1. Översikt, varför linj alg?

- Linj ekvsys, vektorskalära beräkningar
- Approximera icke-linj problem, diskretisering
- 3D geometri
- Analys av stora datamängder

2. Kursinnehåll

- Linj ekvsys
- Geom vektorer
- Linjer, plan
- Matrisräkning

- Allmänna vektorrum
  - baser, dim, linj olbe
- Euklidiska rum
  - inre prod, norm
  - GS
  - MK

KS

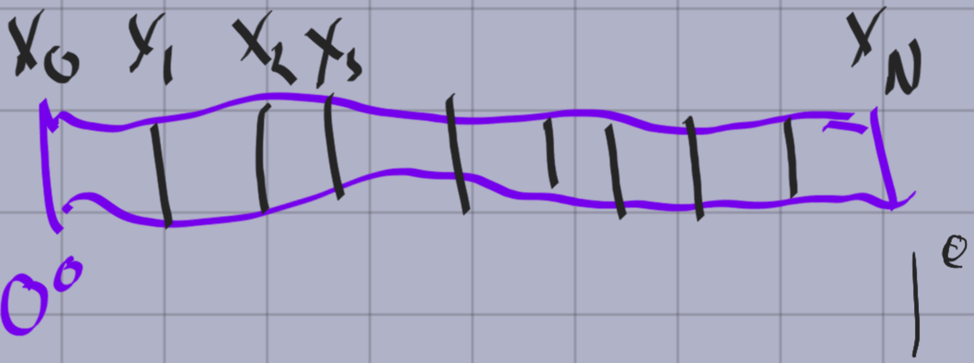
- Determinanter
- $\boxed{\text{Linj avb}}$
- Basbyte
- Egenvektorer och egenvärden

(3) Ändringar från förra året, utvärdering

(4) Dagens föreläsning

- l. ekvsys
- tablåform
- eliminering
- trappstegsform
- bas, dim för lösningsrum
- (ekv med parametrar)

Vinjett: stationär värme-fördelning.



- Diskretisera
- $$x_j = \frac{1}{2} x_{j-1} + \frac{1}{2} x_{j+1}$$

  $$x_0 = 0, \quad x_N = 1$$
- Ex $N = 3$

  $x_0 = 0$

  $x_1 = \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} x_2$

  $x_2 = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3$

  $x_3 = 1$

$$\begin{array}{cccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + 1\right) \quad \text{Ok}$$

5 Ex $l(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$

Linj. form i 2 var.

