Definitioner

Matrisoperationer

Blockmatriser

Elementära matriser

Linjära ekvationssystem

Invers

TATA24 Linjär Algebra, Fö 5

Matriser

Jan Snellman[1]

[1]Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Definitioner**
2. Matrisoperationer
   - Matrismultiplikation
   - Räkneregler
   - Identitetsmatris
   - Transponat
3. Blockmatriser
4. Elementära matriser
   - Permutationsmatriser
   - Verkan på kolonner
5. Linjära ekvationssystem
   - Koefficientmatris, högerledsvektor
   - Homogena ekvationssystem
   - Augmenterad matris, trappstegsform
   - Rang
6. Invers
   - Definition av matrisinvers
   - Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
   - Beräkning av invers via radelimination
   - Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Översikt av dagens föreläsning:

1. Definitioner
2. Matrisoperationer
   - Matrismultiplikation
   - Räkneregler
   - Identitetsmatris
   - Transponat
3. Blockmatriser
4. Elementära matriser
   - Permutationsmatriser
   - Verkan på kolonner
5. Linjära ekvationssystem
   - Koefficientmatris, högerledsvektor
   - Homogena ekvationssystem
   - Augmenterad matris, trappstegsform
   - Rang
6. Invers
   - Definition av matrisinvers
   - Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
   - Beräkning av invers via radelimination
   - Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Översikt av dagens föreläsning:

1. Definitioner
2. Matrisoperationer
   - Matrismultiplikation
   - Räkneregler
   - Identitetsmatris
   - Transponat
3. Blockmatriser
4. Elementära matriser
   - Permutationsmatriser
   - Verkan på kolonner
5. Linjära ekvationssystem
   - Koefficientmatris, högerledsvektor
   - Homogena ekvationssystem
   - Augmenterad matris, trappstegsform
   - Rang
6. Invers
   - Definition av matrisinvers
   - Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
   - Beräkning av invers via radelimination
   - Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Definitioner**
2. **Matrisoperationer**
   - Matrismultiplikation
   - Räkneregler
   - Identitetsmatris
   - Transponat
3. **Blockmatriser**
4. **Elementära matriser**
   - Permutationsmatriser
   - Verkan på kolonner
5. **Linjära ekvationssystem**
   - Koefficientmatris, högerledsvektor
   - Homogena ekvationssystem
   - Augmenterad matris, trappstegsform
   - Rang
6. **Invers**
   - Definition av matrisinvers
   - Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
   - Beräkning av invers via radelimination
   - Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Översikt av dagens föreläsning:

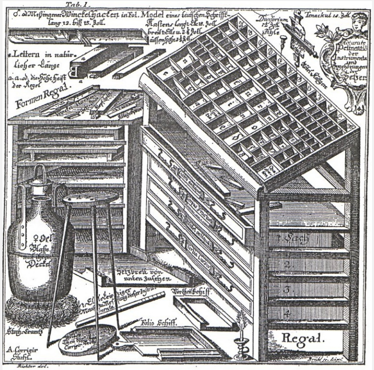
1. **Definitioner**
2. **Matrisoperationer**
   - Matrismultiplikation
   - Räkneregler
   - Identitetsmatris
   - Transponat
3. **Blockmatriser**
4. **Elementära matriser**
   - Permutationsmatriser
   - Verkan på kolonner
5. **Linjära ekvationssystem**
   - Koefficientmatris, högerledsvektor
   - Homogena ekvationssystem
   - Augmenterad matris, trappstegsform
   - Rang
6. **Invers**
   - Definition av matrisinvers
   - Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
   - Beräkning av invers via radelimination
   - Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Definitioner**
2. **Matrisoperationer**
   - Matrismultiplikation
   - Räkneregler
   - Identitetsmatris
   - Transponat
3. **Blockmatriser**
4. **Elementära matriser**
   - Permutationsmatriser
   - Verkan på kolonner
5. **Linjära ekvationssystem**
   - Koefficientmatris, högerledsvektor
   - Homogena ekvationssystem
   - Augmenterad matris, trappstegsform
   - Rang
6. **Invers**
   - Definition av matrisinvers
   - Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
   - Beräkning av invers via radelimination
   - Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Ordets ursprungliga mening

