TATA24 Linjär Algebra, Fö 7-8

Linjärt oberoende, linjärt hölje, dimension

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

1. **Linjärkombination, linjärt hölje**
2. **Linjärt (o)beroende**
3. Baser, dimension
4. Direkt summa av vektorrum

Översikt av dagens föreläsning:

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Översikt av dagens föreläsning:

1. Linjärkombination, linjärt hölje
2. Linjärt (o)beroende
3. Baser, dimension
4. Direkt summa av vektorrum

Definition 5.3.8. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{V}$.
Låt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Då kallas

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

en *linjärkombination* av M.
Mängden av *alla* linjärkombinationer av M kallas *linjära höljet* av M och betecknas $[M]$ alternativt $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Anmärkning

Jag kommer att använda $\mathtt{span}(M) = \mathtt{span}(\overline{\mathtt{v}_1}, \ldots, \overline{\mathtt{v}_\mathtt{n}})$

Vi listar nedan några enkla fakta och ytterligare begrepp angående linjärkombinationer och linjära höljen.

(a) Då $\mathbb{V}$ är ett vektorrum gäller $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$.

(b) Låt $\lambda \in \mathbb{R}$ och låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara två linjärkombinationer av $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Då är även $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\lambda\mathbf{u}$ linjärkombinationer av M, d v s $\mathbf{u}+\mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ som därmed är ett underrum av $\mathbb{V}$ enligt sats 5.3.2.

(c) $[M]$ är det *minsta* underrum av $\mathbb{V}$ som innehåller $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Det är minst i den meningen att om ett annat underrum $\mathbb{U}$ innehåller de enskilda elementen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ så innehåller $\mathbb{U}$ hela $[M]$.

(d) Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av $\mathbb{V}$. Om det finns $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{U}$ så att $\mathbb{U} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ så säges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *spänna upp* eller *generera* $\mathbb{U}$.

(e) Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum. Om det finns $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ så att $\mathbb{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ så säges $\mathbb{V}$ vara *ändligt genererat*.

Exempel

Vektorrummet $\mathbb{R}^4$ spänns upp av

$$(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1).$$

Låt $M = \operatorname{span}(\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{w}}) \leq \mathbb{R}^4$, där $\overline{\mathrm{u}} = (1,2,3,4)$, $\overline{\mathrm{v}} = (1,0,1,1)$, $\overline{\mathrm{w}} = (2,2,4,5)$. Är M hela $\mathbb{R}^4$? Om inte, hur mycket av $\mathbb{R}^4$ spänner M upp? Kan M spännas upp av färre element?
Vi bildar den augmenterade matrisen med vektorerna ovan som radvektorer, och eliminierar tills vi får en trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta visar att M kan spännas upp av två vektorer.

Exempel (forts)

För att se vad vektorerna spänner upp, studerar vi ekvationen

$$c_1\overline{\mathrm{u}} + c_2\overline{\mathrm{v}} + c_3\overline{\mathrm{w}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

och undersöker om det finns villkor på högerledsvektorn för att den skall kunna uttryckas som en linjärkombination av $\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}, \overline{\mathrm{w}}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 0 & 2 & x_2 \\ 3 & 1 & 4 & x_3 \\ 4 & 1 & 5 & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -2 & -2 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & -2 & -3x_1 + x_3 \\ 0 & -3 & -3 & -4x_1 + x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

Vi ser att för att (x_1, x_2, x_3, x_4) skall ligga i $\mathtt{span}(M)$ så måste

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 0 = -x_1 - \frac{3}{2}x_3 + x_4$$

Så $\mathtt{span}(M)$ är inte hela $\mathbb{R}^4$.

Definition

Låt V vara ett vektorrum och låt $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m \in V$.

