TATA24 Linjär Algebra, Fö 9

Inre produktrum, ortogonal projektion, ortogonalt komplement

Jan Snellman[1]

[1] Matematiska Institutionen
Linköpings Universitet

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Linköping, HT 2022

Detta dokument återfinns på kurshemsidan `http://courses.mai.liu.se/GU/TATA24/`

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

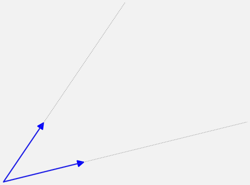
Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

Översikt av dagens föreläsning:

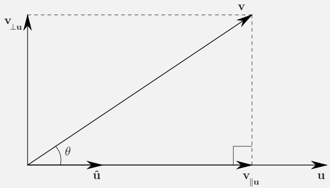
Översikt av dagens föreläsning:

Repetition av skalärprodukt i euklidiska rummet



- $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u} = \|u\| \, \|v\| \cos(\alpha)$ där $\|u\|$ är längden av $\overline{u}$, $\|v\|$ är längden av $\overline{v}$, och α vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.
- Hänger ihop med ortogonalprojektion via

$$\overline{v}_{\|\overline{u}} = \frac{\overline{v} \cdot \overline{u}}{\overline{u} \cdot \overline{u}} \overline{u}$$



Figur 2.18: Ortogonal projektion.

Repetition av skalärprodukt i euklidiska rummet, fortsättning

- Uppfyller räknereglerna
  1. $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$
  2. $(c\overline{u}) \cdot \overline{v} = c(\overline{u} \cdot \overline{v})$
  3. $(\overline{u}_1 + \overline{u}_2) \cdot \overline{v} = \overline{u}_1 \cdot \overline{v} + \overline{u}_2 \cdot \overline{v}$
  4. $\overline{u} \cdot \overline{u} \geq 0$, med likhet omm $\overline{u} = \overline{0}$.
- Definierar en längdfunktion via $\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$
- Omvänt, given en längdfunktion (som uppfyller vissa villkor) så fås en skalärprodukt genom

$$\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 + 2(\overline{u} \cdot \overline{v})$$

- Om $\underline{e} = [\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3]$ är en ON-bas för rummet, så har vi formeln

$$\underline{e} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{e} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Varför införa en inre produkt?

Låt V vara något vektorrum. Varför kan det vara bra att skapa en slags "skalärprodukt" på V? Vad kan vi använda en sådan till?

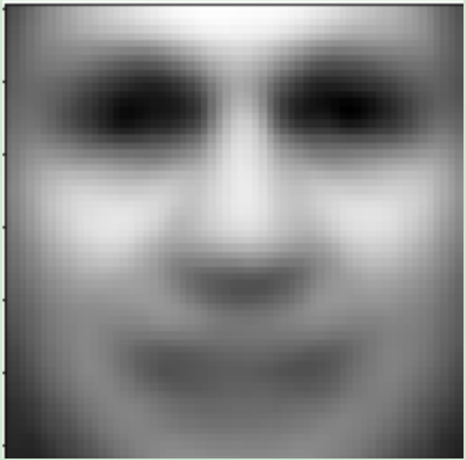
1. Om vi kan mäta längden av vektorer, så kan vi säga att de som är väldigt korta är försumbara.
2. Om vi har ett utvalt underrum $U \leq V$, med en bas given av vektorerna $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, så kan vi genom att ortogonalprojisera $\bar{v} \in V$ på U få bästa approximationen av $\bar{v}$ som en linjärkombination av vektorerna $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$. Vi får först skapa en "inre produkt" med avseende på vilken vektorerna $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ utgör en "ortonormal bas".

Exempel (Från artikeln "Eigenfaces: Recovering Humans from Ghosts" i nätblaskan Towards Data Science)

Låt V vara vektorrummet av 64×64-matriser. Detta vektorrum har en delmängd (inte delrum) av matriser där varje element ligger mellan 0 och 1; dessa matriser kan tolkas som gråskalebilder:

Exempel (forts)

Subtrahera bort följande “medelvärdesansikte” från alla bilder, så att de blir centrerade runt origo:



Exempel (forts)

Vi väljer ut 50 bilder och deklarerar att dessa bildar en ON-bas för delrummet U av "normalnunor". Detta specificerar en "inre produkt", som vi skall se. Här visas de 15 första av de 50 baselementen. Spöklika figurer, inte sant?

Exempel (forts)

Nu ortogonalprojicerar vi kändisarna från tidigare på U och ser hur bra approximationen blir. Varje kändis är nu representerad av en koordinatvektor med 50 element, istället för 64×64 reella tal. Är kändisens nuna igenkännbar?