Matris (af lat. *mātrix*, moder), *tekn.*, *boktr.*, i allmänhet hvarje fördjupad form för åstadkommande af gjutna, pressade, präglade m. fl. slags arbeten. I stilgjuteriet utgöres denna form af en kopparbit med delvis polerad yta, hvari den graverade stålstämpeln (*patrisen*, af lat. *pa'ter*, fader) inslås ett stycke från ena ändan. I matrisen fås bokstafsbilden sålunda fördjupad och rättvänd. Matriser kunna billigare erhållas genom galvanoplastisk fällning öfver vanliga tycktyper, och till större stilsorter åstadkommas de vanligen så. Se vidare G a l v a n o t e k n i k, sp. 676—677, K l i c h é och S t e r e o t y p i.



Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Definition 3.2.1. Låt r och k vara heltal ≥ 1. En $r \times k$-matris består av $r \cdot k$ stycken *element*, ordnade i ett rektangulärt schema enligt nedan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix}.$$

Matriselementen är alltså ordnade i r stycken *rader* och k stycken *kolonner*.

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5/7 & 9/3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1/9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

1. $r \times k$ kallas matrisens *format* eller *typ*.

2. Ett element i matrisen betecknas med a_{ij} där i anger i vilken *rad* och j i vilken *kolonn* elementet står.

3. Matriser betecknas i formler och räknelagar med stora latinska bokstäver: A, B, ...

4. Vi inför beteckningen $(a_{ij})_{r \times k}$ som ett mer kompakt skrivsätt för matrisen i definitionen ovan.

5. En $1 \times k$-matris $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \end{pmatrix}$ kallas *radmatris*.

6. En $r \times 1$-matris $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{r1} \end{pmatrix}$ kallas *kolonnmatris*.

7. En $r \times r$-matris, d v s en matris med lika många rader som kolonner, kallas *kvadratisk*.

8. Elementen $a_{11}, a_{22}, \dots$ utgör matrisens *huvuddiagonal* och en kvadratisk matris kallas *diagonal* om alla element som inte står på huvuddiagonalen är 0 , d v s en matris av nedanstående typ är diagonal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7/2 \end{pmatrix}$$

- A är en 2x3-matris, dvs har typ 2×3
- $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ med $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = 7/2$.
- Vi kan skriva $a_{1,2}$ för tydlighets skull om vi vill
- Vi börjar indexeringen från 1, men i vissa sammanhang (datavetenskap) är det vanligt att indexera från 0.
- A består av två rader, vilka är radmatriser: $A_{1,\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ samt $A_{2,\cdot} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7/2 \end{pmatrix}$
- A består av tre kolonner (kolumner): $A_{\cdot,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $A_{\cdot,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ och $A_{\cdot,3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \end{pmatrix}$
- Matrisen bestående av de två första kolonnerna i A är kvadratisk: $A_{1:2,\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- Detta är en diagonalmatris: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Definitioner

Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat

Blockmatriser

Elementära matriser

Linjära ekvationssystem

Invers

Addition och skalning

Definition 3.2.2. (a) **Likhet:** Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ och $B = (b_{ij})_{r\times k}$. Vi säger att $A = B$ om

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{för alla} \quad i,j:\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq k,$$

d v s två matriser är lika om de har samma format och elementen är lika position för position.

(b) **Addition:** Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ och $B = (b_{ij})_{r\times k}$ vara två matriser av *samma format*, $r\times k$. Summan av A och B definieras som

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{r\times k} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+b_{r1} & a_{r2}+b_{r2} & \dots & a_{rk}+b_{rk} \end{pmatrix},$$

d v s matrisernas element adderas position för position.

(c) **Multiplikation med reellt tal:** Låt $A = (a_{ij})_{r\times k}$ och $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkten av λ och A definieras som

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{r\times k} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & \dots & \lambda a_{rk} \end{pmatrix},$$

d v s samtliga matriselement multipliceras med talet λ.

