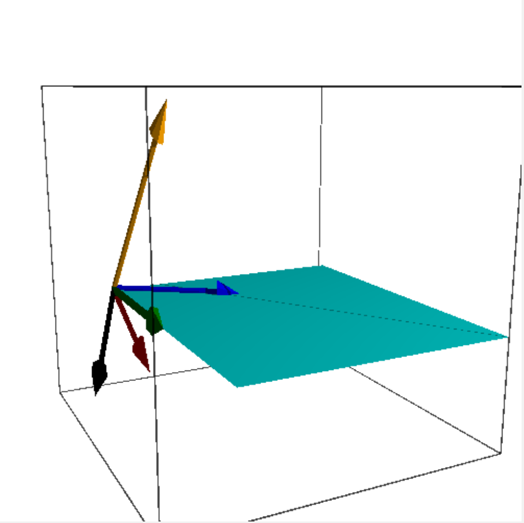
- $\overline{u} = (1, 0, 0), \overline{v} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0), \overline{w} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$
- $\overline{u} \times \overline{v} = (0, 0, \sqrt{3}/2)$
- $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = (-1/4, \sqrt{3}/4, 0)$
- $\overline{v} \times \overline{w} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
- $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \left(0, \frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$



Exempel

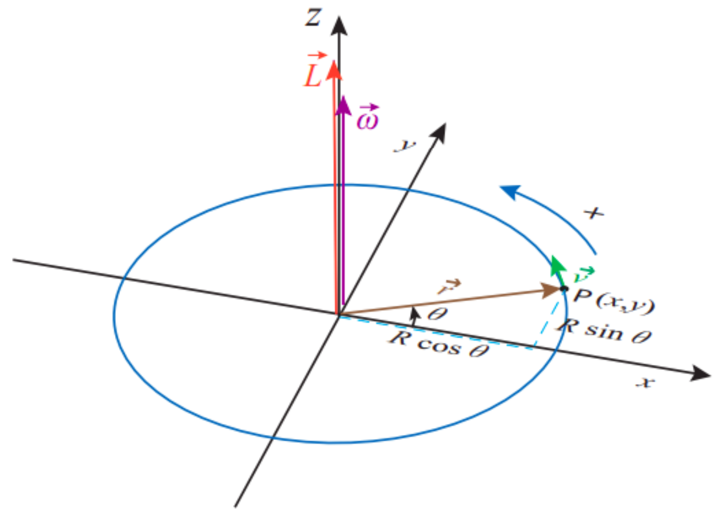
Låt $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vara kantvektorerna i en liksidig triangel, från tidigare exempel. Då är

- $\overline{u} = (1,0,0), \overline{v} = (1/2, \sqrt{3}/2, 0), \overline{w} = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3)$
- $\overline{u} \times \overline{v} = (0, 0, \sqrt{3}/2)$
- $(\overline{u} \times \overline{v}) \times \overline{w} = (-1/4, \sqrt{3}/4, 0)$
- $\overline{v} \times \overline{w} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
- $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = \left(0, \frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$

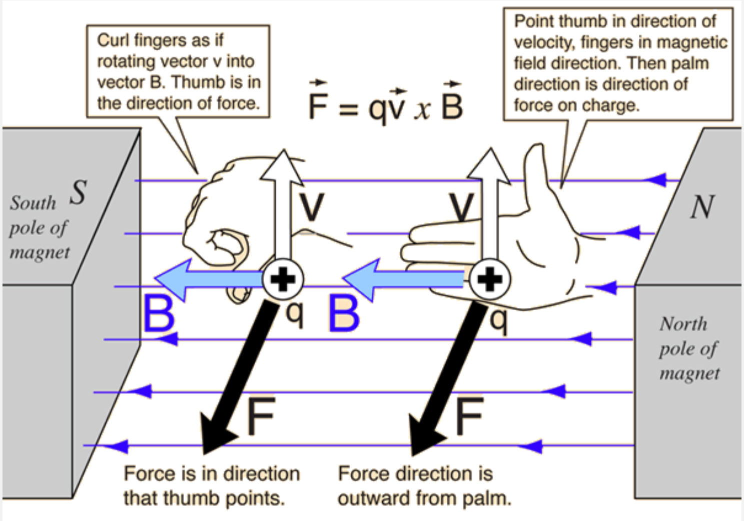


"Angular momentum"