3. Om du har ett vektorrum V av funktioner, tex kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$, så kan man man vilja avgöra när en funktion är nära noll, dvs man vill har normen $\|f\|$ av en funtion. Man kan också vara intresserad av att ha en "inre produkt" för att kunna ortogonaliprojicera på ett delrum, ungefär som i förra exemplet. Ett vanligt exempel är att man vill approximera funktioner med polynom, som är enklare att hantera. Man ser då till att välja en "inre produkt", t.e.x.

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathtt{dx}$$

och en (oändlig) mängd polynom som bildar en ortonormerad bas för delrummet av polynom. Sedan fås bästa "polynomiella approximationen" av funktionen $f(x)$ genom ortogonalprojektion!

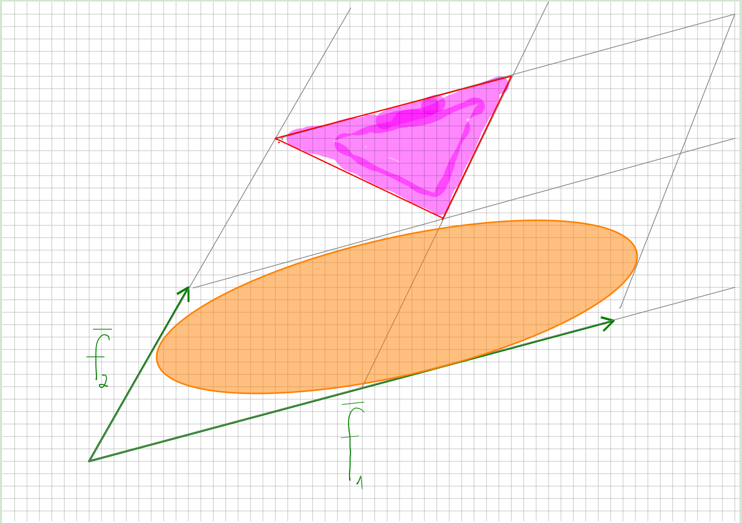
4. Man kan också tänka sig att man har en bra bas för ett delrum $U \leq V$, och att V redan har en "inre produkt", men att den givna basen för U tyvärr inte är "ortonormal" med avseende på den "inre produkten". Då får man tota ihop en ny inre produkt, så att basen blir ortonormal med avsende på den nya inre produkten!

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

Uppgift på tavlan: beräkna arean av triangeln T och cirkeln C. Student fotar tavlan med sin kamera. Tyvärr håller studenten kameran snett, så när studenten skriver ut bilden så är den vriden! Studenten hade tänkt sig att mäta i bilden, men vad göra nu?



Exempel (forts)

Vi ser att triangeln har kantvektorer

$$\underline{f}\begin{bmatrix}1/2\\-1\end{bmatrix}, \quad \underline{f}\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$$

Eftersom $\underline{f}$ är den "sneda bilden" av en ortonormerad bas i tavlan, så kan vi införa en "sned inre produkt" på papperet genom att deklarera att $\underline{f}$ skall vara en ortonormerad bas! Då kan arean av T beräknas som

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\-1 & 0\end{vmatrix} = 1/4$$

och ellipsen blir sim salabim en cirkel med radie $1/2$, så den har area $\frac{1}{4}\pi$. Observera att detta är i tavelareaenheter, eller "sneda pappersareaenheter", men inte i "papperasareaenheter".

Definition

Låt V vara ett vektorrum. En *inre produkt* (eller *generaliserad skalärprodukt*) på V är en funktion

$$\begin{aligned} V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\overline{u}, \overline{v}) &\mapsto (\overline{u}|\overline{v}) \end{aligned}$$

som upfyller räknelagarna

1. $(\overline{u}|\overline{v}) = (\overline{v}|\overline{u})$
2. $(\overline{u}|\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u}|\overline{v}) + (\overline{u}|\overline{w})$
3. $(\overline{u}|c\overline{v}) = c\,(\overline{u}|\overline{v})$
4. $(\overline{u}|\overline{u}) \geq 0$ med likhet endast för $\overline{u} = \overline{0}$.

Paret $(V, (\cdot|\cdot))$ kallas för ett *inre produktrum* eller ett *Euklidiskt rum*.

Definition

1. Givet en inre produkt på vektorrummet V så definieras *normen* (eller längden) av en vektor genom
$$\|\overline{u}\| = \sqrt{(\overline{u}|\overline{u})}.$$
2. Vi säger att två vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ är ortogonala om
$$(\overline{u}|\overline{v}) = 0$$
3. Vi definierar den ortogonala projektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$ genom
$$\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{(\overline{u}|\overline{v})}{(\overline{v}|\overline{v})}\overline{v}$$
4. Vi kan också definiera vinkeln α mellan två vektorer via
$$(\overline{u}|\overline{v}) = \|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|\cos(\alpha),$$
men i praktiken så är det inte lika ofta använt som de tidigare konstruktionerna.