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Då är

$$10A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 35 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1-3 & 2+2 & 3-3 \\ 4-4 & 5+6 & 7/2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 11 & 9/2 \end{pmatrix},$$

$$-B = (-1)B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -11 \end{pmatrix}, \quad A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-2 & 3+3 \\ 4+4 & 5-6 & 7/2-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & -15/2 \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Definition

Låt $A = (a_{ij})_{r \times m}$ vara en $r \times m$-matris och låt $B = (b_{ij})_{m \times k}$ vara en $m \times k$-matris. Då är matrisprodukten $C = AB$ definierad som en $r \times k$-matris $C = (c_{ij})_{r \times k}$ med elementet i rad i, kolonn j givet av

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

Om antalet kolonner i A (radernas längd i A) inte sammanfaller med antalet rader i B (kolonnernas längd i B) så är produkten AB inte definierad.

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Exempel

Om A är en radmatris, B en kolonnmatris, och längden av raden i A är lika med längden av kolonnen i B, så är produkten AB definierad, och resultatet är en 1×1-matris (ofta identifierad med en skalär).
M.a.o så är produkten av en $1 \times n$-matris med en $n \times 1$-matris given av

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots a_{1n}b_{n1} \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

För en produkt mellan $A = (a_{ij})_{r \times m}$ och $B = (b_{ij})_{m \times k}$ så väljer vi, på alla möjliga sätt, en rad från A och en kolonn från B, multiplicerar ihop dem, och placerar resultatet i motsvarande rad och kolonn i C.

Exempel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Elementet i rad 1, kolonn 2 i AB, c_{12}, är produkten av rad 1 från A, och kolonn 2 från B,

$$c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} \end{pmatrix}$$

Vi identifierar den erhållna 1x1-matrisen med en skalär och petar in den i rad 1, kolonn 2.

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

För en produkt mellan en radmatris $A = (a_{1j})_{1\times m}$ och $B = (b_{ij})_{m\times k}$ så multiplicerar vi raden, i tur och ordning, med kolonnerna i B. De resulterande skalärerna placeras i en rad, så resultatet blir en radmatris.

Exempel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix}$$

Här är

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} \\ c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} + a_{14}b_{43} \end{aligned}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Allmänn matris ggr kolonnmatris

För en produkt mellan en $r \times m$-matris $A = (a_{ij})_{r \times m}$ och en kolonnmatris $B = (b_{i1})_{m \times 1}$ så multiplicerar vi varje rad i A med den enda kolonnen i B. Ett alternativt synsätt är att vi bildar en linjärkombination av *kolonnerna i* A.

Exempel

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} + a_{14} b_{41} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} + a_{24} b_{41} \end{pmatrix} \\
&= b_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + b_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + b_{31} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + b_{41} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Allmänn produkt, igen

Vi studerar ånyo en produkt mellan en $r \times m$-matris $A = (a_{ij})_{r \times m}$ och en $m \times k$-matris $B = (b_{ij})_{m \times k}$.
Vi kan multiplicera A med varje kolonn i B, en i taget, och sedan stapla de resulterande k kolonnerna efter varandra:

Exempel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix}$$

med U, V 2×1-kolonnmatriser med

$$U = b_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + b_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + b_{31} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + b_{41} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$$

$$V = b_{12} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + b_{22} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + b_{32} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} + b_{42} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{pmatrix}$$

Sats 3.2.9. Räknelagar för matriser

(a) *Låt A, B, C vara matriser av samma format. För* addition *mellan matriser gäller*

1. $$A + B = B + A \qquad \textit{(Kommutativ lag)}$$
2. $$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \textit{(Associativ lag)}$$
3. *Det finns en matris av varje typ $r \times k$ som kallas nollmatrisen och tecknas 0 sådan att för alla $r \times k$-matriser A gäller*
$$A + 0 = A \qquad \textit{(Neutralt element)}$$
4. *Till varje $r \times k$-matris A finns en $r \times k$-matris A' sådan att*
$$A + A' = 0 \qquad \textit{(Additiv invers)}$$

(b) *För* multiplikation med reella tal *gäller*

1. $$1 \cdot A = A \qquad \textit{(Neutralt tal)}$$
2. $$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \qquad \textit{(Associativ lag)}$$
3. $$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \qquad \textit{(Distributiv lag)}$$
4. $$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad \textit{(Distributiv lag)}$$

för alla matriser A och B av samma format och $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(c) *För* multiplikation *gäller*

1. $$(AB)C = A(BC)$$
2. $$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$
(Associativa lagar)
3. $$A(B + C) = AB + AC$$
4. $$(B + C)A = BA + CA$$
(Distributiva lagar)

för alla $\lambda \in \mathbb{R}$ och alla matriser A, B och C för vilka respektive operationer är definierade.