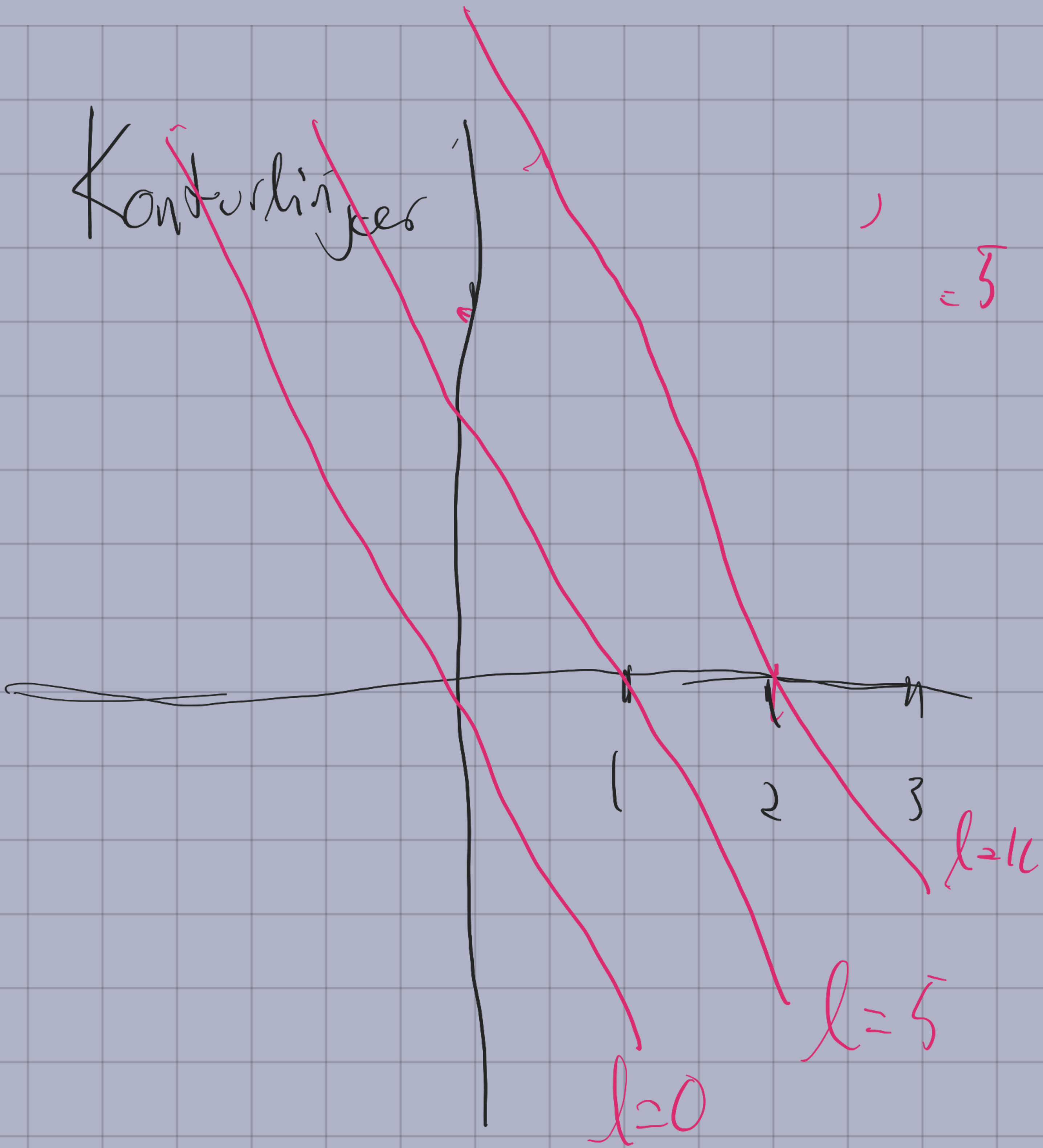
$$l(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 5(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2)$$