Exempel

Låt som vanligt $\mathbb{R}^n$ bestå av kolonnmatriser av längd n. Vi visar att

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

är en inre produkt. Vi kan skriva produkten som $X^t Y$ och “missbrukar notationen” genom att betrakta 1x1-matriser som reeella tal. Transponatet av en sådan matris är då matrisen själv.

1. $Y^t X = (X^t Y)^t = X^t Y$
2. $X^t(Y + Z) = X^t Y + X^t Z$
3. $X^t(cY) = c(X^t Y)$
4. $X^t X = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0$, med likhet omm alla $x_j = 0$.

Ovanstående kallas för *standardskalärprodukten* på $\mathbb{R}^n$. Om inte annat anges så är det den som avses när man tittar på $\mathbb{R}^n$ som euklidiskt rum.

Exempel

Vilka "exotiska" inre produkter kan vi ge på $\mathbb{R}^2$? Från räknereglerna har vi att

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = \left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\middle|y_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$x_1y_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+x_1y_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)+x_2y_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+x_2y_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$ax_1y_1+bx_1y_2+bx_2y_1+cx_2y_2 = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

där

$$a = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$b = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$c = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Exempel (forts)

- $x_1y_1 + x_2y_2$ är OK (vanlig skalärprod)
- $x_1y_1 + 2x_2y_2$ också OK,
- $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 1$ ej OK, skalningsregeln gör att $(\overline{0}|\overline{u}) = 0$
- $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ uppfyller de tre första räknereglerna, men sätter vi $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ får vi
$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$
vilket är ≥ 0 men kan bli noll utan att $x_1 = x_2 = 0$.

Sats

1. *Låt B vara en $n \times n$-matris. Då är*

$$(X, Y) \mapsto X^t B Y$$

   en inre produkt på R^n omm B är symmetrisk och positivt definit, dvs om $X^t B X \geq 0$ för alla kolumnvektorer X, med likhet endast om X är nollvektorn.
2. *Omvänt så ges varje inre produkt på $\mathbb{R}^n$ av en sådan matris.*
3. *Om A är en inverterbar $n \times n$-matris så är $B = A^t A$ symmetrisk och positivt definit, så*

$$(X, Y) \mapsto (AX)^t (AY)$$

   är en inre produkt på $\mathbb{R}^n$.
4. *Om B är symmetrisk och positivt definit så är $B = A^t A$ för någon inverterbar A.*

Exempel

Vi tittar på $\mathbb{R}^5$ och väljer

$$\overline{u} = (1, 2, 3, 4, 5), \quad \overline{v} = (2, 3, 4, 5, 6).$$

Då är

$$\begin{aligned}
(\overline{u}|\overline{v}) &= 70 \\
(\overline{u}|\overline{u}) &= 55 \\
(\overline{v}|\overline{v}) &= 90 \\
\overline{u}_{\|\overline{v}} &= \left(\frac{14}{9}, \frac{7}{3}, \frac{28}{9}, \frac{35}{9}, \frac{14}{3}\right) \\
\overline{u} - \overline{u}_{\|\overline{v}} &= \left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right) \\
\left(\left(\overline{u} - \overline{u}_{\|\overline{v}}\right) \middle| \overline{v}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Exempel (forts)

Vi väljer nu en inverterbar matris $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, med

$$B = A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 25 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 41 \end{pmatrix}$$

och gör samma räkningar fast med den modifierade inre produkten:

$$\begin{aligned}
A\overline{u} &= (3, 10, 21, 36, 25) \\
A\overline{v} &= (5, 14, 27, 44, 30) \\
(\overline{u}|\overline{v})_B &= (A\overline{u}|A\overline{v}) = 3056 \\
(\overline{u}|\overline{u})_B &= (A\overline{u}|A\overline{u}) = 2471 \\
(\overline{v}|\overline{v})_B &= (A\overline{v}|A\overline{v}) = 3786 \\
\overline{u}_{||\overline{v}} &= \left(\frac{3056}{1893}, \frac{1528}{631}, \frac{6112}{1893}, \frac{7640}{1893}, \frac{3056}{631}\right) \qquad \text{m.a.p. B} \\
\overline{u} - \overline{u}_{||\overline{v}} &= \left(-\frac{1163}{1893}, -\frac{266}{631}, -\frac{433}{1893}, -\frac{68}{1893}, \frac{99}{631}\right) \qquad \text{m.a.p. B}
\end{aligned}$$

Exempel

Om vi väljer en singulär matris som tex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och därtill hörande

$$B = A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så kommer inget att fungera; b är inte längre positivt definit, så om vi till exempel tar vektorn

$$\overline{\mathrm{w}} = (0, 0, 0, 0, 1)$$

så har den längd (i kvadrat)

$$(\overline{\mathrm{w}}|\overline{\mathrm{w}})_B = (A\overline{\mathrm{w}}|A\overline{\mathrm{w}}) = ((0, 0, 0, 0, 0)\,|(0, 0, 0, 0, 0)\,) = 0$$

trots att den inte är nollvektorn!