1. *Beroendeekvationen* för $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m$ är
$$c_1\overline{u}_1 + \cdots + c_m\overline{u}_m = \overline{0}, \quad c_j \in \mathbb{R} \tag{1}$$
2. Lösningsrummet till (1) är *rummet av linjära beroenden* mellan $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m$. Vi betraktar detta som ett delrum till $\mathbb{R}^m$ genom att införa tuppeln $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)$.
3. Om rummet av linjära beroenden är trivialt, dvs enda lösningen till (1) är $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$, så sägs vektorerna $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m$ vara *linjärt oberoende*.
4. Om lösningsrummet innehåller nollskiljda tuppler, dvs om (1) har icke-triviala lösningar, så är varje sådan ett linjärt beroende (eller samband) mellan vektorerna $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m$, vilka då är linjärt beroende.

Exempel (forts)

Tag samma $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ som tidigare och ställ upp beroendeekvationen

$$c_1\overline{u} + c_2\overline{v} + c_3\overline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi eliminiear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det finns oändligt många lösningar; vi sätter $c_3 = t$, $c_2 = -t$, $c_1 = t$. Om vi till exempel tar $t = 1$ så har vi $c_3 = 1$, $c_2 = -1$, $c_1 = 1$ så får vi det linjära beroendet

$$1\overline{u} - 1\overline{v} + 1\overline{w} = \overline{0}$$

som tex låter oss lösa ut

$$\overline{u} = \overline{v} - \overline{w}.$$

Mängden $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ är *linjärt beroende*.

Lemma

Låt V vara ett vektorrum och låt $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m \in V$.

1. *Om*

$$u_j \in \mathrm{span}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{j-1}, \overline{u}_{j+1}, \ldots, \overline{u}_m)$$

   så är $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m$ linjärt beroende.

2. *Omvänt, om $\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_m$ är linjärt beroende, så gäller för något j att*

$$u_j \in \mathrm{span}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{j-1}, \overline{u}_{j+1}, \ldots, \overline{u}_m)$$

Bevis.

1. Om

$$\overline{u}_j = c_1\overline{u_1} + \cdots + c_{j-1}\overline{u}_{j-1} + c_{j+1}\overline{u}_{j+1} + \cdots + c_m\overline{u}_m$$

   så

$$c_1\overline{u_1} + \cdots + c_{j-1}\overline{u}_{j-1} - \overline{u}_j + c_{j+1}\overline{u}_{j+1} + \cdots + c_m\overline{u}_m = \overline{0}$$

2. Om

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\overline{u}_k = \overline{0},$$

   och något $c_j \neq 0$, så

$$\overline{u}_j = \frac{1}{-c_j} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ k \neq j}} c_k\overline{u}_k$$

$\square$

Exempel (forts)

Med $\overline{u} = (1,2,3,4)$, $\overline{v} = (1,0,1,1)$, $\overline{w} = (2,2,4,5)$ så såg vi att

$$\overline{u} - \overline{v} + \overline{w} = \overline{0}.$$

I detta fall kan *vilken som helst* av vektorerna (bara en dock) strykas utan att det linjära höljet krymper.

Exempel

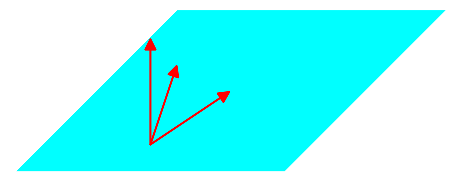
Om $\overline{u} = (1,1,0,0)$, $\overline{v} = (1,1,1,1)$, $\overline{w} = (2,2,2,2)$ så har vi den enda (upp till skalning) linjära relationen

$$2\overline{v} - \overline{w} = \overline{0}$$

så vi kan stryka antingen $\overline{v}$ eller $\overline{w}$, men inte $\overline{u}$, om $\mathrm{span}(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ skall förbli oförändrad.