$$L = c\overline{\mathrm{r}} \times \overline{\mathrm{v}}$$



Partikel rör sig i magnetfält, utsätts för kraft



Curl fingers as if rotating vector v into vector B. Thumb is in the direction of force.

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Point thumb in direction of velocity, fingers in magnetic field direction. Then palm direction is direction of force on charge.

Force is in direction that thumb points.

Force direction is outward from palm.

Exempel

Låt $\underline{e}$ vara en höger ON-bas, $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Hitta alla vektorer ortogonala mot såväl $\overline{u}$ som $\overline{v}$.

Med skalärprodukt: ansätt $\overline{w} = \underline{e}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. Eftersom $\overline{w}\cdot\overline{u} = \overline{w}\cdot\overline{v} = 0$ får vi det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_2 + 2x_3 = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1 - x_3 = 0\\ x_2 + 2x_3 = 0\end{cases}$$

som har lösningarna $\overline{w} = t\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Exempel (forts)

Med vektorprodukt: beräkna

$$\overline{u} \times \overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Vi kontrollerar att

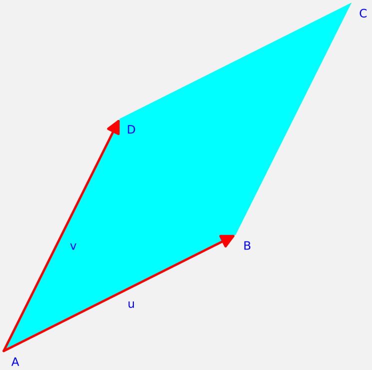
$$\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$$

så den givna vektorn är ortogonal mot $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Varje annan vektor som uppfyller detta är parallell med denna (varför?)

Exempel

Beräkna arean av parallellogrammet *ABCD*, med $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (4, 4)$, $D = (2, 3)$.
Vi bäddar in punkterna i planet $z = 0$ i rummet och inför kantvektorerna $\overline{\mathrm{u}} = \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{AD}}$ och beräknar arean av *ABCD* som

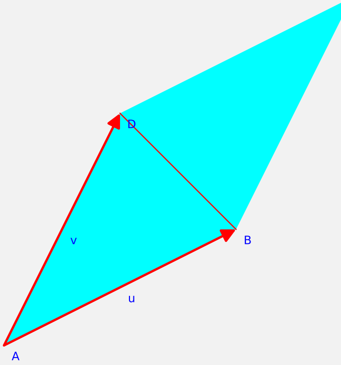
$$\|\overline{\mathrm{u}} \times \overline{\mathrm{v}}\| = \left\| \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 3$$



Exempel

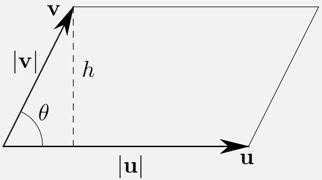
Beräkna arean av triangeln ABD, med $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 2, 2)$, $D = (2, 3, 7)$.
Triangelns area är halva parallellogrammets, så vi får den tilll

$$\frac{1}{2}\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \left\| \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} \right\| = \left\| \underline{e}\begin{pmatrix}4\\-11\\3\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+121+9}$$

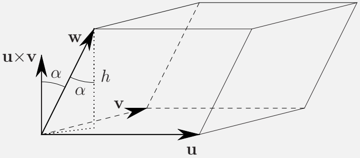


Trippelprodukt

.



Figur 2.29: Area av parallellogram ur kryssprodukt.