Exempel (forts)

Ett mindre tillrättalagt exempel är

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 3 & 36 & 19 \\ -8 & -10 & -2 & -48 & -30 \\ -28 & -22 & -4 & -64 & -48 \\ 4 & 4 & 1 & 16 & 9 \\ -4 & -2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^t A = \begin{pmatrix} 1024 & 840 & 172 & 2688 & 1852 \\ 840 & 704 & 144 & 2320 & 1584 \\ 172 & 144 & 31 & 480 & 319 \\ 2688 & 2320 & 480 & 7968 & 5344 \\ 1852 & 1584 & 319 & 5344 & 3647 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathrm{w}} = \left(1, -1, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Här gäller att

$$A\overline{\mathrm{w}} = (0, 0, 0, 0, 0)$$

så m.a.p. inre produkten på $\mathbb{R}^5$ definierad av B så har $\overline{\mathrm{w}}$ längd (i kvadrat)

$$(\overline{\mathrm{w}}|\overline{\mathrm{w}})_B = (A\overline{\mathrm{w}}|A\overline{\mathrm{w}}) = 0$$

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

Låt V vara vektorrummet av kontinuerliga, reellvärda funktioner på $(0,1)$. Vi inför en inre produkt på V genom

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

Detta är verkligen en inre produkt, räknereglerna är uppfyllda:

1. $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx$
2. $\int_0^1 f(x)(g(x)+h(x))\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx + \int_0^1 f(x)h(x)\,dx$
3. $\int_0^1 f(x)(cg(x))\,dx = c\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$
4. $\int_0^1 f(x)f(x)\,dx \geq 0$ med likhet omm $f(x)$ är konstant lika med noll.

Exempel

Låt V bestå av alla följder $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ sådana att nästan alla $a_j = 0$, dvs finns N så att om $j > N$ så $a_j = 0$. Då är V ett vektorrum under komponentvis addition och skalning. Det blir ett inre produktrum mha

$$\left((a_j)_{j=0}^{\infty} \middle| (b_j)_{j=0}^{\infty} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j$$

Notera att summan är ändlig!
Vi har tex att

$$(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$

och

$$(0, 0, 0, 0, 2, 3, 4, 0, 0, \ldots)$$

är ortogonala mot varandra.

Sats

Låt $\|\cdot\|$ vara normen på det inre produktrummet V, dvs

$$\|\overline{v}\| = \sqrt{(\overline{v}|\overline{v})} \quad \textit{för alla } \overline{v} \in V.$$

Då kan den inre produkten återfås via

$$(\overline{u}|\overline{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 - \|\overline{u}\|^2 - \|\overline{v}\|^2\right)$$

Bevis.

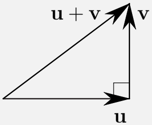
$$\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = (\overline{u}+\overline{v}|\overline{u}+\overline{v}) = (\overline{u}|\overline{u}) + (\overline{v}|\overline{v}) + 2\,(\overline{u}|\overline{v})$$

□

Sats 6.2.8. (Pythagoras sats)

Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum. Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ och antag att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. Då gäller

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 . \tag{6.2.3}$$



Figur 6.1: Pythagoras sats.

Bevis: $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}) \overset{6.2.1\,(ii)}{=} (\mathbf{u}|\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (\mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}) \overset{\substack{6.2.1\,(ii)\\ 6.2.1\,(i)}}{=}$

$$= (\mathbf{u}|\mathbf{u}) + \underbrace{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}_{=0} + \underbrace{(\mathbf{v}|\mathbf{u})}_{=0} + (\mathbf{v}|\mathbf{v}) \overset{6.2.6\,(a)}{=} |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \qquad \blacksquare$$

Konsekvenser av Pythagoras sats, komposantuppdelning

Definition 6.2.9. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$. Definiera vektorerna

$$\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}. \tag{6.2.6}$$

Vektorn $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}$ kallas den *ortogonala projektionen* av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$ kallas $\mathbf{v}$:s *ortogonala komponent* med avseende på $\mathbf{u}$.

Definitionen ovan blir meningsfull först efter att nästa sats formulerats (bevisade den gjorde vi ovan).

Sats 6.2.10. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$. Då gäller att*

$$\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} \perp \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}. \tag{6.2.7}$$

Kombinerar vi detta med Pythagoras sats får vi följande enkla men användbara hjälpsats.

Lemma 6.2.11. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum låt $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$. Då gäller att*

$$|\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}| \leq |\mathbf{v}|$$

för varje $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$.