Exempel

- Mängden $\{\overline{0}\}$ är alltid linjärt beroende, eftersom $1\overline{0} = \overline{0}$. Mer allmänt så är varje mängd som innehåller $\overline{0}$ linjärt beroende.
- Mängden $\{\overline{u}, \overline{v}\}$ är linjärt beroende om och endast om $\overline{u}$ och $\overline{v}$ är parallella.
- Tre vektorer är linjärt beroende om och endast om de ligger i något plan:



Exempel

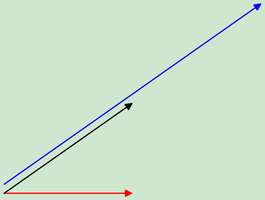
- Läroboken kallar $\overline{u}_j$ så att

$$u_j \in \mathrm{span}(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{j-1}, \overline{u}_{j+1}, \ldots, \overline{u}_m)$$

för "löjligt element". Det finns nästan alltid flera. Om vi tar

$$\overline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{2}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \overline{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

så har vi ett linjärt beroende $\overline{u}_3 = 2\overline{u}_2$ involverande endast de två sista vektorerna. Såväl $\overline{u}_2$ som $\overline{u}_3$ kan väljas som "löjligt element" och strykas från $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ utan att det linjära höljet minskar. Dock kan inte båda strykas! Vektorn $\overline{u}_1$ är inte beroende av de övriga och kan inte strykas utan att det linjära höljet krymper.



Exempel

Vi illustrerar hur Gausseliminering kan användas för att undersöka

- Linjärt hölje
- Linjärt beroende
- Minimal uppspännande mängd.

Sätt

$$\begin{aligned} \overline{u}_1 &= (2, 3, 4, 5, 6) \\ \overline{u}_2 &= (3, 4, 5, 6, 7) \\ \overline{u}_3 &= (4, 5, 6, 7, 8) \\ \overline{u}_4 &= (5, 6, 7, 8, 9) \end{aligned}$$

och låt $M = \mathrm{span}(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4)$. Vi kan som tidiare beräkna en minimal uppspännande mängd för M genom att sätta in vektorerna som **rader** i en matris och sedan eliminera:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

Vi kan *i en och samma beräkning* hitta linjära beroenden, löjliga element, och ange en uppspännande mängd som är en delmängd till den ursprungliga uppspännande mängden. Dessutom så får vi ut ett antal *linjära villkor* som skär ut M som ett delrum till $\mathbb{R}^5$.
För att uppnå detta så låter vi A vara matrisen vars **kolonner** är vektorerna, och sedan löser vi samtidigt $AX = 0$ och $AX = H$ där H är en generisk högerledsvektor.

I vårt fall så augmenterar vi $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ och får

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & x_0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & x_1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & x_2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & x_3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -4x_0 + 3x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3x_0 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 - 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_0 - 3x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_0 - 4x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

Först begränsar vi oss till beroendeekvationen $AX = 0$, vars lösningar (vi kallar variablerna för c_0, c_1, c_2, c_3, bli inte förvirrad!) vi utläser från

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi får att

$$c_0 - c_2 - c_3 = 0$$
$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

så vi sätter $c_2 = r$, $c_3 = s$, $c_0 = r + s$, $c_1 = -2r - 3s$.
Genom att lösa $r + s = 1, -2r - 3s = 0$ och få det till $r = 3, s = -2$ ser vi att vi har

$$1\overline{u}_1 + 0\overline{u}_2 + 3\overline{u}_3 - 2\overline{u}_4 = \overline{0}$$

så

$$\overline{u}_1 = -3\overline{u}_3 + 2\overline{u}_4 \in \mathrm{span}(\overline{u}_3, \overline{u}_4).$$

Exempel (forts)

På liknande sätt får vi genom att ta $r = 1, s = -1$ att

$$0\overline{u}_1 + 1\overline{u}_2 + 1\overline{u}_3 - 1\overline{u}_4 = \overline{0}$$

så

$$\overline{u}_2 = -\overline{u}_3 + \overline{u}_4 \in \mathtt{span}(\overline{u_3}, \overline{u}_4).$$

Vi kan alltså stryka de “löjliga elementen” $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ och får den minimala uppspännande mängden $\{\overline{u}_3, \overline{u}_4\}$.
(Vi kan vara helt säkra på att det inte går att stryka något mer eftersom $\{\overline{u}_3, \overline{u}_4\}$ är linjärt oberoende eftersom $\overline{u}_3$ och $\overline{u}_4$ inte är parallella.)