$$= 5x_1 + 5y_1 + 3x_2 + 3y_2$$

$$= l(x_1, x_2) + l(y_1, y_2)$$

P.l.s.: $l(cx_1, cx_2) = c\,l(x_1, x_2)$

Konturlinjer

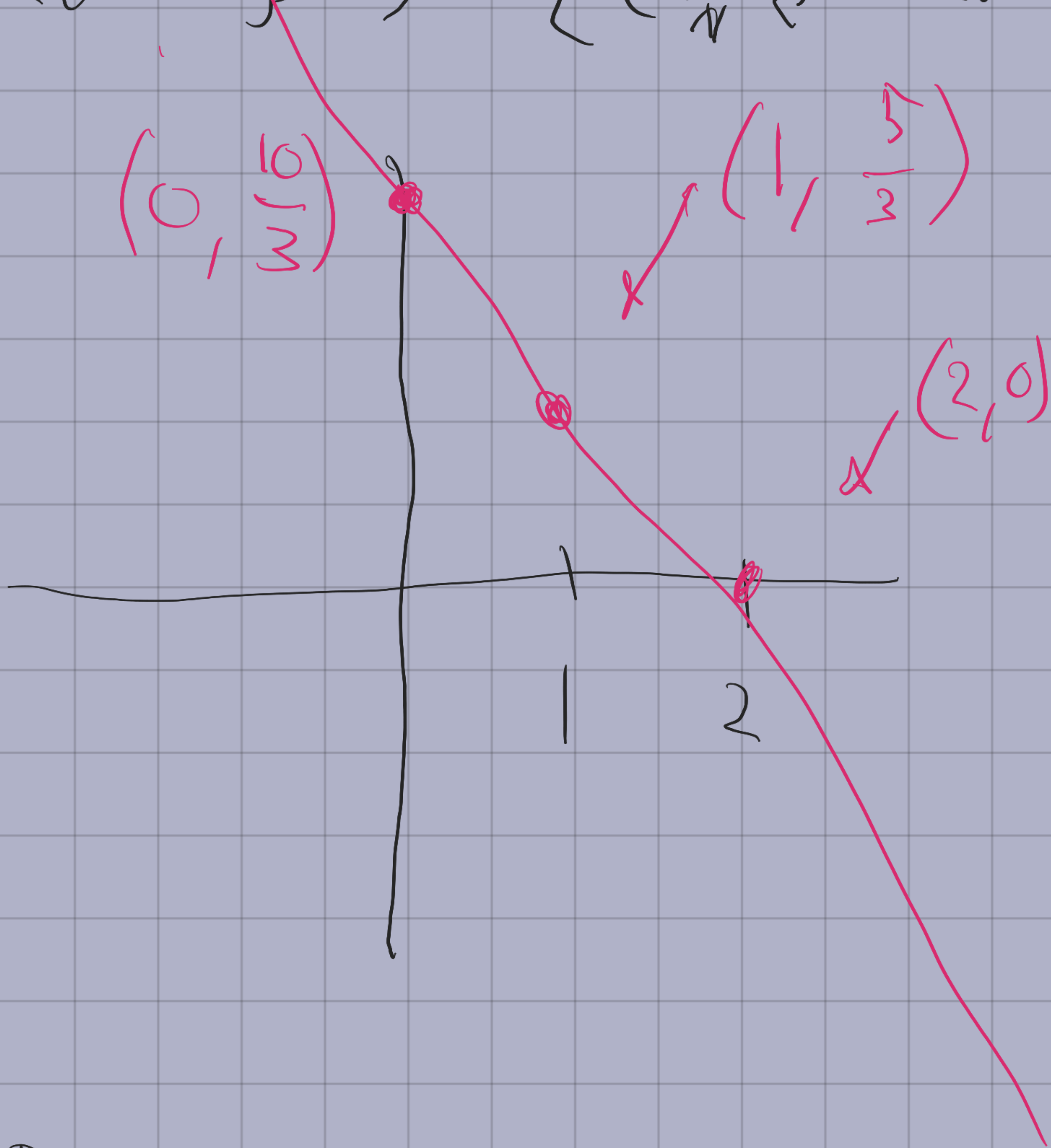


Ex lin ekv

$l(x_1, x_2) = 10$

$$5x_1 + 3x_2 = 10$$

Lösningsmängd: $\{(x_1, x_2) : 5x_1 + 3x_2 = 10\}$



Parametrisering: $x_1 = t$, $x_2 = \dfrac{10-5t}{3} = \dfrac{10}{3} - \dfrac{5}{3}t$

$$\left\{ \left(t, \frac{10}{3} - \frac{5}{3}t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

---

(6) 1 var:

$$ax = b$$

(i) Om $a \neq 0$ så $x = \frac{b}{a}$

unik lösn

(ii) Om $a = 0$, $b \neq 0$: ingen lösn

(iii) Om $a = 0$, $b = 0$: Varje $x \in \mathbb{R}$

lösn, ∞ många lösn.

⑦ System av linj ekv.