Definitioner

Matrisoperationer
- Matrismultiplikation
- Räkneregler
- Identitetsmatris
- Transponat

Blockmatriser

Elementära matriser

Linjära ekvationssystem

Invers

Exempel

Vi har att $A+B=B+A$, men inte nödvändigtvis att $AB=BA$.

1. Om A har format $n\times m$ och B format $m\times k$, med $n\neq k$, så är AB definierat, och har format $n\times k$, medan BA inte är definierat.
2. Även om både AB och BA är definierade så behöver inte AB vara lika med BA. Till exempel så

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Definition

För varje positivt heltal n betecknar vi med I_n den $n \times n$-dagonalmatris som har ettor på diagonalen. Om dimensionen är klar från sammanhanget så skriver vi enbart I.

Exempel

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sats

Låt A vara en $m \times k$-matris. Då är $AI_k = I_m A = A$.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definitioner

Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat

Blockmatriser

Elementära matriser

Linjära ekvationssystem

Invers

Sats

Om B är en $n \times n$-matris så att $AB = BA = A$ för alla $n \times n$-matriser, så är $B = I_n$.

Bevis.

Speciellt så $IB = BI = I$, men $IB = B$, så $B = I$. $\square$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Transponat

Definition 3.2.10. Låt $A = \left(a_{ij}\right)_{r\times k}$ vara en $r\times k$-matris. $k\times r$-matrisen $A^t = \left(a^t_{ij}\right)_{k\times r}$ kallas transponatet av A och definieras ur A genom att

$$a^t_{ij} = a_{ji} \quad \text{för alla } i,j: \quad 1 \le i \le r, \quad 1 \le j \le k.$$

Sats 3.2.13. Räknelagar för transponering *För alla matriser A och B, sådana att operationerna nedan är definierade, gäller:*

(a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(b) $(\lambda A)^t = \lambda\left(A^t\right)$ *för alla reella tal* λ

(c) $\left(A^t\right)^t = A$

(d) $(AB)^t = B^t A^t$

Definitioner
Matrisoperationer
Matrismultiplikation
Räkneregler
Identitetsmatris
Transponat
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

Exempel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

med

$$c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{42} \end{pmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42}.$$

Å andra sidan så är

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}$$

med

$$d_{21} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \end{pmatrix} = b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{32}a_{13} + b_{42}a_{14} = c_{12}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

- Vi börjar med en 3×2-matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ och en 3×4-matris

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

- Eftersom radantalet (kolonnlängderna) överensstämmer så kan vi bilda en ny *blockmatris* med A, B som block genom att placera A, B bredvid varandra (går ej att placera dem ovanför varandra) enligt

$$C = (A \quad | \quad B) \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{array}\right).$$

- Vi kan lägga till ännu ett block:

$$D = (A \quad | \quad B \quad | \quad A) \left(\begin{array}{cc|cccc|cc} 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 11 & 12 & 13 & 14 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 15 & 16 & 17 & 18 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

- Vi kan även stapla på höjden, så längde sönderläggningen är kompatibel; vi kan bilda

$$\left(\begin{array}{c} D \\ \hline E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A & B & A \\ \hline \multicolumn{3}{c}{E} \end{array}\right)$$

enbart om

$$E = E_1 \mid E_2 \mid E_3$$

med rätt längder, så att resultat blir

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A & B & A \\ \hline E_1 & E_2 & E_3 \end{array}\right)$$

- Vi kan tex bilda blockmatrisen

$$F = \left(\begin{array}{cc|cccc|cc} 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 11 & 12 & 13 & 14 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 15 & 16 & 17 & 18 & 5 & 6 \\ \hline 4 & 3 & 19 & 20 & 21 & 22 & 14 & 3 \\ 2 & 6 & 23 & 24 & 25 & 26 & 22 & 6 \\ 4 & 3 & 27 & 28 & 29 & 30 & 47 & 3 \end{array}\right)$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers

- Blockindelningen respekteras av matrisoperationer; vi kan beräkna

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 7 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ \hline 7 & 8 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 10 & 11 \end{array}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 68 & 68 & 76 \\ 116 & 132 & 132 & 148 \\ 116 & 132 & 132 & 148 \\ 172 & 196 & 196 & 220 \end{pmatrix}$$

där t.ex

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 41 & 46 \\ 73 & 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 68 \\ 116 & 132 \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Permutationsmatriser
Verkan på kolonner
Linjära ekvationssystem
Invers

Definition

En matris som skiljer sig från identitetsmatrisen i en enda position kallas för en *elementärmatris*. Vi betecknar den matris som har värde c i rad i, kolonn j och i övrigt överensstämmer med I_n med $E_n(i, j, c)$.