Exempel

Slutligen så tittar vi på ekvationen $AX = H$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -4x_0 + 3x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3x_0 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 - 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_0 - 3x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_0 - 4x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

och observerar att vi har tre ekvationer med noll-vänsterled; dessa måste också ha noll i högerledet för att ekvationssystemet skall vara lösbart. En vektor $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5$ måste alltså uppfylla

$$\begin{aligned} x_0 - 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 - 3x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_0 - 4x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

för att tillhöra M.
Dessa *definierande ekvationer* är bra att ha om vi vill *snitta* det linjära höljet $\mathrm{span}(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4)$ med något annat delrum till $\mathbb{R}^5$.

Exempel

Bestäm linjära höljet till följande mängder av vektorer, och avgör om de är linjärt oberoende:

1. $\{1+x, 2-x^2, 3+x+x^2, x^2+x\} \subset P_2$
2. Matriserna $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$
3. Funktionerna $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{3}{2}\sin(x+\pi/3)$
4. De geometriska vektorerna $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{u} \times \bar{v}$ om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ inte är parallella
5. De geometriska vektorerna $\bar{u} \times \bar{v}$, $\bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v})$, $(\bar{u} \times \bar{u}) \times \bar{v}$, om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ inte är parallella
6. Två olika kantvektorer i en triangel
7. Alla tre kantvektorer i en triangel
8. Tre olika kantvektorer i en tetraeder

Definition

Låt V vara ett vektorrum. En (ändlig) delmängd $M \subset V$ sägs vara en *bas* för V om

1. M är linjärt oberoende,
2. $\mathtt{span}(M) = V$.

Om vi ordnar elementen in M, dvs anger vilket som är första element osv, dvs skriver $M = \{\overline{\mathrm{v}}_1, \dots, \overline{\mathrm{v}}_n\}$, så får vi en *ordnad bas*. I detta fall skriver vi också $\underline{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{v}}_1 & \dots & \overline{\mathrm{v}}_n \end{pmatrix}$ för att ange att M skall ses som en generaliserad radmatris.

Anmärkning

Läroboken använder $[\overline{\mathrm{v}}_1, \dots, \overline{\mathrm{v}}_n]$ för det linjära höljet.

Sats

Om $\underline{\mathrm{M}} = [\overline{\mathrm{v}}_1, \dots, \overline{\mathrm{v}}_n]$ *är en ordnad bas till* V *och* $\overline{\mathrm{u}} \in V$ *så finns det unikt bestämda koordinater för* $\overline{\mathrm{u}}$ *m.a.p.* $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ *så att*

$$\overline{\mathrm{u}} = c_1\overline{\mathrm{v}}_1 + \dots + c_n\overline{\mathrm{v}}_n.$$

Bevis.

Eftersom $\mathtt{span}(M) = V$ så kan $\overline{\mathrm{u}} \in V$ skrivas som *någon* linjärkombination

$$\overline{\mathrm{u}} = c_1\overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots + c_n\overline{\mathrm{v}}_n.$$

Vi vill visa att det är det *enda sättet*, så anta att det vi har en annan linjärkombination

$$\overline{\mathrm{u}} = d_1\overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots + d_n\overline{\mathrm{v}}_n.$$

Genom att subtrahera får vi

$$\overline{0} = \overline{\mathrm{u}} - \overline{\mathrm{u}} = c_1\overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots + c_n\overline{\mathrm{v}}_n - (d_1\overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots + d_n\overline{\mathrm{v}}_n) = (c_1 - d_1)\overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots (c_n - d_n)\overline{\mathrm{v_n}}$$

Eftersom M är linjärt oberoende så finns det endast triviala beroenden mellan elementen in M, så

$$c_1 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0,$$

d.v.s. den “nya” linjärkombinationen var i själva verket identisk med den ursrpungliga. $\square$