Bevis: Låt $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$. Enligt diskussionen ovan gäller att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$. Då $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} \perp \mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}$ ger Pythagoras sats att

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}|^2 + |\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}}|^2 \geq |\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}|^2 \Longrightarrow |\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}| \leq |\mathbf{v}|. \qquad \blacksquare$$

Bevis av sats 6.2.10.

$$\left(\frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2}\overline{\mathrm{u}} \middle| \overline{\mathrm{v}} - \frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2}\overline{\mathrm{u}} \right) = \frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2} \left(\overline{\mathrm{u}} \middle| \overline{\mathrm{v}} - \frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2}\overline{\mathrm{u}} \right) =$$

$$\frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2} \left\{ (\overline{\mathrm{u}}|\overline{\mathrm{v}}) - \frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2} (\overline{\mathrm{u}}|\overline{\mathrm{u}}) \right\} = \frac{(\overline{\mathrm{v}}|\overline{\mathrm{u}})}{\|u\|^2} \left\{ (\overline{\mathrm{u}}|\overline{\mathrm{v}}) - (\overline{\mathrm{u}}|\overline{\mathrm{u}}) \right\} = 0$$

□

Sats 6.2.12. *Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklididskt rum. Då gäller för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$*

(a) **(Cauchy-Schwarz olikhet)**

$$|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$$

(b) **Triangelolikheten**

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$$

med likhet i (a) *omm* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är parallella och med likhet i* (b) *omm* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *har samma riktning.*

Exempel

I $\mathbb{R}^3$ så har vi att

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 6 < \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3}\sqrt{14}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{29} < \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3} + \sqrt{14}$$

Bevis: Både Cauchy-Schwarz olikhet och triangelolikheten är triviala likheter om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Vi antar därför att $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i bevisen nedan.

(a) Enligt lemma 6.2.11 gäller

$$|\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}}| = \left| \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u} \right| = \frac{|(\mathbf{v}|\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|^2}|\mathbf{u}| = \frac{|(\mathbf{v}|\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} \leq |\mathbf{v}| \iff |(\mathbf{v}|\mathbf{u})| = |(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$$

(b) Samma kalkyl som då vi bevisade Pythagoras sats ger

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \overset{*}{\leq} |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \overset{(a)}{\leq}$$
$$\leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 \iff |\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \qquad \blacksquare$$

Exempel

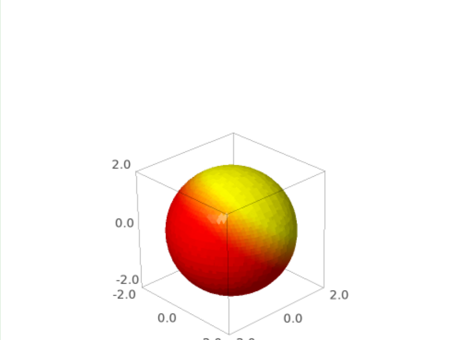
Funktionen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y, z) = \frac{x + 2y + 3z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

har ett unikt maximum på sfären

$$S = \{\, (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4 \,\}$$

Hitta maximum!



Exempel (forts)

Eftersom

$$f(x,y,z) = \frac{x+2y+3z}{x^2+y^2+z^2}$$

så ser vi att (med $\overline{v} = (x,y,z)$)

$$f(\overline{v}) = \frac{(\overline{v}|(1,2,3))}{\|\overline{v}\|^2}$$

så vi kan försöka att använda CS.
För $\overline{v} \in S$, dvs $\|\overline{v}\| = 2$, så

$$f(\overline{v}) = \frac{(\overline{v}|(1,2,3))}{\|\overline{v}\|^2} \leq \frac{\|\overline{v}\| \, \|(1,2,3)\|}{\|\overline{v}\|^2} \leq \frac{\|(1,2,3)\|}{\|\overline{v}\|} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

med likhet omm $\overline{v} = \frac{2}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

Definition 6.3.1. Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum. Mängden $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ säges vara en *OrtoNormerad mängd* (ON-mängd) om

$$(\mathbf{u}_i|\mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad i = j \\ 0 & \text{om} \quad i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Precis som i kapitel 2 är vektorerna i en ON-mängd parvis ortogonala (Orto) och av längd 1 (Normerad).

Sats 6.3.2. *Om $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ är en ON-mängd så är $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ linjärt oberoende.*

Bevis: Ställ upp beroendeekvationen för $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$. Då följer

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \Longrightarrow 0 = (\mathbf{0}|\mathbf{u}_i) &= (\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{u}_m|\mathbf{u}_i) = \\ &= \lambda_1 \underbrace{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_i)}_{=0} + \ldots + \lambda_i \underbrace{(\mathbf{u}_i|\mathbf{u}_i)}_{=1} + \ldots + \lambda_m \underbrace{(\mathbf{u}_m|\mathbf{u}_i)}_{=0} = \\ &= \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

d v s $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ är den enda lösningen så $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ är linjärt oberoende. ■

Korollarium 6.3.3. *Om $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{E}$ är en ON-mängd och $\dim \mathbb{E} = m$ så är $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ en ON-bas, d v s en ON-mängd med rätt antal element är en ON-bas.*