Exempel

$$E_3(1,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3(2,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3(2,2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Permutationsmatriser
Verkan på kolonner
Linjära ekvationssystem
Invers

Effekten av multiplikation med elementär matris

Sats

Låt A vara en $r \times k$-matris.

1. $E_r(i,j,c) * A$, *med* $i \neq j$, *är den matris man får när man adderar* c *ggr rad* $A_{j,\cdot}$ *till rad* $A_{i,\cdot}$.
2. $E_r(i,i,c) * A$ *är den matris man får när man multiplicerar rad* $A_{i,\cdot}$ *med* c.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}+4x_{21} & x_{12}+4x_{22} & x_{13}+4x_{23} & x_{14}+4x_{24} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 4x_{11}+x_{21} & 4x_{12}+x_{22} & 4x_{13}+x_{23} & 4x_{14}+x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 4x_{21} & 4x_{22} & 4x_{23} & 4x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Permutationsmatriser
Verkan på kolonner
Linjära ekvationssystem
Invers

Definition

En matris erhållen från identitetsmatrisen I_n genom att byta plats på vissa rader kallas för en *permutationsmatris* av format $n \times n$.
Alternativt är en $n \times n$-permutationsmatris en matris med exakt en etta i varje rad och i varje kolonn, med övriga element noll.

Sats

Om P är en $n \times n$-permutationsmatris och A en $n \times k$-matris så är PA den matris man får när man byter rader i A på samma sätt man bytte rader i enhetsmatrisen I_n för att få till P.

Exempel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 101 & 201 & 301 & 401 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 101 & 201 & 301 & 401 \end{pmatrix}$$

Vi kommer huvudsakligen att använda oss av följande speciella permutationsmatriser:

Definition

Låt $P_n(i,j)$ beteckna den permutationsmatris som fåtts från I_n genom att byta plats på rad i och rad j.

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Permutationsmatriser
Verkan på kolonner
Linjära ekvationssystem
Invers

Effekten av multiplikation med elementär matris från höger

Sats

Låt A vara en $k \times r$-matris.

1. $A * E_r(i,j,c)$, *med* $i \neq j$, *är den matris man får när man adderar* c *ggr kolonn* $A_{\cdot,j}$ *till rad* $A_{\cdot,i}$.
2. $A * E_r(i,i,c)$ *är den matris man får när man multiplicerar kolonn* $A_{\cdot,i}$ *med* c.
3. $A * P_r(i,j)$ *är den matris man får när man byter plats på kolonn* $A_{\cdot,i}$ *och kolonn* $A_{\cdot,j}$.

Exempel

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 4x_{11} + x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 4x_{21} + x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & 4x_{31} + x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 4x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & 4x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & 4x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{13} & x_{12} & x_{14} \\ x_{21} & x_{23} & x_{22} & x_{24} \\ x_{31} & x_{33} & x_{32} & x_{34} \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Vi påminner:

Definition

Ett linjärt ekvationssystem med k ekvationer, i n variabler, är på formen

$$\begin{aligned} \ell_1(x_1, \ldots, x_n) &= b_1 \\ \ell_2(x_1, \ldots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ \ell_k(x_1, \ldots, x_n) &= b_k \end{aligned} \tag{1}$$

med ℓ_j linjärform, d.v.s $\ell_j(x_1, \ldots, x_n) = a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,n}x_n$, och $b_j \in \mathbb{R}$.