Definition

Låt $\underline{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{v}}_1 & \ldots & \overline{\mathrm{v}}_n \end{pmatrix}$ vara en ordnad bas för vektorrummet V, och låt $\overline{\mathrm{u}} \in V$. Skriv

$$\overline{\mathrm{u}} = x_1 \overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots + x_n \overline{\mathrm{v}}_n.$$

Då är $x_1, \ldots, x_n$ *koordinaterna* för $\overline{\mathrm{u}}$ m.a.p $\underline{\mathrm{M}}$. Vi samlar ihop koordinaterna i en *koordinatvektor*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

och kan kortfattat skriva

$$\overline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{M}} X = \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{v}}_1 & \ldots & \overline{\mathrm{v}}_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \overline{\mathrm{v}}_1 + \cdots + x_n \overline{\mathrm{v}}_n.$$

Exempel

En poäng med en ordnad bas $\underline{e}$ till V är att varje vektor $\overline{u} \in V$ kan identifieras med sin koordinatvektor $X \in \mathbb{R}^n$. I $\mathbb{R}^n$ kan vi räkna fritt och obehindrat!
Som ett exempel, tag polynomen

$$f(x) = x^2 - 3x + 5, \quad g(x) = 2x^2 + x + 3.$$

Är någon linjärkombination av dessa ett konstant polynom?

Vi inför den ordnade basen $\underline{e} = [x^2, x, 1]$ för P_2. Koordinatvektorerna blir $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, och vi börjar med att plocka fram ett villkor för att ett allmänt polynom $ax^2 + bx + c$, med koordinatvektor (a, b, c), skall ligga i det linjära höljet spännt av dessa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -3 & 1 & b \\ 5 & 3 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 3a+b \\ 0 & -7 & -5a+c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & 3a+b \\ 0 & 0 & -2a+b+c \end{bmatrix}$$

Så (a, b, c) måste uppfylla $2a = b + c$, men om polynomet skall vara konstant så skall dessutom $a = b = 0$, vilket ger $c = 0$. Så det finns ingen linjärkombination av $f(x)$ och $g(x)$ som är ett (nollskiljt) konstant polynom.

Sats

Antag att V är ett vektorrum med en ordnad bas $\underline{\mathrm{M}} = (\overline{\mathrm{v}}_1 \quad \ldots \quad \overline{\mathrm{v}}_n)$. Antag vidare att $L = \{\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_s\}$ med $s > n$. Då är L linjärt beroende.

Bevis.

Vi kallar koordinatvektorn för $\overline{\mathrm{u}}_j$ m.a.p. $\underline{\mathrm{M}}$ för Y_j, och bildar matrisen Y vars j:e kolumn är Y_j. Beroendeekvationen

$$c_1\overline{\mathrm{u}}_1 + \cdots + c_s\overline{\mathrm{u}}_s = \overline{0}$$

överförs då till matrisekvationen

$$YC = 0.$$

Eftersom Y är $n \times c$ med $n < c$ så kommer den reducerade trappstegsformen att ha åtminstone en nollrad, varför det homogena ekvationssystemet har oändligt många lösningar. Det finns alltså (oänligt många) icke-triviala linjära samband mellan vektorerna $\overline{\mathrm{u}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_s$. $\square$

Exempel

Vi studerar det fyra vektorerna

$$(2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7) \in \mathbb{R}^3$$

Beroendeekvationen

$$c_1 (2, 3, 4) + c_2 (3, 4, 5) + c_3 (4, 5, 6) + c_4 (5, 6, 7) = \overline{0}$$

blir på matrisform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exempel (forts)

Vi skriver den på tablåform och eliminerar till trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen är

$$c_3 = r,\ c_4 = s,\ c_2 = -2r - 3s,\ c_1 = r + 2s$$

så om vi tex tar $r = s = 1$ så får vi det icke-triviala sambandet

$$3\,(2,\,3,\,4) + (-5)\,(3,\,4,\,5) + (4,\,5,\,6) + (5,\,6,\,7) = \overline{0}$$

Sats

Om V är ett vektorrum och $\underline{e} = (\bar{e}_1 \quad \ldots \quad \bar{e}_n)$ är en (ordnad) bas till V, så har varje annan bas till V precis n element.