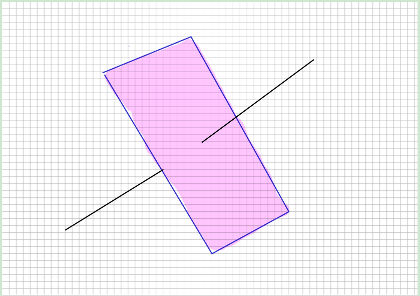
Jan Snellman
TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Definition 6.3.6. Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$. Det *ortogonala komplementet* till $\mathbb{U}$ definieras som

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{E} \colon\ (\mathbf{v}|\mathbf{u}) = 0 \quad \text{för alla} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{U}\}\,.$$

Exempel

Låt $P = \{\,(x, y, z)\,|\,x + 2y + 3z = 0\,\}$ vara ett plan in $\mathbb{R}^3$, med standardinreprodukten.
Då är P ett delrum, och ortogonala komplementet är normallinjen $\{\,(t, 2t, 3t)\,|\,t \in \mathbb{R}\,\}$

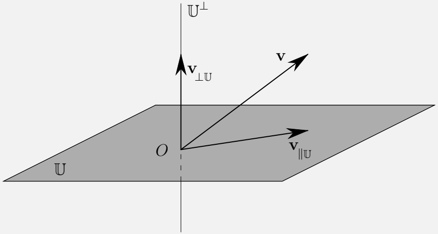


Exempel

Låt $\overline{\mathrm{u}} = (1,1,1,1)$, $\overline{\mathrm{v}} = (1,2,3,4)$, $U = \mathrm{span}(\overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{v}}) \leq \mathbb{R}^4$.
Då är

$$
\begin{aligned}
U^{\perp} &= \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \,|\, ((x_1,x_2,x_3,x_4)|(1,1,1,1)) = 0 = ((x_1,x_2,x_3,x_4)|(1,2,3,4)) \} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

Sats: existens och entydighet av ortogonal projektion



Figur 6.2: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$

Sats 6.3.9. *Låt $\mathbb{U}$ vara ett underrum av ett euklidiskt rum $\mathbb{E}$ och låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ vara en ON-bas i $\mathbb{U}$. Varje vektor i $\mathbf{v} \in \mathbb{E}$ kan på ett och endast ett sätt skrivas på formen*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \quad \textit{där} \quad \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \in \mathbb{U} \quad \textit{och} \quad \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^\perp.$$

Vidare,

$$\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{v}|\mathbf{u}_m)\,\mathbf{u}_m \tag{6.3.5}$$

och vi kallar $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ den ortogonala projektionen *på $\mathbb{U}$.*

Bevis: Vi börjar med entydigheten. Antag att vi har två uppdelningar med de föreskrivna egenskaperna. Då är

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v'}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v'}_{\perp\mathbb{U}} \iff \mathbb{U} \ni \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} - \mathbf{v'}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{v'}_{\perp\mathbb{U}} - \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^{\perp},$$

d v s vi har här en vektor som tillhör både $\mathbb{U}$ och $\mathbb{U}^{\perp}$. Därmed är den ortogonal mot sig själv. Då endast $\mathbf{0}$ har den egenskapen följer det att $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = \mathbf{v'}_{\|\mathbb{U}}$ och $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v'}_{\perp\mathbb{U}}$, d v s uppdelningen är entydig.

Bevis: existens av ortogonal projektion

Det återstår att visa att det alltid finns en uppdelning av den önskade formen, d v s att $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ i (6.3.5) har de rätta egenskaperna. Att $\mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} = (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{v}|\mathbf{u}_m)\,\mathbf{u}_m \in \mathbb{U}$ är trivialt, $\mathbb{U}$ är ju ett vektorrum. Som vi nämnde i fallet med ortogonal projektion på *en* vektor är den centrala egenskapen att $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}}$ är ortogonal mot det vi projicerar på, d v s $\mathbb{U}$. Det räcker att visa att $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \perp \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. Vi visar detta genom att utföra en kalkyl motsvarande den i (6.2.4) för $\mathbf{u}_1$.

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \middle| \mathbf{u}_1\right) &= \left(\mathbf{v} - (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - \ldots - (\mathbf{v}|\mathbf{u}_m)\,\mathbf{u}_m \middle| \mathbf{u}_1\right) = \\
&= (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1) - (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1)\underbrace{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}_{=1} - (\mathbf{v}|\mathbf{u}_2)\underbrace{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_1)}_{=0} - \ldots - (\mathbf{v}|\mathbf{u}_m)\underbrace{(\mathbf{u}_m|\mathbf{u}_1)}_{=0} = \\
&= (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1) - (\mathbf{v}|\mathbf{u}_1) = 0
\end{aligned}$$

Kalkylen för $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ är densamma. Följaktligen är $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \perp \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ och därmed mot varje linjärkombination av dem, d v s ortogonal mot alla vektorer i $\mathbb{U}$. Följaktligen gäller att $\mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^{\perp}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\|\mathbb{U}} + \mathbf{v}_{\perp\mathbb{U}}$. ■

Följdresultat

Antag:

- $U \leq E$, E inreproduktrum
- $\underline{u} = (\overline{u}_1 \quad \dots \quad \overline{u}_m)$ ON-bas.
- $\overline{v} \in E$.