Nu inför vi:

Definition

Koefficientmatrisen, *variabelvektorn*, och *högerledsvektorn* till ovanstående system är

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{12} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Sats

Det linjära ekvationssystemet (1) *är ekvivalent med matrisekvationen*

$$AX = B \tag{2}$$

Exempel

Om $k = 2, n = 3$ så får vi att

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Definition

Ett linjärt ekvationssystem där högerledsvektorn består av nollor, d.v.s som ser ut som

$$AX = \overline{0} \tag{3}$$

kallas *homogent*

Sats

Lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem är slutet under addition och skalning, d.v.s om X_1, X_2 *är lösningar till* (3) *och* $c \in \mathbb{R}$ *så gäller att*

$$A(X_1 + X_2) = \overline{0}, \qquad A(cX) = \overline{0}.$$

Bevis.

Enligt räknelagarna så

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$$

och

$$A(cX) = c(AX) = c\overline{0} = \overline{0}$$

□

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Sats

1. *Om X_1, X_2 är två lösningar till $AX = B$ så är $X_1 - X_2$ en lösning till $AX = \overline{0}$.*
2. *Om X_p är en lösning till $AX = B$ och X_h är en lösning till $AX = \overline{0}$ så är $X_p + X_h$ en lösning till $AX = B$.*
3. *Om X_p är en lösning till $AX = B$ så är*

$$\{\,X \,|\, AX = B\,\} = \left\{\, X_p + X_h \,\middle|\, AX_h = \overline{0}\,\right\}$$

Bevis.

1. $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = \overline{0}$.
2. $A(X_p + X_h) = AX_p + AX_h = B + \overline{0} = B$.
3. Kombinera föregående.

□

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

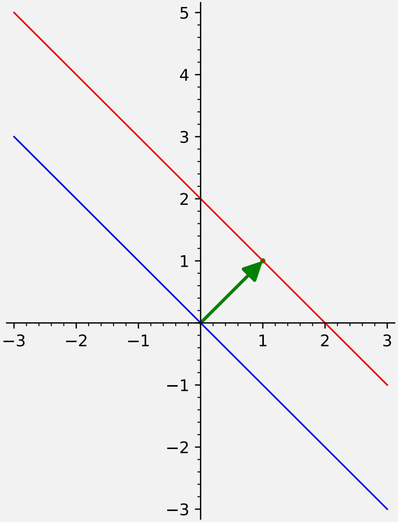
Exempel

Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, så matrisekvationen $AX = B$ är likvärdigt med ekvationssystemet $x + y = 2$. En partikulärlösning är $x = y = 1$.
Det homogena systemet blir $x + y = 0$, vilket har lösningsmängd

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Det inhomogena systemet har lösningsmängd

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 + t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$



Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Definition

Den *augmenterade matrisen* (eller *totalmatrisen*) hörande till det linjära ekvationssystemet $AX = B$ är blockmatrisen $\left(A \;\middle|\; B\right)$

Definition

Matriserna M och N är radekvivalenta om vi kan erhålla N från M genom en kedja av operationer av typen

1. Multiplicera (till vänster) med en elementärmatris
2. Multiplicera (till vänster) med en permutationsmatris (det räcker att använda permutationsmatriser som byter plats på två rader)

Sats

Antag att A, C har samma format. Ekvationssystemen $AX = B$ och $CX = D$ har samma lösningsmängd om och endast om de augmenterade matriserna $\left(A \;\middle|\; B\right)$ och $\left(C \;\middle|\; D\right)$ är radekvivalenta.

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

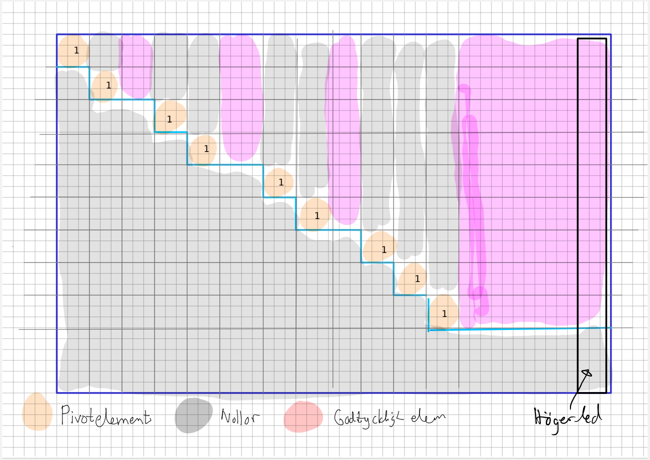
Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Kom ihåg:

Definition

En matris är på reducerad trappstegsform om

1. Varje nollskiljd rad inleds med ett antal nollor (kan vara inga nollor) följt av en etta, ett s.k *pivotelement*
2. Övriga element i den kolumn som pivotelementet befinner sig i är noll.



Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Sats

1. *Varje matris M är radekvivalent med en unik matris på reducerad trappstegsform.*
2. *Om $M = (A \mid B)$ är den augmenterade matrisen som hör till det linjära ekvationssystemet $AX = B$ så finns det alltså en unik matris på reducerad trappstegsform $N = (C \mid D)$ och en (inte unik) matris P som är en produkt av elementära matriser och permutationsmatriser, så att $PM = N$.*
3. *Då är $(PA)X = PB$ ett linjärt ekvationssystem på reducerad trappstegsform som är ekvivalent med $AX = B$.*
4. *$(PA) = 0$ är ett homogent linjärt ekvationssystem som är ekvivalent med $AX = 0$.*

Exempel

Till ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ hör den augmenterade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

där den sista matrisen kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Definition

En matris M har *rank* r om dess reducerade trappstegsform N har r pivotelement, eller m.a.o om N har r nollskiljda rader.

Sats

Låt $N = (A \mid B)$ vara den augmenterade matrisen som hört till det linjära ekvationsssytemet $AX = B$, där A har format $m \times n$, d.v.s det linjära ekvationssystemet har n variabler och m ekvationer. Låt $r = \operatorname{rank}(A)$.

1. *$AX = \overline{0}$ är alltid lösbart; det är unikt lösbart omm $r = n$.*
2. *$AX = B$ är olösbart omm $r < \operatorname{rang}(N)$.*
3. *$AX = B$ är unikt lösbart omm $r = \operatorname{rang}(N) = n$.*
4. *$AX = B$ har oändligt många lösningar omm $r = \operatorname{rang}(N) < n$. I detta fall så beror den allmänna lösningen på $n - r$ parametrar.*

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Koefficientmatris, högerledsvektor
Homogena ekvationssystem
Augmenterad matris, trappstegsform
Rang
Invers

Exempel

Vi studerar

$$AX = \overline{0}, \quad AX = B_1, \quad AX = B_2$$

med $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 22 & 6 \\ 47 & 3 \end{pmatrix}$. A har reducerad trappstegsform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så den har rank 2. Alltså har $AX = \overline{0}$ oändligt många lösningar, som beror på $4 - 2 = 2$ parametrar.
Vi kan se att dessa lösningar är

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exempel (forts)

De inhomogena ekvationssystemen har totalmatriser

$$(A \mid B_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 13 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A \mid B_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så det första systemet saknar lösning, medan det andra systemet har oändligt många lösningar, beroende av två parametrar; det är lösningarna till det homogena, fast translaterade med en partikulärlösning, tex med

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Definition

Låt A vara en $n \times n$-matris. Då är en $n \times n$-matris B *inversen* till A om

$$AB = BA = I_n$$

Vi skriver $B = A^{-1}$.
Matrisen A är *inverterbar* om den har någon invers, och *singulär* annars.

Sats

Matrisinversen är unik om den existerar.

Bevis.

Antag att

$$AB_1 = B_1A = I = AB_2 = B_2A.$$

Då är

$$B_1(AB_1) = B_1(AB_2) \implies (B_1A)B_1 = (B_1A)B_2 \implies IB_1 = IB_2 \implies B_1 = B_2$$

$\square$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Sats

Om $AB = I$ så $BA = I$ dvs $B = A^{-1}$. Om $BA = I$ så $AB = I$ dvs $B = A^{-1}$.

Bevis.

Vi väntar med beviset tills vi introducerat *determinanter*. □

Exempel

Detta gäller ej för oändliga matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

har $BA = I$ men

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Sats

1. $$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{c_n} \end{pmatrix} \textit{ om alla } c_i \neq 0.$$
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad+bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ *om* $ad - bc \neq 0$
3. $E_n(i,j,c)^{-1} = E_n(i,j,-c)$
4. $E_n(i,i,c)^{-1} = E_n(i,i,1/c)$ *om* $c \neq 0$
5. $P_n(i,j)^{-1} = P_n(j,i) = P_n(i,j)$.