Bevis.

Låt $\underline{f} = (\overline{v}_1 \quad \ldots \quad \overline{v}_m)$ vara en bas till V. Om $m > n$ så är enligt föregående sats $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_m\}$ linjärt beroende, en motsägelse.
Om $m < n$ så är på samma sätt $\{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}$ linjärt beroende, en motsägelse. $\square$

Definition

Vi kallar antalet element i en bas för vektorrummet V för dess *dimension*, och betecknar det $\mathrm{dim}(V)$.

Några vanliga vektorrum och deras dimension

Exempel

- $\dim(R^n) = n$
- $\dim(\mathrm{G}^2) = 2$
- $\dim(\mathrm{G}^3) = 3$
- $\dim(\mathrm{Mat}_{m,n}) = mn$
- $\dim(\mathrm{P}_n) = n + 1$
- Låt A vara en $1 \times n$ radmatris, och anta att $A \neq 0$. Då har det linjära ekvationssystemet $AX = 0$ ett lösningsrum av dimension $n - 1$.

Sats (Fyll ut)

Antag att $\dim(V) = n$. *Antag vidare att* $M = \{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m\}$, *med* $m < n$. *Sätt* $U = \mathrm{span}(M)$.

1. $U \subsetneq V$,
2. $\dim(U) \le m$, *med likhet omm M linjärt oberoende.*
3. *Vi kan välja ut* $\dim(U)$ *vektorer från M så att de bildar en bas (för U).*
4. *Om* $\overline{v} \in V \setminus U$ *så* $\dim(\mathrm{span}(M \cup \{\overline{v}\})) = \dim(U) + 1$.
5. *Det finns* $r = n - \dim(U)$ *vektorer* $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_r \in V \setminus U$ *så att* $M \cup \{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_r\}$ *spänner upp V; det är minsta möjliga antal.*
6. *Om M är linjärt oberoende så finns det* $r = n - \dim(U)$ *vektorer* $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_r \in V \setminus U$ *så att* $M \cup \{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_r\}$ *bildar en bas för V.*

Bevis.

Se kursboken. □

Exempel (forts)

Låt $M = \mathrm{span}(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{a}) \leq \mathbb{R}^5$, där $\overline{u} = (2,3,4,5,6)$, $\overline{v} = (3,4,5,6,7)$, $\overline{w} = (4,5,6,7,8), \overline{a} = (5,6,7,8,9)$. Vi har sett att beroendekvationerna för de givna generatorerna har lösningen

$$\begin{aligned} c_0 - c_2 - c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

så vi kan stryka $\overline{w}$ och $\overline{a}$ och får att $\{\overline{u}, \overline{v}\}$ är en bas för M, så $\dim(M) = 2$. Låt oss hitta en bas för $\mathbb{R}^5$ som består av $\overline{u}, \overline{v}$ samt tre vektorer till.
Kom ihåg att när vi satte in alla vektorer som radvektorer och eliminerade så fick vi fram

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -4x_0 + 3x_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3x_0 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 - 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_0 - 3x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_0 - 4x_1 + x_4 \end{pmatrix},$$

vilket ger att

$$M = \mathrm{span}(\overline{u}, \overline{v}) = \mathrm{span}((1,0,-2,-2,0),(0,1,2,3,0)).$$

Då följer det omedelbart att vi kan lägga till

$$(0,0,1,0,0),\ (0,0,0,1,0),\ (0,0,0,0,1)$$

utan att linjära beroenden uppstår.

Sats (Satsen om rätt antal element)

Antag att $\mathrm{dim}(V) = n$. Antag vidare att $M = \{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n\}$. Sätt $U = \mathrm{span}(M)$.