Då:

$$\overline{v} = \overline{v}_{\|} + \overline{v}_{\perp}$$

med

$$\overline{v}_{\|} = \sum_{j=1}^{m} (\overline{v}|\overline{u}_j)\,\overline{u}_j = \underline{u} \begin{bmatrix} (\overline{v}|\overline{u}_1) \\ \vdots \\ (\overline{v}|\overline{u}_m) \end{bmatrix}$$

och $\overline{v}_{\|} = \overline{k} - \overline{v}_{\perp}$ och $\overline{v}_{\|} \in V$, $\overline{v}_{\perp} \in V^{\perp}$.
Med andra ord så fås koordinaterna för $\overline{v}_{\|}$ m.a.p. ON-basen $\underline{u}$ av inre produkt med motsvarande basvektor.

Fler följdresultat

Antag:

- E inreproduktrum
- $\underline{u} = (\overline{u}_1 \quad \dots \quad \overline{u}_m)$ ON-bas.

Då:

$$(\underline{u}X|\underline{u}Y) = X^tY$$

dvs inre produkt av vektorerna är skalärprodukt av koordinatvektorerna.
Omvänt: Antag att V vektorrum och $\underline{u} = (\overline{u}_1 \quad \dots \quad \overline{u}_m)$ bas. **Definiera**

$$(\underline{u}X|\underline{u}Y) = X^tY$$

Detta blir då en inre produkt, $\underline{u}$ blir ON-bas m.a.p. denna inre produkt! Alla inre produkter kan fås på detta sätt!

Antag:

- $U \leq E$, E inreproduktrum
- $\underline{u} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 & \dots & \overline{u}_m \end{pmatrix}$ ON-bas.

Då:

- $E = U \oplus U^\perp$
- Så om $\dim(E) = n < \infty$ så $\dim(U^\perp) = \dim(E) - \dim(U) = n - m$.
- Om dessutom $[\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_{n-m}]$ är en ON-bas för $U^\perp$ så är

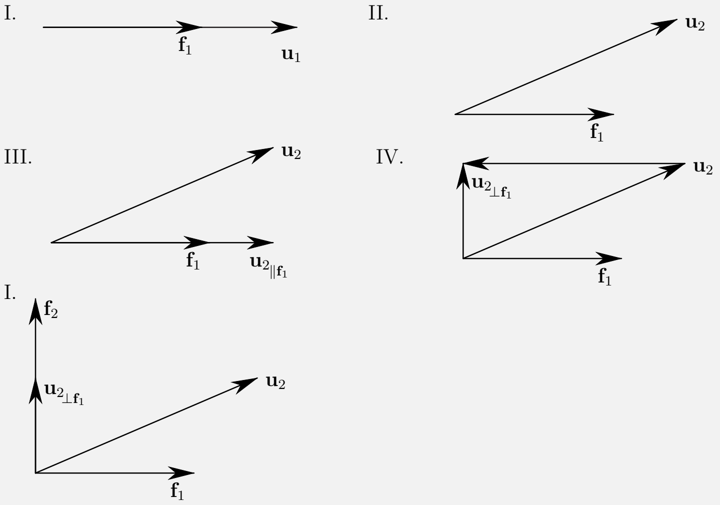
$$\begin{pmatrix} \overline{u}_1 & \dots & \overline{u}_m & \overline{v}_1 & \dots & \overline{v}_{n-m} \end{pmatrix}$$

en ON-bas för E.

1. Indata: vektorer $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$ som spänner upp $U \leq \mathbb{R}^n$, (eller U delrum till något annat inreproduktrum). Vi kräver inte att $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$ är linjärt oberoende; vi kommer att upptäcka eventuella linjära beroenden och löjliga element under resans gång.
2. Utdata: $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$, en ON-bas för U.
3. Initiering: $F = []$, $V = \{\bar{0}\}$.
4. Upprepa:
    1. (NY): Tag nästa $\bar{u}_j$
    2. Skriv $\bar{u}_j = \bar{w}_{\| V} + \bar{w}_{\perp V}$
    3. Om $\bar{w}_\perp = \bar{0}$, kasta bort den och tag nytt $\bar{u}$, dvs GOTO (NY)
    4. Om $\bar{w}_\perp \neq \bar{0}$ så normera, $\bar{f}_\ell = \frac{\bar{w}_\perp}{\|\bar{w}_\perp\|}$
    5. Sätt $V = \mathrm{span}(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_\ell)$.
    6. GOTO (NY) om det finns fler $\bar{u}$ att behandla
5. MATA UT $F = [\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_r]$

Naturligtvis måste man inkrementera relevanta index för $\bar{u}$ och $\bar{f}$ då och då.