Bevis.

Multipliera ihop och se att ni får identitetsmatrisen! □

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Sats

Låt A vara en $n \times n$-matris. Om A är radekvivalent med I så är $(A \mid I) \sim (I \mid B)$ där $B = A^{-1}$.

Bevis.

Det följer att det finns elementära/radbytesmatriser $G_1, \dots, G_N$ så att

$$G_N * \cdots G_2 * G_1 * A = I,$$

G_1 "kodar" första radoperationen, G_2 den andra, o.s.v. Sätt $B = G_N * \cdots G_2 * G_1$, då har vi att $BA = I$.
Enligt "den obevisade satsen" följer att $B = A^{-1}$. $\square$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Exempel

Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ så blir $(A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ och

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

så $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ uppfyller att $BA = I$.
Vi har att

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så $B = A^{-1}$.

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Sats 3.6.2. *Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta:*

(a) *A är inverterbar.*

(b) *Matrisekvationen (ekvationssystemet) $AX = Y$ har entydig lösning för alla $n \times 1$-matriser Y.*

(c) *Matrisekvationen (ekvationssystemet) $AX = 0$ har endast den triviala lösningen, $X = 0$.*

(d) $\operatorname{rang} A = n$.

(e) *A är radekvivalent med enhetsmatrisen.*

Vi kollar på lärobokens bevis för $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

$(a) \implies (b)$

Bevis: (a) $\iff$ (b): Om A har en invers och $AX = Y$ så ger multiplikation med A^{-1} att

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}Y \\ &= (A^{-1}A)X = IX = X, \end{aligned}$$

d v s *om* ekvationen har en lösning så är $X = A^{-1}Y$ den enda möjliga.
Insättning av $X = A^{-1}Y$ ger

$$A(A^{-1}Y) = (AA^{-1})Y = IY = Y,$$

d v s $X = A^{-1}Y$ *är* lösningen.

Definitioner

Matrisoperationer

Blockmatriser

Elementära matriser

Linjära ekvationssystem

Invers

Definition av matrisinvers

Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser

Beräkning av invers via radelimination

Matrisinvers och linjära ekvationssystem

$(b) \implies (a)$

Omvänt, låt Y_1 vara första kolonnen i I , Y_2 den andra, etc. Låt $X_1, X_2 \ldots, X_n$ vara de entydiga lösningarna till $AX = Y_1$, $AX = Y_2$ respektive $AX = Y_n$ och låt B vara matrisen med X_1, $X_2, \ldots X_n$ som kolonner. Då fås

$$AB = A\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ AX_1 & AX_2 & \ldots & AX_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I \tag{3.6.1}$$

d v s $AB = I$. Följaktligen är A inverterbar om vi kan visa att också $BA = I$.

Om X och Y är $n \times k$-matriser kan matrisekvationen $AX = Y$ ses som k stycken ekvationssystem $AX_1 = Y_1, \ldots, AX_k = Y_k$, på samma sätt som ovan. Då vart och ett av dessa är entydigt lösbart följer det att matrisekvationen $AX = Y$ är entydigt lösbar för alla $n \times k$-matriser Y. Betrakta därför matrisekvationen $AX = A$. Enligt föregående

resonemang är denna entydigt lösbar och lösningen är förstås $X = I$. Då insättning av $X = BA$ ger

$$A(BA) = (AB)A = IA = A$$

är även BA en lösning. Då $X = I$ var den entydiga lösningen följer det att $BA = I$.

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Exempel

Låt som tidigare $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Vi sätter

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och låter X_1, X_2 vara (de unika) lösningarna till $AX_1 = Y_1$, $AX_2 = Y_2$, vilket ger

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Då blir

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

och det gäller att

$$AB = BA = I.$$

Definitioner
Matrisoperationer
Blockmatriser
Elementära matriser
Linjära ekvationssystem
Invers
Definition av matrisinvers
Inverser av diagonala, 2x2, elementära matriser
Beräkning av invers via radelimination
Matrisinvers och linjära ekvationssystem

Exempel

Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Då har ekvationssystemet $AX = H$, dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2\,x_2 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

den unika lösningen $X = A^{-1}H$, dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$