1. *Om M är linjärt oberoende så är M en bas (för U).*
2. *Om $U = V$ så är M en bas (för V).*
3. *Om M är linjärt beroende så är $U \subset V$.*
4. *Om $U \subset V$ så är M är linjärt beroende.*
5. *Låt $\underline{e}$ vara en ordnad bas för V och låt A vara matrisen vars kolonn nummer j är koordinatvektorn för $\overline{u}_j$ m.a.p. $\underline{e}$. Då är M en bas (för V) omm A är inverterbar.*

Skiss.

Låt $\underline{e} = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \cdots & \overline{e}_n \end{pmatrix}$ vara en ordnad bas för V, och låt A_j vara koordinatvektorn för $\overline{u}_j$ m.a.p. $\underline{e}$. Då överförs beroendeekvationen till matrisekvationen $AC = 0$, och en godtycklig vektor $\overline{w} \in V$ ligger i höljet M omm matrisekvationen $AC = H$ är lösbar, där H är koordnativektorn för $\overline{w}$. Men eftersom A är $n \times n$ så är följande likvädiga:

1. $AC = 0$ har bara lösningen $C = 0$
2. $AC = H$ har någon lösning för alla H
3. $AC = H$ har en unik lösning för alla H
4. A är inverterbar

$\square$

Exempel

Är

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = 2 - x + 3x^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h(x) = 3 - x - 4x^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

en bas för P_2? Vi ställer upp beroendeekvationen och radeliminerar koefficientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix}$$

Vi ser att beroendeekvationen endast har trivialia lösningar, så de tre polynomen utgör en bas. Gör på föreläsningen: skriv $5x^3 - 7x + 3$ som linjärkombination, dvs hitta dess koordinater map basen $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$.

Definition

Låt V vara ett vektorrum, och låt U_1, U_2 vara två delrum till V sådana att $U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}$. Vi definierar den *direkta summan*

$$U_1 \oplus U_2 = \{\, \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \,|\, \overline{u}_1 \in U_1,\ \overline{u}_2 \in U_2 \,\}$$

Exempel

1. Planet är den direkta summan av två icke-parallella linjer genom orig.
2. M_{22} är den direkta summan av delrummet av diagonalmatriser och delrummet av matriser med nollor på diagonalen.
3. M_{nn} är den direkta summan av delrummet av övertriangulära matriser och delrummet av strikt undertriangulära matriser.
4. $\mathrm{M}_{2n,2n}$ kan skrivas som
$$(U \oplus V) \oplus (W \oplus Y)$$
där
$$U = \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2n} \in \mathrm{M}_{2n,2n} \middle| a_{ij} = 0 \text{ om } i > n \text{ eller } j > n \right\}$$
o.s.v.

Exempel (forts)

5. Låt $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ och definiera U_1 som delrummet av funktioner som försvinner på 5, och U_2 som delrummet av funktioner som försvinner på 7. Då är $U_1 \cap U_2$ delrummet av funktioner som försvinner på både 5 och 7, och inte trivialt, så vi kan inte bilda $U_1 \oplus U_2$. Vi kan bilda

$$U_1 + U_2 = \{\, h(x) \,|\, h(x) = f(x) + g(x),\ f(5) = 0,\ g(7) = 0 \,\}$$

och det blir hela $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (varför?) men framställningen är inte unik (varför?).

6. Tag ånyo $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ och låt A, B vara två disjunkta, icketomma delmängder till $\mathbb{R}$. Sätt

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\, f(x) \,|\, f(a) = 0 \text{ för alla } a \not\in A \,\} \\ U_2 &= \{\, g(x) \,|\, g(b) = 0 \text{ för alla } b \not\in B \,\} \end{aligned}$$

Nu är $U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}$ och

$$U_1 \oplus U_2 = \{\, f(x) \,|\, f(a) = 0 \text{ för alla } a \not\in (A \cup B) \,\}$$

7. Låt vektorrumet V ha en bas M och partitionera $M = M_1 \cup M_2$ med $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Låt $U_1 = \mathrm{span}(M_1)$, $U_2 = \mathrm{span}(M_2)$. Då är $V = U_1 \oplus U_2$.