Figur 2.30: Volymprodukt.

- Volym $V = \|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}\|$.

Sats 2.7.2. *Om* **u**, **v**, **w** *är tre vektorer i rummet så gäller:*

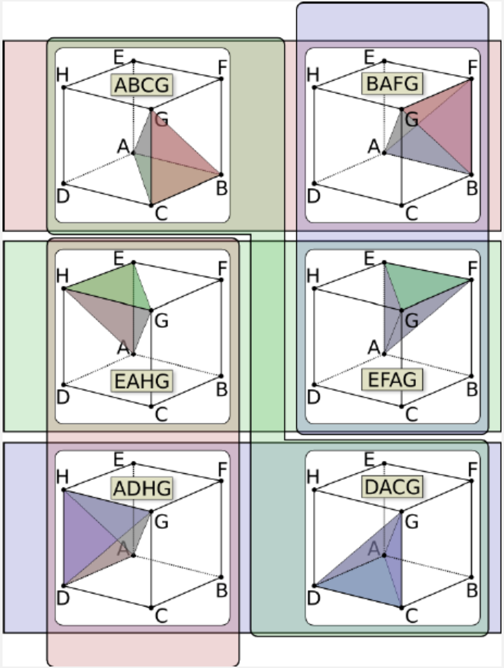
$$\begin{array}{lcll}
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} > 0 & \iff & \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} & \textit{är ett högersystem} \\
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} < 0 & \iff & \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} & \textit{är ett vänstersystem} \\
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} = 0 & \iff & \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} & \textit{ligger i samma plan}
\end{array}$$

-
- Detta kan tas som definition av högersystem (givet att vi vet vad höger-ON-bas betyder).

Exempel

En kub kan sönderläggas i 6 lika tetraedrar. Detsamma gäller för en parallellepiped! Så volymen av en tetraeder med kantvektorer $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ är

$$\frac{1}{6}\, \|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}\| \,.$$



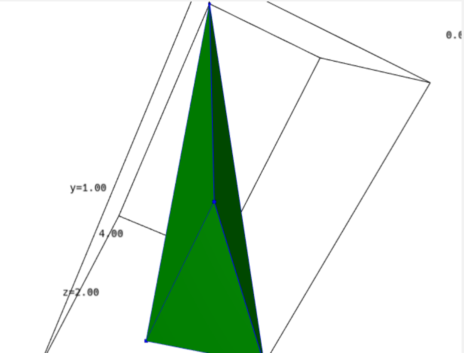
Exempel

Låt

$$\overline{u} = \underline{e}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \overline{v} = \underline{e}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \overline{w} = \underline{e}\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

Då är volymen av tetraedern med kantvektorer $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ lika med

$$\frac{1}{6}\,\|(\overline{u} \times \overline{v}) \cdot \overline{w}\| = \frac{1}{6}\left\|\underline{e}\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix} \cdot \underline{e}\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\| = 2/3$$



Exempel

Låt a vara en reell parameter och låt

$$\bar{\mathrm{u}}_a = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathrm{v}}_a = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathrm{w}}_a = \underline{\mathrm{e}} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vad är volymen av parallellepipeden som $\bar{\mathrm{u}}_a$, $\bar{\mathrm{v}}_a$, $\bar{\mathrm{w}}_a$ spänner upp, och när utgör de tre vektorerna, i denna ordning, ett högersystem?

Exempel (forts)

Vi får att

$$\overline{\mathrm{u}}_a \times \overline{\mathrm{v}}_a = \left(-a^2+1,\, a-1,\, a-1\right)$$

och att trippelprodukten blir

$$(\overline{\mathrm{u}}_a \times \overline{\mathrm{v}}_a) \cdot \overline{\mathrm{w}}_a = -\left(a^2-1\right)a + 2\,a - 2 = -(a+2)(a-1)^2$$

Volymen är beloppet av detta, och uttrycket är positivt (och systemet höger) då $a < -2$.