Illustration av stegen i Gram-Schmidt



Exempel (forts)

Vi studerar ånyo $\bar{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\bar{u}_2 = (1,2,3,4)$, $U = \mathrm{span}(\bar{u},\bar{v})$, $U^\perp = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

Vi får en ON-bas för U genom

$$\bar{f}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$

och

$$w_2 = \bar{u}_2 - \left(\bar{u}_2 \middle| \bar{f}_1\right)\bar{f}_1 - \bar{f}_1 = (1,2,3,4) - 5\bar{f}_1 = (1,2,3,4) - \frac{5}{2}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(-3,-1,1,3)$$

Vi kontrollerar att w_2 är ortogonal mot $\bar{f}_1$.
Vi skalar om w_2:

$$\bar{f}_2 = \bar{w}_2 / \|\bar{v}_2\| = \frac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3)$$

En ON-bas för U är $[\bar{f}_1, \bar{f}_2]$.

Exempel (forts)

Vi plockar nu fram en ON-bas för $U^{\perp}$.
Först normerar vi $\overline{u}_3$:

$$\bar{f}_3 = \frac{\overline{u}_3}{\|\overline{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)$$

Sedan komposantuppdelar vi $\overline{u}_4$ m.a.p. $\bar{f}_3$:

$$w_4 = \overline{u}_4 - \left(\overline{u}_4 \middle| \bar{f}_3\right)\bar{f}_3 - \bar{f}_3 = (2,-3,0,1) - \frac{8}{\sqrt{6}}\bar{f}_3 =$$

$$(2,-3,0,1) - \frac{8}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0) = (2,-3,0,1) - \frac{4}{3}(1,-2,1,0) = \frac{1}{3}(2,-1,-4,3)$$

Vi kontrollerar att

$$((1,-2,1,0)|(2,-1,-4,3)) = 0,$$

så $\overline{w}_4 \perp \bar{f}_3$.
Vi normerar $\overline{w}_4$:

$$\bar{f}_4 = \frac{\overline{w_4}}{\|\overline{w}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)$$

Nu är $[\bar{f}_3, \bar{f}_4]$ en ON-bas för $U^{\perp}$, och $[\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4]$ är en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$.

Exempel (forts)

Tag nu vektorn

$$\bar{v} = (1,0,1,0) = \underline{e} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där $\underline{e}$ är den vanliga ON-basen för $\mathbb{R}^4$. Vi har att

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{f}_1\right) = \left((1,0,1,0)\middle|\frac{1}{2}(1,1,1,1)\right) = 1$$

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{f}_2\right) = \left((1,0,1,0)\middle|\frac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3)\right) = \frac{-2}{\sqrt{20}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{f}_3\right) = \left((1,0,1,0)\middle|\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\left(\bar{v}\middle|\bar{f}_4\right) = \left((1,0,1,0)\middle|\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)\right) = \frac{-2}{\sqrt{30}} = \frac{-2\sqrt{30}}{30} = \frac{-\sqrt{30}}{15}$$

så

$$\bar{v}_{\parallel U} = \bar{v}_{\perp U^\perp} = \bar{f}_1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{f}_2$$

$$\bar{v}_{\parallel U^\perp} = \bar{v}_{\perp U} = \frac{\sqrt{6}}{3}\bar{f}_3 - \frac{\sqrt{30}}{15}\bar{f}_4$$

Jan Snellman

TEKNISKA HÖGSKOLAN
LINKÖPINGS UNIVERSITET

Exempel

Låt $\bar{u} = (1, 1, 1)$, $(\bar{v} = (1, 2, 3)$. Hitta en ON-bas till $\mathbb{R}^3$ (med vanliga skalärprodukten) $[\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3]$ så att $\mathrm{span}(\bar{f}_1) = \mathrm{span}(\bar{u})$ och $\mathrm{span}(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = \mathrm{span}(\bar{u}, \bar{v})$.
Istället för GS så tänker vi såhär:

1. Först sätter vi $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, dvs vi skalar om $\bar{u}$. (Det är första steget i GS).
2. $\bar{u}, \bar{v}$ spänner plan T med normal $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = (1, -2, 1)$.
3. Vi normerar och sätter $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.
4. Nu behöver vi ett $\bar{f}_2 \in T$, för vilket ett nödvändigt och tillräcklig villkor är att $\bar{f}_2$ är ortogonalt mot $\bar{u}$ och $\bar{n}$, så vi räknar ut $\bar{u} \times \bar{n} = (3, 0, -3)$.
5. Vi sätter alltså $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.