Lemma

1. *$U_1 \oplus U_2$ är ett delrum till V.*
2. *Om $U \leq V$ och $U_1, U_2 \leq U$ så $U_1 \oplus U_2 \leq U$.*
3. *Om $\overline{v} \in U_1 \oplus U_2$ så är framställningen*

$$\overline{v} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2, \quad \overline{u}_1 \in U_1, \overline{u}_2 \in U_2$$

unik.

Bevis.

1. Om $\overline{a}, \overline{b} \in U_1 \oplus U_2$ så finns $\overline{u}_1, \overline{v}_1 \in U_1$ och $\overline{u}_2, \overline{v}_2 \in U_2$ så att $\overline{a} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$, $\overline{b} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$. Då har vi att

$$\overline{a} + \overline{b} = (\overline{u}_1 + \overline{u}_2) + (\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = (\overline{u}_1 + \overline{v}_1) + (\overline{u}_2 + \overline{v}_2) \in U_1 \oplus U_2$$

och dessutom har vi för varje $c \in \mathbb{R}$ att

$$c\overline{a} = c(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) = c\overline{a} + c\overline{b} \in\in U_1 \oplus U_2$$

Vi har använt att U_1, U_2 är delrum.

$\square$

forts.

2. U är slutet under addition och skalning.
3. Antag att

$$\overline{v} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 = \overline{v}_1 + \overline{v}_2, \quad \overline{u}_1, \overline{v_1} \in U_1, \overline{u}_2, \overline{v_2} \in U_2$$

Då är

$$\overline{0} = \overline{v} - \overline{v} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 - (\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = (\overline{u}_1 - \overline{v}_1) + (\overline{u}_2 - \overline{v}_2)$$

Alltså är

$$\overline{u}_1 - \overline{v}_1 = -\overline{u}_2 + \overline{v}_2$$

Men $VL \in U_1$ och $HL \in U_2$, så $VL, HL \in U_1 \cap U_2 = \{\overline{0}\}$, så $VL = HL = \overline{0}$, så $\overline{u}_1 = \overline{v}_1$ och $\overline{u}_2 = \overline{v}_2$.

$\square$

Sats 5.4.26. (Multi-Plus-satsen) *Låt $\mathbb{U}_1$, $\dim \mathbb{U}_1 = k$ och $\mathbb{U}_2$, $\dim \mathbb{U}_2 = m$ vara underrum av ett vektorrum $\mathbb{V}$ och antag att $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Då är*

$$\dim (\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2) = k + m.$$

Vidare, om $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ är en bas i $\mathbb{U}_1$ och $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ är en bas i $\mathbb{U}_2$ så är $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ en bas i $\mathbb{U}_1 \oplus \mathbb{U}_2$.

Bevis.

Se kursboken. □

Sats

Låt $U_1 \leq V$ med $\dim(U_1) = k$, $\dim(V) = n$, $k < n$. Då finns det (oändligt många olika) $U_2 \leq V$, $\dim(U_2) = n - k$, så att $V = U_1 \oplus U_2$.

Bevis.

Välja bas $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\}$ för U_1, fyll ut till bas för hela V. Låt U_2 vara det linjära höljet av utfyllnadsbasvektorerna. □

Exempel

Låt Π vara planet med ekvation $x + y + z = 0$. Då är Π ett delrum till G^3. Som bas kan vi ta

$$\underline{\mathrm{f}} = [\underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}]$$

Låt nu $\overline{\mathrm{h}} = \underline{\mathrm{e}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vara vilken vektor som helst som inte ligger i planet, dvs så att $a + b + c \neq 0$. Då är $\ell = \left\{ c\overline{\mathrm{h}} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ ett ett-dimensionellt delrum till G^3, och har förstås $\left\{\overline{\mathrm{h}}\right\}$ som bas, och

$$\Pi \oplus \ell = \mathrm{G}^3.$$

Det är klart att $\overline{\mathrm{h}}$ (och linjen ℓ) kan väljas på allehanda sätt.