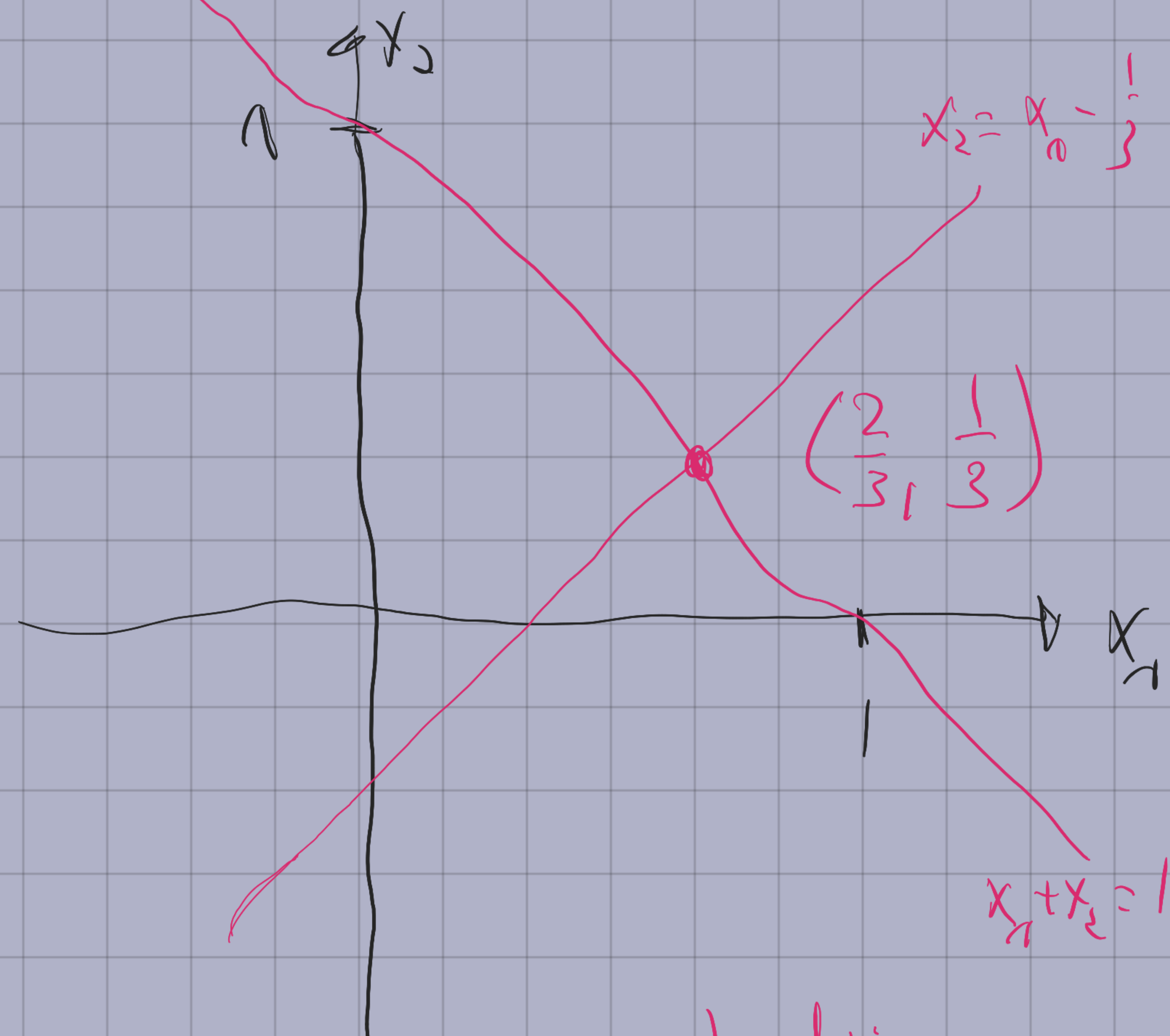
m = ant ekv

n = ant var

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \\ \vdots \\ \ell_m(x_1, \ldots, x_n) = c_m \end{array}\right\}$$

Ex $m = n = 2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1/3 \end{aligned}\right\}$$



unik lösn

8 Elimination av variabler.

Ex $e_1: \quad x_1 + x_2 = 1$

$e_2: \quad x_1 - x_2 = 1/3$

(i) Lös ut x_1 ur e_1, stoppa in i e_2, x_1 eliminerad:

$$x_1 = 1 - x_2$$

$$e_3: \quad \frac{1}{3} = x_1 - x_2 = (1 - x_2) - x_2$$

$$= 1 - 2x_2$$

$$\Longrightarrow -2x_2 = -\frac{2}{3}$$

(ii)

Har

$$\left.\begin{aligned} e_1 &: \quad x_1 + x_2 = 1 \\ e_2 &: \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \\ e_3 &: \quad -2x_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$$

(iii)

e_2 kan uttrykkes fra e_1, e_3, så stryk:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &: \quad x_1 + x_2 = 1 \\ e_3 &: \quad -2x_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\}$$

(iv)

Løs e_3:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

stoppa in i e_1:

(v) $x_1 = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{1}{3}$

Steg (i) ta vidhjälp genom att addera multipel av e_1 till e_2:

$e_1: \quad x_1 + x_2 = 1$

$e_2: \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{3}$

$e_3 = -e_1 + e_2: \quad 0x_1 - 2x_2 = -2/3$

9 Tablå/matrisnotation

(i) välj ordning på variablerna

(ii) ekv $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = d$

skrivs $c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n \mid d$

(obs! raden!)

(iii) Eliminera x_1, sedan x_2, osv tills det tar stopp

(iv) Tolka resultatet

10

<u>Ex</u>

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 0x_2 - x_3 = 2$$
$$12x_1 - 20x_2 + 9x_3 = \cancel{10}\ 12$$

Totalmatris/Tablå:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -2,\ -12 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & -1 & 2 \\ & 12 & -20 & 9 & 12 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right)$$

(1) Tolkar resultatet:

(i) pivotelement

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}$$

(2) Sätt parametrar på var som ej hör till pivot, lös ut övriga:

$$x_3 = t$$

$$x_2 - \frac{3}{4}t = 0 \implies x_2 = \frac{3}{4}t$$

$$x_1 - \frac{1}{2}t = 1 \implies x_1 = 1 + \frac{1}{2}t$$

Lösningsmängd av dim = 1

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{2}t, \frac{3}{4}t, t\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Kontroll: e_1: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

$$1 + \frac{1}{2}t - 2\left(\frac{3}{4}t\right) + t =$$

$$1 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}t + t = 1$$

OK

e_2: $2x_1 - x_3 = 2$

$$2\left(1+\tfrac{1}{2}t\right) - t = 2 + t - t = 2$$

OK.

(12) Större exempel

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 0x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 5/2 & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & -11/4 \end{array}\right)$$

Tolka res

$$x_4 = t$$

$$x_3 = -\frac{11}{4} + \frac{3}{2}t$$

$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t$

$x_1 = 3 - 2t$

1-dim lösningsmängd.

13

Allmänt:

$$\left.\begin{array}{l} l_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ \vdots \\ l_m(x_1, \dots, x_n) = c_m \end{array}\right\}$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & & x_n & \\
e_1 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & c_1 \\
\vdots & & & & & & \\
e_m & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & c_m
\end{array}
$$

Operationer: (1) byt plats på 2 rader

(2) mult rad med konstant $\neq 0$

(3) addera mult av rad till annan

När, efter ändligt många steg: unik radreducerad

trappstegsform.

param

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
x_1 & & x_3 & & x_4 & x_5 & & & \\
1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & *
\end{array}
$$

- * ledande ettor: nollor till vänster i rad, och i kol
- svarar mot variabler som löses ut
- övriga variabler: sitt param

- ant param: lösnings-mängdens dimension

14

Ex, radreducerad trappstegsform

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x & x_4 & x_5 & x_6 & \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$x_1 = t_1, \quad x_4 = t_2, \quad x_6 = t_3$

$t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ dim=3

$$x_2 = 3 + 2t_2 - 4t_3$$

$$x_3 = 3 + t_2 - 3t_3$$

$$x_5 = 2 - 2t_3$$

15 Kan skriva lösningen på vektorform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 3 + 2t_2 - 4t_3 \\ 3 + t_1 - 3t_3 \\ t_2 \\ 2 - 2t_3 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16 Ekvsys med konstanter/parametrar

Ex

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = a \\ b x_1 + 4x_2 = c \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ b & 4 & c \\ 1 & 2 & a \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ b & 4 & c \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 4-2b & c-ab \end{array}$$

(i) Om $4-2b \neq 0$ dvs $b \neq 2$

Så $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ & 1 & \frac{c-ab}{4-2b} \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a-\frac{2(c-ab)}{4-2b} \\ & 1 & \frac{c-ab}{4-2b} \end{array}$

Entydig lösning, beror på a, b, c.

(ii) Om $b = 2$:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & c-2a \end{array}$$

ii.i) : Om $c \neq 2a$:

ingen lösning

ii.ii) Om $c = 2a$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 = t$ parameter, $t \in \mathbb{R}$

$x_1 = a - 2t$

∞ många lösningar för varje a.

Obs: hide a och t är

"parenteser" men har olika roller.

17 **Sats** ett linj ekvsys

har antingen
- ingen lösning
- unik lösning
- ∞ många lösningar
  (r frihetsgrader)

Ex

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

ingen lösn

Ex

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

unik lösn

Ex

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

∞ många lösn

(1-dim lösmängd)

$x_2 = t$, $x_1 = 2 - 2t$

$x_3 = 3$

$t \in \mathbb{R}$.